

主題 2 等差數列

MZKH



【觀念一】等差數列 (arithmetic progression)

(1) 等差數列又稱 _____，以 _____ 表示

【觀念二】等差數列一般式

(1) $\langle a_n \rangle$ 成等差數列： $a_1 \quad a_2 \quad a_3 \quad \cdots \quad a_{n-1} \quad a_n$
 $\quad \quad \quad \swarrow \quad \quad \swarrow \quad \quad \quad \swarrow$
 $\quad \quad \quad d \quad \quad d \quad \quad \quad d$

(2) 等差數列一般項： $a_n = \boxed{a_1 + (n-1)d} = \boxed{\quad}$

《說明》 $a_2 - a_1 = d$

$a_3 - a_2 = d$

$a_4 - a_3 = d$

$\vdots$

$$\begin{array}{rcl} +) & a_n - a_{n-1} & = d \\ \hline & a_n - a_1 & = (n-1)d \end{array}$$

$\therefore a_n = a_1 + (n-1)d$

【觀念三】等差中間項性質

(1) $a_1 + a_2 + a_3 =$

(2) $a_1 + a_2 + a_3 + a_4 + a_5 =$

(3) $a_1 + a_2 + a_3 + a_4 + a_5 + a_6 + a_7 =$

(4) $a_1 + a_3 + a_5 + a_7 + a_9 =$

(5) $a_1 + a_3 + a_5 + a_7 + a_9 + a_{11} =$

(6) $a_2 + a_4 + a_6 + a_8 + a_{10} + a_{12} =$

【觀念四】公差 d 求法

$$(1) \begin{cases} a_m = a_1 + (m-1)d \\ a_n = a_1 + (n-1)d \end{cases} \Rightarrow a_m - a_n = (m-n)d$$
$$\Rightarrow d = \boxed{\frac{a_m - a_n}{m - n}} \text{ (兩項求公差 } d \text{)}$$

【觀念五】等差數列遞迴式

$$(1) \langle a_n \rangle \text{ 成等差} \Rightarrow \boxed{a_{n+1} = a_n + d \quad (n \in \mathbb{N})}$$

$$\text{或} \quad \boxed{a_n = a_{n-1} + d \quad (n \in \mathbb{N}, n \geq 2)}$$

$$(2) \langle a_n \rangle \text{ 成等差} \Rightarrow \boxed{a_{n+1} - a_n = d \quad (n \in \mathbb{N})}$$

$$\text{或} \quad \boxed{a_n - a_{n-1} = d \quad (n \in \mathbb{N}, n \geq 2)}$$

例 1. (能力指標：知一般項比求和比)

二個等差數列，第 n 項之比為 $(2n+3):(6n+4)$ ，求前 9 項和之比值。

$$\text{解：} \frac{S_9}{S'_9} = \frac{a_1 + a_2 + a_3 + a_4 + a_5 + a_6 + a_7 + a_8 + a_9}{b_1 + b_2 + b_3 + b_4 + b_5 + b_6 + b_7 + b_8 + b_9} =$$

ZBDZ



例 2. (能力指標：知和比求一般項比)

二個等差數列，前 n 項和之比為 $(7n+2):(n+3)$ ，求其第 3 項之比值。



解： $\frac{a_3}{b_3} = \frac{+a_3 +}{+b_3 +} =$

例 3. (能力指標：共同項問題)

$a_n = 4n+1$, $b_n = 3n+2$, $n \in \mathbb{N}$ ，求共同項_____。



解： $1^\circ \langle a_n \rangle = \langle 5, 9, 13, 17, 21, \dots \rangle$

$\langle b_n \rangle = \langle 5, 8, 11, 14, 17, \dots \rangle$

共同項 $\langle c_n \rangle = \langle 5, 17, 29, \dots \rangle$

$2^\circ c_1 = 5, d = 12$

(共同項公差 12，是原來二公差之最小公倍數)

$\therefore c_n = 5 + (n-1)12 = 12n - 7$

例 4. (能力指標：等差極值)

設一個等差數列第 8 項是 18，第 20 項是 -174，

(1) 求 $a_1 = \underline{\hspace{2cm}}$ ， $d = \underline{\hspace{2cm}}$ ， $a_n = \underline{\hspace{2cm}}$ 。

(2) 第 n 項開始為負，求 $n = \underline{\hspace{2cm}}$ 。

(3) S_n 之最大值。

解： (1) $\begin{cases} a_1 + 7d = 18 \\ a_1 + 19d = -174 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a_1 = \\ d = \end{cases} \Rightarrow a_n =$

(2) $a_n < 0 \Rightarrow$

(3) S_n 最大值 =



例 5. (能力指標：倍數求和)

求 100 到 300 之間 7 的倍數的總和。

解： 1° 令 $n = 7k$ ($k \in \mathbb{N}$)

$$100 < 7k < 300 \Rightarrow \frac{100}{7} < k < \frac{300}{7} \Rightarrow k = 15 \sim 42 \text{ (共 28 項)}$$

$$2^\circ \text{ 總和} = \frac{(105 + 294)28}{2} = 5586$$



例 6. (能力指標：等差數列插值法)

(知道等差數列其中二項求另一項)

(1) $a_5 = 6$, $a_{10} = 31$, $a_{17} = \underline{\hspace{2cm}}$ 。

解： **法 1** $\begin{cases} a_5 = a_1 + 4d = 6 \\ a_{10} = a_1 + 9d = 31 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a_1 = \\ d = \end{cases} \Rightarrow a_{17} =$

法 2 $\begin{cases} a_5 = a_1 + 4d \\ a_{10} = a_1 + 9d \\ a_{17} = a_1 + 16d \end{cases} \Rightarrow d = \frac{a_{10} - a_5}{10 - 5} = \frac{a_{17} - a_{10}}{17 - 10} = \frac{a_{17} - a_5}{17 - 5}$

$\begin{array}{c} \bullet \quad \bullet \quad \bullet \\ \hline (5, 6) \quad (10, 31) \quad (17, y) \end{array} \Rightarrow$

(2) $a_m = n$, $a_n = m$, 求 $a_{m+n} = \underline{\hspace{2cm}}$ 。($m, n \in \mathbb{N}$)

解：

$\begin{array}{c} \bullet \quad \bullet \quad \bullet \\ \hline (m, n) \quad (n, m) \quad (m+n, y) \end{array} \Rightarrow$

(3) $-10 \sim 20$ 之間由小到大插入 13 個等差中項，求插入的第 6 項？

解：

$\begin{array}{c} \bullet \quad \bullet \quad \bullet \\ \hline (1, -10) \quad (7, y) \quad (15, 20) \end{array} \Rightarrow$



例 7. (能力指標：等差中間項性質)

有一個 101 項的等差數列 $a_1, a_2, a_3, \dots, a_{101}$ ，其和為 0，且 $a_{71} = 71$ ，問下列選項哪些正確？

- (1) $a_1 + a_{101} > 0$ (2) $a_2 + a_{100} < 0$ (3) $a_3 + a_{99} = 0$
(4) $a_{51} = 51$ (5) $a_1 < 0$

解：



例 8. (能力指標：等差重要證明題)

$\langle a_n \rangle$ 成等差數列， $p, q, r \in \mathbb{N}$ ， $a_p = x$ ， $a_q = y$ ， $a_r = z$ ，
求 $x(q-r) + y(r-p) + z(p-q) =$ _____。

解：





回家作業



1. 在 3 與 100 之間插入 $a_1, a_2, \dots, a_8$ 八個數，使它們形成 10 項的等差數列，求 $a_5 = ?$



2. 有一直角三角形之三邊的長構成等差數列，試證：這個直角三角形三邊長的比必為 3:4:5。

3. 設 $\langle a_n \rangle$ 是一等差數列，且 $a_3 = 56, a_{10} = -7$

(1) 試求 a_{23} 與 a_{37} 。

(2) 設這等差數列的前 n 項總和是 S_n ，當 S_n 有最大值時，試求 n 的值。

4. 在 1 與 999 之間插入 n 項，使其成一等差數列，試問 n 至少是多少時，才會使這數列的總和超過 5000 呢？

簡答

1. $56\frac{8}{9}$ 2. 見詳解 3. (1) -124 與 -250 (2) 9 4. 9



回家作業



5. 設實數 a, b, c 成等差數列，其中 $a \neq 0$ ，試證方程式 $ax^2 + 2bx + c = 0$ 兩根均為實根。
6. 一等差數列 $a_1, a_2, a_3, \dots$ ，如果 $a_4 = -9$ ， $a_{10} = 3$ ，求 a_{20} ，以及 $a_1 + a_2 + a_3 + \dots + a_n > 100$ 的最小正整數 n ？
7. 有一等差數列，已知第 i 項為 j^2 ，第 j 項為 i^2 ，且 $i \neq j$ ，求第 $i+j$ 項為何？



5. 見詳解 6. $a_{20} = 23$ $n = 21$ 7. $-ij$



回家作業



8. (103 學測試題)

設 $a_1 = 1$ 且 $a_1, a_2, a_3, \dots$ 為等差數列。請選出正確的選項。

- | | |
|---|---------------------------------------|
| (1) 若 $a_{100} > 0$ ，則 $a_{1000} > 0$ | (2) 若 $a_{100} < 0$ ，則 $a_{1000} < 0$ |
| (3) 若 $a_{1000} > 0$ ，則 $a_{100} > 0$ | (4) 若 $a_{1000} < 0$ ，則 $a_{100} < 0$ |
| (5) $a_{1000} - a_{10} = 10(a_{100} - a_1)$ | |



8. (2)(3)(5)