

型二 除式為 $(x-a)^k$

IALQ



例 1. $f(x) = x^7 + 1$ ，求 $f(x)$ 除以 $(x-1)^2$ 之餘式？

解：1° 令 $f(x) = x^7 + 1 = (x-1)(x-1)q(x) + \overset{\text{一次式}}{a(x-1)+b}$ ← 除式為組合
餘式用除式表示

2° 令 $x=1$ 代入 $f(1) = 2 = b$

3° $\Rightarrow x^7 + 1 = (x-1)^2 q(x) + a(x-1) + 2$

$$\Rightarrow x^7 - 1 = (x-1)^2 q(x) + a(x-1)$$

$$\Rightarrow x^6 + x^5 + x^4 + x^3 + x^2 + x + 1 = (x-1)q(x) + a$$

$x=1$ 代入得 $7 = a$

餘式 $= 7(x-1) + 2 = 7x - 5$

(註)

(1) $x^2 - 1 = (x-1)(x+1)$

(2) $x^3 - 1 = (x-1)(x^2 + x + 1)$

(3) $x^4 - 1 = (x-1)(x^3 + x^2 + x + 1)$

(4) $x^5 - 1 = (x-1)(x^4 + x^3 + x^2 + x + 1)$

(5) $x^6 - 1 = (x-1)(x^5 + x^4 + x^3 + x^2 + x + 1)$

(6) $x^7 - 1 = (x-1)(x^6 + x^5 + x^4 + x^3 + x^2 + x + 1)$

型三 被除式為 $[p(x)]^k$

例 1. $f(x) = (x^3 - 3x - 5)^3$ 除以 $(x^2 + 2x + 2)$ ，求餘式？

解： $f(x) = (x^3 - 3x - 5)^3$

$$\begin{aligned} &= [\underbrace{(x-2)(x^2+2x+2)} + \underbrace{(-x-1)}]^3 \\ &= (x-2)^3(x^2+2x+2)^3 + 3(x-2)^2(x^2+2x+2)^2(-x-1) \\ &\quad + 3(x-2)(x^2+2x+2)(-x-1)^2 + (-x-1)^3 \\ &= (x^2+2x+2)Q(x) + (-x-1)^3 \\ &= (x^2+2x+2)Q(x) + (x^2+2x+2)(-x-1) + (x+1) \\ &= (x^2+2x+2)[Q(x) + (-x-1)] + (x+1) \\ \therefore \text{餘式} &= x+1 \end{aligned}$$



型四 除式為二項式

例 1. $f(x) = x^5 + 2x^4 - 3x^3 + x^2 + 5x + 1$ 除以 $x^2 + 1$ ，求餘式？

解：1° 令 $x^5 + 2x^4 - 3x^3 + x^2 + 5x + 1 = (x^2 + 1)q(x) + \boxed{r(x)}$

2° 令 $x^2 = -1$ 代入左式右式化簡得

右式 $= r(x)$

左式 $=$



結論：由以上方法分析遇到除式為二項式

可直接令除式為 0，代入左右式進行化簡，其結果即為餘式

例 2. $f(x)=x^3+2x-1$, $g(x)=x^2+4x+1$, $h(x)=x^4+x^2+1$

$f(x^3)+g(x^3)x+h(x^3)x^2$ 去除以 x^3-1 ，求餘式？

解： 1° 令 $f(x^3)+g(x^3)x+h(x^3)x^2=(x^3-1)q(x)+r(x)$

2° 令 $x^3=1$ 代入左右化簡得

右式= $r(x)$

左式=

UKCK



例 3. $f(x)=x^{1987}+2x^{1980}-3x^{799}$ 去除以 x^4-x^2 ，求餘式？

解： 1° $f(x)=x^{1987}+2x^{1980}-3x^{799}=(x^4-x^2)q(x)+r(x)$

$$2^\circ \text{ 令 } \begin{cases} x^4 = x^2 \\ x^5 = x^3 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x^6 = x^4 = x^2 \\ x^7 = x^3 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x^{2k} = x^2 \\ x^{2k+1} = x^3 \end{cases}$$

代入左式右式化簡得

右式= $r(x)$

左式=

IMHZ



型五 除式為降冪規則

例 1. $f(x) = x^{32} - 3x^{25} + 3x^{14} - 4x^7 + 5x^6$ ，求 $f(x) \div (x^2 + x + 1)$ 之餘式？

解：1° $x^{32} - 3x^{25} + 3x^{14} - 4x^7 + 5x^6 = (x^2 + x + 1)q(x) + r(x)$

$$2^\circ \text{ 令 } \begin{cases} x^2 + x + 1 = 0 \\ (x-1)(x^2 + x + 1) = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x^2 + x + 1 = 0 \\ x^3 = 1 \end{cases} \quad \text{代入左右化簡}$$

右式 = $r(x)$

左式 =



例 2. 求 $13^{10} - 2 \times 13^2 + 1$ 除以 $13^4 - 13^2 + 1$ 之餘式？

解：1° $x^{10} - 2x^2 + 1 = (x^4 - x^2 + 1)q(x) + r(x)$

$$2^\circ \text{ 令 } \begin{cases} x^4 - x^2 + 1 = 0 \\ (x^2 + 1)(x^4 - x^2 + 1) = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x^4 - x^2 + 1 = 0 \\ x^6 = -1 \end{cases} \quad \text{代入左右化簡得}$$

右式 = $r(x)$

左式 = $-x^4 - 2x^2 + 1 \equiv -3x^2 + 2 = -505$

但餘數不可為負，故餘數為 $(13^4 - 13^2 + 1) - 505 = 27888$

