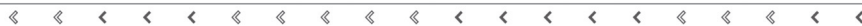


主題 14 數列級數綜合題型



例 1. (能力指標：等差拆項)

已知 $\langle a_k \rangle$ 為首項 $a_1 = 1$ 、公差 $d > 0$ 的等差數列，

若 $\frac{1}{a_1 a_2} + \frac{1}{a_2 a_3} + \cdots + \frac{1}{a_{13} a_{14}}$ 為整數，則公差 d 最小

的可能值為_____。

解：

UKAM



例 2. (能力指標：G.P.)

設 $\langle a_n \rangle$ 為一個首項不為 0 的等比數列，滿足 $2a_1 + a_2 = 0$ 且

$a_1 + a_2 + a_3 = 3$ ，則下列何者正確？

- (1) $a_1 = 2$ (2) 公比 $=\frac{1}{2}$ (3) $a_1 + a_2 + \cdots + a_9 = 170$
(4) $a_4 + a_5 + a_6 = -24$ (5) $a_2 + a_3 + a_4 = 14$

解：

FCJR



例 3. (能力指標：複利)



已知西瓜的成分分為水分和非水分，將某農場剛採收的西瓜送檢後發現，其中水分佔重量的99%，非水分佔重量的1%。

由以往的監測得知，西瓜採收後每經過一天，其水分會因為蒸發而減少為前一天的99%，非水分的部分則不會改變。若此農場採收 10000 公斤的西瓜，令 a_n 表示採收後經過 n 天的西瓜總重量(n 為正整數)。請選出下列正確的選項。

(1) $a_1 = 9801$ (公斤)

(2) $a_2 = a_1 \times \frac{99}{100} + 100$

(3) $a_{n+1} = \frac{99}{100}a_n + 1, n \geq 1$

(4) $a_n = \left(\frac{99}{100}\right)^{n+1} \times 10000 + 100$

(5) 若經過一段時間後發現這批西瓜的水分僅剩96%，則此時西瓜總重量為 2500 公斤

解：

例 4. (能力指標：數列)



設 $a_1, a_2, a_3, \dots$ 為一實數數列，且對所有的正整數 n 滿足

$a_{n+1} = 1^3 + 2^3 + 3^3 + \dots + n^3 - a_n$ 。請問下列哪些選項是正確的？

- (A) 如果 $a_1 = 1$ ，則 $a_2 = 0$
- (B) 如果 a_1 是奇數，則此數列中有可能出現連續兩項都是偶數
- (C) 如果 a_1 是無理數，則此數列的每一項都是無理數
- (D) $a_1 \leq a_3 \leq \dots \leq a_{2n+1} \leq \dots$ ，(n 為正整數)
- (E) 如果 a_k 是奇數，則 $a_{k+2}, a_{k+4}, \dots, a_{k+2n}, \dots$ 都是奇數(n 為正整數)

解：

例 5. (能力指標：費氏數列)



費氏數列 $\langle F_n \rangle$ ， $F_1 = F_2 = 1$ ， $F_{n+2} = F_{n+1} + F_n$ ($n \in \mathbb{N}$)，

若 F_a, F_b, F_c 三項成等差(公差為正)且 $a + b + c = 1001$ ，

則 $2a + b - 3c$ 的值為_____。

解：

例 6. (能力指標：遞迴數列)



數列 $\langle a_n \rangle$ 中， $a_1 = \frac{1}{2}$ ，且 $a_{n+1} - a_n = \frac{1}{n^2 + 2n} a_n$ 對所有正整數 n 都成立，則下列哪些選項是正確的？

(1) $\frac{a_{n+1}}{a_n} = \frac{(n+1)^2}{n(n+2)}$

(2) $a_{100} = \frac{100}{101}$

(3) $a_1 \times a_2 \times \cdots \times a_{100} = \frac{1}{101}$

(4) $a_n < a_{n+1}$ 對所有正整數 n 都成立

(5) $a_n < 1$ 對所有正整數 n 都成立

解：

例 7. (能力指標：遞迴關係)



有一數列

$$\langle a_1, a_2, a_3, a_4, \dots \rangle = \langle 12008, 120308, 1203308, \dots \rangle,$$

從第二項起的每一項均為在前一項的兩個 0 中間多放入一個 3 而得。試回答下列各問題：

(1) 若數列 $\langle a_n \rangle$ 中的每一項滿足遞迴關係式 $a_n = A \cdot a_{n-1} + B (n \geq 2)$ ，其中 A 、 B 為常數，則 A 、 B 之值各為多少？

(2) 試以數學歸納法證明：對於任何正整數 n ， a_n 一定是 19 的倍數。

解：

例 8. (能力指標：找規則)

設一數列 a_n ，滿足 $a_{n+2} = a_{n+1} - a_n$ ， $n \in N$ ，且 $a_{88} = 5$ ， $a_8 = 7$ ，
試求 $a_1 + a_2 + \cdots + a_{107} =$ _____。



解：

例 9. (能力指標：等差級數)

設等差數列 $\{a_n\}$ 的前 n 項和為 S_n ，若 $S_4 \geq 10$ ， $S_5 \leq 15$ ，則 a_4 的
最大值為

- (1) 2 (2) 3 (3) 4 (4) 5 (5) 6

解：



例 10. (能力指標：遞迴關係)

已知 $a_1 = \frac{1}{4} + \frac{1}{9^{10}}$, $2a_{n+1} - 6a_n + 1 = 0, \forall n \in \mathbb{N}$,

則 $a_{25} =$ _____。

解：



例 11. (能力指標：數列)

設 $\langle a_n \rangle$ 為一等差數列， $\langle b_n \rangle$ 為一等比數列， m 、 k 為任意自然數，請選出下列敘述為真的選項：

(1) 若 $m = k + 3$ ，則 $a_2 + a_m = a_5 + a_k$

(2) 若 $m = k + 3$ ，則 $b_2 \times b_m = b_5 \times b_k$

(3) $3a_4 = a_2 + a_3 + a_7$

(4) $b_2 = \sqrt{b_1 \times b_3}$

(5) 此兩數列不可能是相同的數列

解：



例 12. (能力指標：相消級數)



小沂走進教室，發現黑板上寫了

121, 144, 169, 196, 225, $\dots$, 361, 400 共 10 個連續的完全

平方數，於是他把每個數字減去 1，改成

120, 143, 168, 195, 224, $\dots$, 360, 399。

之後小風走進來，又把每個數字改為倒數，變成

$\frac{1}{120}, \frac{1}{143}, \frac{1}{168}, \frac{1}{195}, \frac{1}{224}, \dots, \frac{1}{360}, \frac{1}{399}$ 。試求

(1) 小沂所寫的 10 個數字的總和為 _____。

(2) 小風所寫的 10 個數字的總和為 _____。

解：

例 13. (能力指標：Fractal 碎形)



如右圖，給定一個邊長為 2 的正方形，依下列步驟將其分割著色：

步驟 1：將其等分成 4 個正方形，並將左下角的正方形塗成灰色，
得到圖 1

步驟 2：將圖 1 中剩下的 3 個未塗色的正方形分別再等分成 4 個正方形，
並將其左下角的正方形塗成灰色，得到圖 2

依照此規律繼續分割與著色，並設 a_n 表示圖 n 中灰色正方形的總面積，
例如 $a_1 = 1$ ，關於數列 $\langle a_n \rangle$ ，選出正確的選項。

(1) $a_n = \left(\frac{7}{4}\right)^{n-1}, n \geq 1$

(2) $a_n = \frac{3n+1}{4}, n \geq 1$

(3) $a_n = 4 \left[1 - \left(\frac{3}{4}\right)^n \right], n \geq 1$

(4) $\begin{cases} a_1 = 1 \\ a_{n+1} = a_n + 3^n, n \geq 1 \end{cases}$

(5) $\begin{cases} a_1 = 1 \\ a_{n+1} = a_n + \left(\frac{3}{4}\right)^n, n \geq 1 \end{cases}$

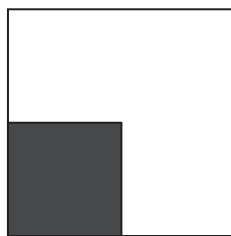


圖 1

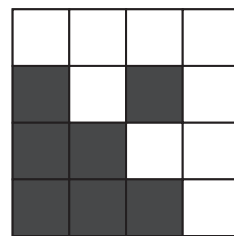


圖 2

解：

數列級數綜合題型解析

1.【答】： $\frac{1}{156}$

【解】：1° $\frac{1}{a_1} - \frac{1}{a_2} = \frac{a_2 - a_1}{a_1 a_2} = \frac{d}{a_1 a_2} \Rightarrow \frac{1}{a_1 a_2} = \frac{1}{d} \left(\frac{1}{a_1} - \frac{1}{a_2} \right)$

$$\begin{aligned} 2^\circ & \frac{1}{a_1 a_2} + \frac{1}{a_2 a_3} + \cdots + \frac{1}{a_{13} a_{14}} \\ &= \frac{1}{d} \left[\left(\frac{1}{a_1} - \frac{1}{a_2} \right) + \left(\frac{1}{a_2} - \frac{1}{a_3} \right) + \cdots + \left(\frac{1}{a_{13}} - \frac{1}{a_{14}} \right) \right] \\ &= \frac{1}{d} \left(\frac{1}{a_1} - \frac{1}{a_{14}} \right) = \frac{1}{d} \left(1 - \frac{1}{1+13d} \right) = \frac{1}{d} \cdot \frac{13d}{1+13d} = \frac{13}{1+13d} \end{aligned}$$

3° 欲求 d 最小 $\Rightarrow 1+13d$ 最小 $\Rightarrow \frac{13}{1+13d}$ 最大

令 $\frac{13}{1+13d} = 12 \Rightarrow 13 = 12 + 156d \Rightarrow d = \frac{1}{156}$

2.【答】：(4)

【解】：1° $2a_1 + a_2 = 0 \Rightarrow a_2 = -2a_1 \Rightarrow r = -2$

2° $a_1 + a_2 + a_3 = 3 \Rightarrow a_1 - 2a_1 + 4a_1 = 3 \Rightarrow 3a_1 = 3 \Rightarrow a_1 = 1$

(3) $a_1 + a_2 + \cdots + a_9 = \frac{a_1(1-r^9)}{1-r} = \frac{1-(-2)^9}{3} = \frac{2^9+1}{3} = 171$

(4) $a_4 + a_5 + a_6 = r^3 + r^4 + r^5 = -8 + 16 - 32 = -24$

(5) $a_2 + a_3 + a_4 = r + r^2 + r^3 = -2 + 4 - 8 = -6$

3.【答】：(3)(4)

【解】：1° 依題意 $a_n = 10000 \times \frac{1}{100} + 100000 \times \frac{99}{100} \times \left(\frac{99}{100} \right)^n$

$$= 100 + 10000 \times \left(\frac{99}{100} \right)^{n+1}$$

2° $a_1 = 100 + 9801 = 9901$

3° $a_2 = (a_1 - 100) \times \frac{99}{100} + 100 = \frac{99}{100} a_1 + 1$

4° $a_{n+1} = (a_n - 100) \times \frac{99}{100} + 100 = \frac{99}{100} a_n + 1$

5° $a_n = 100 + 100000 \times \frac{99}{100} \times 96\% = 100 + 99 \times 96 = 9604$

4.【答】：(A)(C)(D)

【解】：原式 $\Rightarrow a_{n+1} = \left[\frac{n(n+1)}{2}\right]^2 - a_n$

(A) $a_2 = \left[\frac{1 \times 2}{2}\right]^2 - 1 = 0$

(B) 令 $\langle b_n \rangle = \left[\frac{n(n+1)}{2}\right]^2$ ：若 b_n 為偶數，則 $\frac{n(n+1)}{2}$ 為偶數

$\Rightarrow n(n+1)$ 為 4 的倍數 $\Rightarrow n = 4k, 4k-1 (k \in N)$

$\therefore b_{4k}, b_{4k-1}$ 為偶數， b_{4k-2}, b_{4k-3} 為奇數 $\Rightarrow$ 奇偶性為四項一循環

$$\Rightarrow \begin{cases} a_2 = 1 - a_1 \Rightarrow a_2 \text{ 為偶數} \\ a_3 = 9 - a_2 \Rightarrow a_3 \text{ 為奇數} \\ a_4 = 36 - a_3 \Rightarrow a_4 \text{ 為奇數} \\ a_5 = 100 - a_4 \Rightarrow a_5 \text{ 為奇數} \end{cases} \Rightarrow \text{不可能連續出現兩項偶數}$$

(C) 承上，數列 $\langle b_n \rangle$ 的每一項皆為有理數，故正確

(D) $a_{n+1} + a_n = \left[\frac{n(n+1)}{2}\right]^2$

$\rightarrow a_{n+2} + a_{n+1} = \left[\frac{(n+1)(n+2)}{2}\right]^2$

$$a_{n+2} - a_n = (n+1)^3 \Rightarrow \langle a_n \rangle \text{ 為遞增數列}$$

(E) 承上，若 k 為偶數；則 a_{k+2} 為偶數

5.【答】：-7

【解】：
$$F_{n+2} = F_{n+1} + F_n$$

$$+) F_{n+2} + F_{n+1} = F_{n+3}$$

$$2F_{n+2} = F_{n+3} + F_n$$

$$\Rightarrow F_{n+2} = \frac{F_n + F_{n+3}}{2}$$
 可知 F_n, F_{n+2}, F_{n+3} 成等差

令 $a = n, b = n+2, c = n+3$

且 $n + n+2 + n+3 = 1001 \Rightarrow n = 332$

故 $2a + b - 3c = 2n + n+2 - 3n-9 = -7$

6.【答】：(1)(2)(3)(4)(5)

$$\text{【解】：(1) } a_{n+1} - a_n = \frac{1}{n^2 + 2n} a_n \Rightarrow a_{n+1} = \frac{n^2 + 2n + 1}{n^2 + 2n} a_n = \frac{(n+1)^2}{n(n+2)} a_n$$

$$\Rightarrow \frac{a_{n+1}}{a_n} = \frac{(n+1)^2}{n(n+2)}$$

$$(2) a_2 = \frac{2 \cdot 2}{1 \cdot 3} a_1 = \frac{2 \cdot 2}{1 \cdot 3} \cdot \frac{1}{2} = \frac{2}{3}, a_3 = \frac{3 \cdot 3}{2 \cdot 4} a_2 = \frac{3 \cdot 3}{2 \cdot 4} \cdot \frac{2}{3} = \frac{3}{4}$$

$$\text{依此類推可得 } a_n = \frac{n}{n+1}$$

$$\therefore a_{100} = \frac{100}{101}$$

$$(3) a_1 \times a_2 \times \cdots \times a_{99} \times a_{100} = \frac{1}{2} \times \frac{2}{3} \times \cdots \times \frac{99}{100} \times \frac{100}{101} = \frac{1}{101}$$

$$(4) \text{假分數越加越大} \Rightarrow a_n < a_{n+1}$$

$$(5) a_n = \frac{n}{n+1} < 1$$

7.【答】：(1) $A=10, B=228$ (2) 略

$$\text{【解】：(1) } \begin{cases} 120308 = 12008A + B \\ 1203308 = 120308A + B \end{cases} \Rightarrow A=10, B=228$$

(2) $1^\circ n=1$ 時, $a_1 = 12008 = 19 \times 632$ 為 19 的倍數

2° 設 $n=k$ ($k \in \mathbb{N}$) 時, a_k 為 19 的倍數, 令 $a_k = 19t, t \in \mathbb{N}$

$$\text{當 } n=k+1 \text{ 時, } a_{k+1} = 10 \cdot a_k + 228 = 10 \cdot 19t + 19 \cdot 12 = 19(10t + 12)$$

$\therefore a_{k+1}$ 亦為 19 的倍數

由數學歸納法知, 對於所有正整數 n , a_n 必為 19 的倍數

8.【答】：12

$$\text{【解】：} 1^\circ a_{n+2} = a_{n+1} - a_n \Rightarrow \begin{array}{ccccccc|cc} & \overbrace{a_1 \ a_2 \ a_3 \ a_4 \ a_5 \ a_6}^{6 \text{ 個一循環}} & & & & & & a_7 & a_8 \\ \bullet & \bullet & \bullet & \bullet & \bullet & \bullet & & \bullet & \bullet \\ a & b & b-a & -a & -b & a-b & | & a & b \end{array}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} a_{88} = 5 \\ a_8 = 7 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a_{6 \times 14 + 4} = a_4 = -a = 5 \\ a_{6 \times 1 + 2} = a_2 = b = 7 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a = -5 \\ b = 7 \end{cases}$$

$$\begin{aligned} 2^\circ a_1 + a_2 + \cdots + a_{107} &= \overbrace{(a_1 + \cdots + a_6) + (a_7 + \cdots + a_{12}) + \cdots + (a_{101} + \cdots + a_{106})}^{17 \text{ 組}} + (\text{五項和}) \\ &= b - a = 7 - (-5) = 12 \end{aligned}$$

9.【答】：(3)

$$\begin{aligned} \text{【解】：} 1^\circ & \begin{cases} (2a_1 + 3d) \frac{4}{2} \geq 10 \\ (2a_1 + 4d) \frac{5}{2} \leq 15 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 2a_1 + 3d \geq 5 \\ 2a_1 + 4d \leq 6 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} -2a_1 - 3d \leq -5 & (\text{乘 } k > 0) \\ 2a_1 + 4d \leq 6 & (\text{乘 } m > 0) \end{cases} \\ & \text{得 } \begin{cases} -2k + 2m = 1 \\ -3k + 4m = 3 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} k = 1 \\ m = \frac{3}{2} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} -2a_1 - 3d \leq -5 \\ 3a_1 + 6d \leq 9 \end{cases} \\ & \Rightarrow a_1 + 3d \leq 4 \Rightarrow a_4 \leq 4 \end{aligned}$$

10.【答】： $\frac{325}{4}$

$$\text{【解】：} 2a_{n+1} - 6a_n + 1 = 0 \Rightarrow a_{n+1} = 3a_n - \frac{1}{2}$$

$$\text{令 } (a_{n+1} - \alpha) = 3(a_n - \alpha) \Rightarrow a_{n+1} = 3a_n - 2\alpha \Rightarrow \alpha = \frac{1}{4}$$

$\langle a_{n+1} - \frac{1}{4} \rangle$ 為公比 3 的等比數列

$$\Rightarrow a_{25} - \frac{1}{4} = (a_1 - \frac{1}{4}) \times 3^{24}$$

$$\Rightarrow a_{25} = (\frac{1}{4} + \frac{1}{3^{20}} - \frac{1}{4}) \times 3^{24} + \frac{1}{4} = 81 + \frac{1}{4} = \frac{325}{4}$$

11. 【答】：(1)(2)(3)

【解】：(1) 令公差為 d ，公比為 r

若 $m = k + 3$

$$a_2 + a_m = a_1 + d + a_1 + (m-1)d = 2a_1 + md = 2a_1 + (k+3)d$$

$$a_5 + a_k = a_1 + 4d + a_1 + (k-1)d = 2a_1 + (k+3)d \quad \text{正確}$$

(2) 若 $m = k + 3$

$$b_2 \times b_m = b_1 \cdot r \times b_1 \cdot r^{m-1} = b_1^2 \cdot r^m = b_1^2 \cdot r^{k+3}$$

$$b_5 \times b_k = b_1 \cdot r^4 \times b_1 \cdot r^{k-1} = b_1^2 \cdot r^{k+3} \quad \text{正確}$$

$$(3) a_2 + a_3 + a_7 = a_1 + d + a_1 + 2d + a_1 + 6d = 3(a_1 + 3d) = 3a_4 \quad \text{正確}$$

$$(4) b_2^2 = b_1 \times b_3 \Rightarrow b_2 = \pm \sqrt{b_1 \times b_3} \quad \text{錯誤}$$

$$(5) \text{若 } a_1 = 1, d = 0, b_1 = 1, r = 1 \text{ 兩數列相同, 錯誤}$$

12.【答】：(1) 2475 (2) $\frac{431}{9240}$

【解】：(1) $(11^2 - 1) + (12^2 - 1) + \cdots + (20^2 - 1)$
 $= (11^2 + 12^2 + \cdots + 20^2) - 10$
 $= (1^2 + 2^2 + \cdots + 20^2) - (1^2 + 2^2 + \cdots + 10^2) - 10$
 $= \frac{1}{6} \cdot 20 \cdot 21 \cdot 41 - \frac{1}{6} \cdot 10 \cdot 11 \cdot 21 - 10$
 $= 2475$

(2) $\frac{1}{11^2 - 1} + \frac{1}{12^2 - 1} + \cdots + \frac{1}{20^2 - 1}$
 $= \frac{1}{(11-1)(11+1)} + \frac{1}{(12-1)(12+1)} + \cdots + \frac{1}{(20-1)(20+1)}$
 $= \frac{1}{2} \left[\left(\frac{1}{10} - \frac{1}{12} \right) + \left(\frac{1}{11} - \frac{1}{13} \right) + \cdots + \left(\frac{1}{19} - \frac{1}{21} \right) \right]$
 $= \frac{1}{2} \left(\frac{1}{10} + \frac{1}{11} - \frac{1}{20} - \frac{1}{21} \right)$
 $= \frac{431}{9240}$

13.【答】：(3)(5)

【解】： $1^\circ a_1 = 1$

$$a_2 = a_1 + 3 \times \left(\frac{1}{2} \right)^2 = a_1 + \frac{3}{4}$$

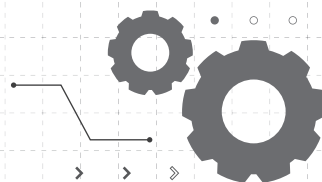
$$a_3 = a_2 + 3^2 \times \left(\frac{1}{2^2} \right)^2 = a_2 + \left(\frac{3}{4} \right)^2$$

$\vdots$

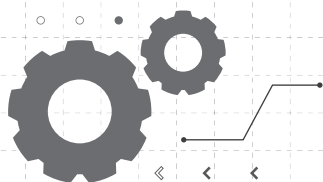
$$a_n = a_{n-1} + 3^{n-1} \times \left(\frac{1}{2^{n-1}} \right)^2 = a_{n-1} + \left(\frac{3}{4} \right)^{n-1}$$

$$\begin{aligned} \Rightarrow a_n &= 1 + \left(\frac{3}{4} \right) + \cdots + \left(\frac{3}{4} \right)^{n-1} = 1 + \frac{\frac{3}{4} [1 - (\frac{3}{4})^{n-1}]}{1 - \frac{3}{4}} \\ &= 1 + 3 [1 - (\frac{3}{4})^{n-1}] = 4 - \frac{3^n}{4^{n-1}} = 4 - 4 \times \left(\frac{3}{4} \right)^n \\ &= 4 [1 - (\frac{3}{4})^n] \end{aligned}$$

心得欄



心得欄





(一) 康托集的數學

康托(Georg Cantor)是 19 世紀末 20 世紀初德國偉大的數學家，集合論的創立者。一個知名的例子是康托集(Cantor set)，這是康托在 1883 年介紹的一種點集。建構康托集的方法非常簡單。首先將 $[0, 1]$ 挖掉中間



$(\frac{1}{3}, \frac{2}{3})$ 的區域，再將剩下的兩個區間 $[0, \frac{1}{3}]$ 和 $[\frac{2}{3}, 1]$ 挖掉其中三分之一等分的中間區間，及挖掉 $(\frac{1}{9}, \frac{2}{9})$ 和 $(\frac{7}{9}, \frac{8}{9})$ 。然後以此類推，一直不斷執行挖掉的操作，最後剩下的集合稱為康托集。設總長度為 1，若 n 次步驟後挖掉長度總和

為 a_n ，其遞迴關係式為
$$\begin{cases} a_1 = \frac{1}{3} \\ a_n = x \cdot a_{n-1} + y \quad (n \geq 2) \end{cases}$$
，其中 x, y 是常數，求

$(x, y) = \underline{\hspace{2cm}}$ 。



常用公式

$-$ $+$ $\%$ $=$ Σ π ∞ $\sqrt{\quad}$



公式 1 等差(AP)

$$(1) a_n = a_1 + (n-1)d = a_p + (n-p)d$$

$$(2) S_n = (a_1 + a_n) \frac{n}{2} = [2a_1 + (n-1)d] \frac{n}{2}$$

$$(3) S_n, S_{2n} - S_n, S_{3n} - S_{2n} \text{ 成等差}$$

公式 2 等比(GP)

$$(1) a_n = a_1 \cdot r^{n-1} = a_p \cdot r^{n-p}$$

$$(2) S_n \begin{cases} na_1 & (r=1) \\ = \frac{a_1(1-r^n)}{1-r} = \frac{a_1(r^n-1)}{r-1} & (r \neq 1) \end{cases}$$

$$(3) S_n, S_{2n} - S_n, S_{3n} - S_{2n} \text{ 成等比}$$

公式 3 常用的級數總和公式

$$(1) \sum_{k=1}^n k = 1 + 2 + 3 + \cdots + n = \frac{n(n+1)}{2}$$

$$(2) \sum_{k=1}^n k^2 = 1^2 + 2^2 + 3^2 + \cdots + n^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$$

$$(3) \sum_{k=1}^n k^3 = 1^3 + 2^3 + 3^3 + \cdots + n^3 = \left[\frac{n(n+1)}{2} \right]^2$$

$$(4) \sum_{k=1}^n k(k+1) = 1 \cdot 2 + 2 \cdot 3 + \cdots + n(n+1) = \frac{n(n+1)(n+2)}{3}$$

$$(5) 1 \cdot n + 2 \cdot (n-1) + \cdots + (n-1) \cdot 2 + n \cdot 1 = \frac{n(n+1)(n+2)}{6}$$

公式 4 相消法則

$$(1) \frac{1}{k(k+1)} = \left(\frac{1}{k} - \frac{1}{k+1} \right)$$

$$(2) \frac{1}{k(k+1)(k+2)} = \frac{1}{2} \left[-\frac{1}{k(k+1)} - \frac{1}{(k+1)(k+2)} \right]$$

$$(3) \frac{1}{4k^2 - 1} = \frac{1}{(2k-1)(2k+1)} = \frac{1}{2} \left(\frac{1}{2k-1} - \frac{1}{2k+1} \right)$$

$$(4) \frac{1}{\sqrt{k+1} + \sqrt{k}} = (\sqrt{k+1} - \sqrt{k})$$

公式 5 a_n 求法

$$(1) \text{等差數列} : a_n = a_1 + (n-1)d$$

$$(2) \text{等比數列} : a_n = a_1 r^{n-1}$$

$$(3) S_n \text{ 理論} : \begin{cases} \text{① } a_1 = S_1 \\ \text{② } a_n = S_n - S_{n-1} \quad (n \geq 2) \end{cases}$$

$$(4) \text{二項遞迴} : a_{n+1} = pa_n + q \Rightarrow a_n = A + B \times p^n$$