

主題 13 等比幾何應用



《 《 < < < 《 《 《 《 《 < < < < 《 《 《 < <

例 1. (能力指標：幾何應用)

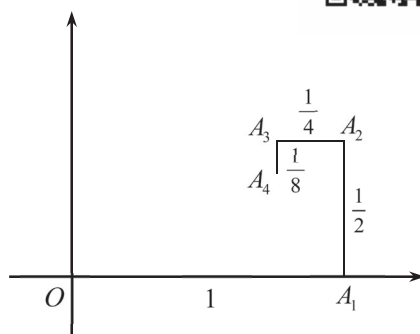
如圖， $\overline{OA_1} = 1$ ， $\overline{A_1A_2} = \frac{1}{2}$ ， $\overline{A_2A_3} = \frac{1}{4}$ ， $\dots$ ，求 A_{10} 坐標。

UQIX



解： (1) x 坐標 =

(2) y 坐標 =



例 2. (能力指標：幾何應用)

有長為 1 的繩子一條，切取 $\frac{2}{3}$ 為周長作一正三角形，令其面積為 S_1 ；從餘下的 $\frac{1}{3}$ 中切取 $\frac{2}{3}$ 為周長作第二個三角形，令其面積為 S_2 ；如此繼續為之，求 $S_1, S_2, S_3, \dots, S_n$ 的總和。

FVUQ



解： 1° 第一個三角形周長 = $\frac{2}{3}$ ，邊長 = $\frac{2}{9}$ ，面積 $S_1 = \frac{\sqrt{3}}{4}(\frac{2}{9})^2$

第二個三角形周長 = $\frac{2}{9}$ ，邊長 = $\frac{2}{27}$ ，面積 $S_2 = \frac{\sqrt{3}}{4}(\frac{2}{27})^2$

2° $S_1 + S_2 + S_3 + \dots + S_n$

$$= \frac{\frac{\sqrt{3}}{4}(\frac{2}{9})^2[1-(\frac{1}{9})^n]}{1-\frac{1}{9}}$$

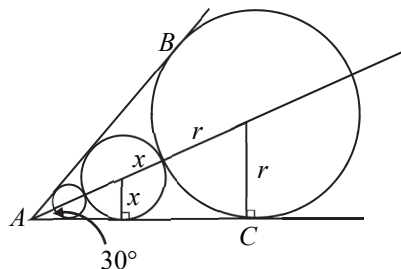
例 3. (能力指標：幾何應用)

如圖： $\angle BAC = 60^\circ$ ，最大圓 S_1 的面積為 1,000 平方公分，
求圓 $S_1, S_2, S_3, \dots, S_n$ 面積的總和。



解：1° 令最大圓半徑 r ，第二圓半徑 x

$\Rightarrow$



$$2^\circ S_1 + S_2 + S_3 + \dots + S_n$$

=

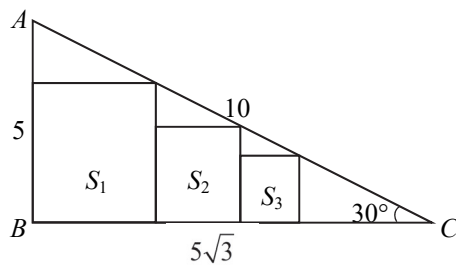
例 4. (能力指標：幾何應用)

如圖： $\triangle ABC$ 為直角 $\triangle$ ， $\angle C = 30^\circ$ ， $\overline{AC} = 10$ ， $S_1, S_2, S_3, \dots, S_n$
分別表內接正方形面積，試求 n 個內接正方形面積總和。



解：1° 令 S_1 邊長為 x

則



2° n 個正方形邊長為

$$\therefore S_1 + S_2 + S_3 + S_4 + \dots + S_n$$

=

例 5. (能力指標：幾何應用)



如圖，設銳角 $\triangle ABC$ 之底邊 $\overline{BC} = 5$ ，頂點 A 至 $\overline{BC}$ 之距離 12。
今於 $\overline{BC}$ 邊上作內接於 $\triangle ABC$ 之正方形，再作內接於 $\triangle AB'C'$ 之正方形....，求 n 個正方形之面積總和。

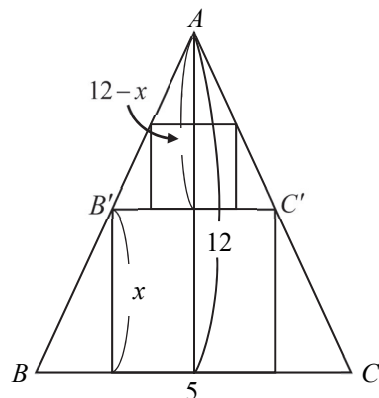
解：1° 令最大正方形邊長 x

$$\Rightarrow \frac{12}{5} = \frac{12-x}{x} \Rightarrow 60-5x=12x$$

$$\Rightarrow x = \frac{60}{17} = 5 \times \underbrace{\frac{12}{17}}_{\text{為縮小公比}}$$

2° n 個正方形邊長為

面積和=



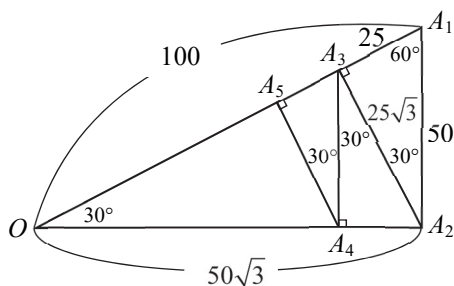
例 6. (能力指標：幾何應用)



如圖， $\triangle OA_1A_2$ 為直角 $\triangle$ ， $\angle A_2 = 90^\circ$ ， $\angle A_1OA_2 = 30^\circ$ ， $\overline{OA_1} = 100$ ， A_2 往 $\overline{OA_1}$ 作垂線得垂足 A_3 ， A_3 往 $\overline{OA_2}$ 作垂線得垂足 A_4 ，如此繼續作下去，求 $\overline{A_1A_2} + \overline{A_2A_3} + \overline{A_3A_4} + \cdots + \overline{A_nA_{n+1}}$ 的總和。

解： $\overline{A_1A_2} + \overline{A_2A_3} + \cdots + \overline{A_nA_{n+1}}$

=



例 7. (能力指標：幾何應用)

SDZS



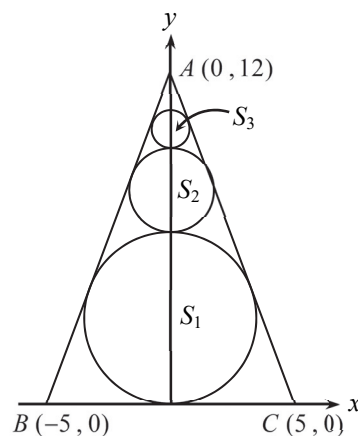
如右圖，在 $\triangle ABC$ 中作內切圓 S_1 ，再作圓 S_2 切圓 S_1 以及 $\overline{AB}$ ， $\overline{AC}$ 兩邊，再作圓 S_3 切圓 S_2 以及 $\overline{AB}$ ， $\overline{AC}$ 兩邊。

如此繼續作下去，得圓序列 $S_1, S_2, S_3, \dots$ ；設其面積分別為 $A_1, A_2, A_3, \dots, A_n$ 。

(1) 求 A_1 。

(2) 求級數 $A_1 + A_2 + A_3 + \dots + A_n$ 之和。

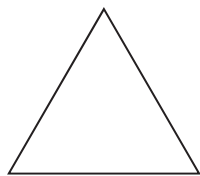
解：



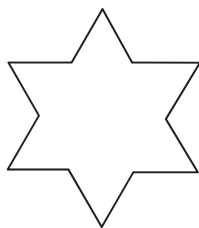
例 8. (能力指標：碎形)



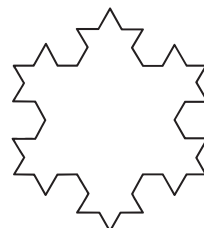
設 $T_1, T_2, T_3, \dots$ 為一群多邊形，其作法如下： T_1 為邊長等於 1 的正三角形；以 T_n 每一邊中間三分之一的線段為一邊向外作正三角形，然後將該三分之一線段抹去所得的多邊形為 T_{n+1} ， $n=1, 2, \dots$ (如圖所示)。令 a_n 表 T_n 的周長，請計算 T_3 的面積及 $\sum_{i=1}^n \frac{1}{a_i}$ 之和。



T_1



T_2



T_3

解：

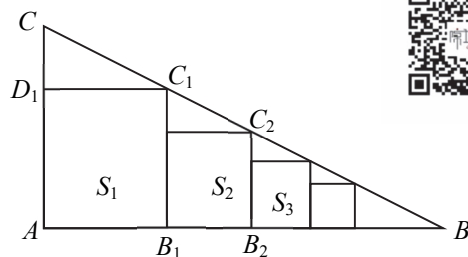


回家作業



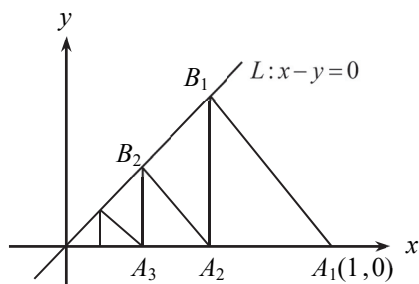
1. $\triangle ABC$ 是直角三角形，已知

$\overline{AB} = 24$, $\overline{AC} = 16$ ，在 $\triangle ABC$ 內作一個內接正方形 $AB_1C_1D_1$ ，其面積為 S_1 ，再在 $\triangle B_1BC_1$ 內作第二個內接正方形 $B_1B_2C_2D_2$ ，其面積為 S_2 ，仿此繼續進行，求 n 個正方形面積的和。



2. 在坐標平面上， $L: x - y = 0$ ，由點 $A_1(1, 0)$ 作 L 的垂線，交於 B_1 ，再由 B_1 作 x 軸的垂線，交於 A_2 ，又再由 A_2 作 L 的垂線，交於 B_2 ，如圖，依此類推，繼續得到 $A_3, B_3, A_4, B_4, \dots$ ，求級數

$\overline{A_1B_1} + \overline{B_1A_2} + \overline{A_2B_2} + \overline{B_2A_3} + \overline{A_3B_3} + \dots + \overline{A_nB_n} + \overline{B_nA_{n+1}}$ 之和。



簡答

1. $144 \left[1 - \left(\frac{9}{25} \right)^n \right]$ 2. $(\sqrt{2} + 1) - (\sqrt{2} + 1) \left(\frac{1}{2} \right)^n$



回家作業



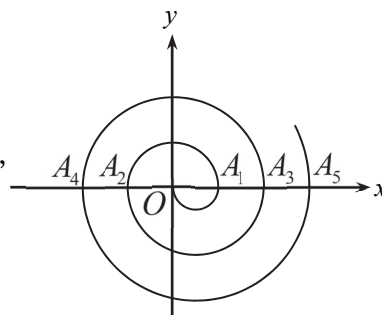
3. 有一隻烏龜由原點出發，其行走留下的軌跡

如右圖所示，設 A_1 的坐標為 $(1, 0)$ ， A_2 的坐標

為 $(-1, 0)$ ， A_3 的坐標為 $(2, 0)$ ， A_4 的坐標為

$(-2, 0)$ ，(每個 $\widehat{A_k A_{k+1}}$ 均為半圓， $k = 0, 1, 2, \dots$ ，

又 A_0 為 O 點)



(1) A_{2n} 的坐標為何？

(2) A_{2n+1} 的坐標為何？

(3) 烏龜由原點到點 A_{2n} 所行走留下的軌跡長度為何？



3. (1) $(-n, 0)$ (2) $(n+1, 0)$ (3) $\frac{n(2n+1)\pi}{2}$