



主題 4 等差、等比與調和中項



【觀念一】等差中項

(1) a, x, b 成等差， x 稱 a, b 等差中項 (算術中項)

(2) 條件 $\Rightarrow \boxed{x = \frac{a+b}{2}}$ ($x - a = b - x \Rightarrow x = \frac{a+b}{2}$)

【觀念二】等比中項

(1) a, x, b 成等比， x 稱 a, b 等比中項 (幾何中項)

(2) 條件 $\Rightarrow \boxed{x = \pm\sqrt{ab}}$ ($\frac{x}{a} = \frac{b}{x} \Rightarrow x^2 = ab \Rightarrow x = \pm\sqrt{ab}$)

【觀念三】調和中項

(1) a, x, b 成調和數列，即 $\frac{1}{a}, \frac{1}{x}, \frac{1}{b}$ 成等差

x 稱為 a, b 調和中項

(2) 條件 $\Rightarrow x = \frac{2ab}{a+b}$

($\because \frac{1}{a} + \frac{1}{b} = 2 \cdot \frac{1}{x} \Rightarrow \frac{a+b}{ab} = \frac{2}{x} \Rightarrow x = \frac{2ab}{a+b}$)



1. (能力指標：A ≥ G ≥ H)

a, b 為二正數， $A = \frac{a+b}{2}$ ， $G = \sqrt{ab}$ ， $H = \frac{2ab}{a+b}$

(1) 證明 $A \geq G$ (稱算幾不等式)

(2) 證明 $G \geq H$

(3) 利用圖形說明

解： (1) $A - G = \frac{a+b}{2} - \sqrt{ab} = \frac{a+b-2\sqrt{ab}}{2} = \frac{(\sqrt{a}-\sqrt{b})^2}{2} \geq 0$

$$\Rightarrow A \geq G$$

$$\begin{aligned} (2) \quad G - H &= \sqrt{ab} - \frac{2ab}{a+b} = \frac{(a+b)\sqrt{ab} - 2ab}{a+b} \\ &= \frac{\sqrt{ab}(a+b-2\sqrt{ab})}{a+b} = \frac{\sqrt{ab}(\sqrt{a}-\sqrt{b})^2}{a+b} \geq 0 \end{aligned}$$

$$\Rightarrow G \geq H$$

(3)

