

主題

4

綜合除法與多項式變形

應用 1 連續綜合除法

CMHY



例： $f(x) = 8x^3 - 4x^2 - 12x + 1$

(1) 將 $f(x)$ 表成 $(x-1)$ 的多項式。

(2) 將 $f(x)$ 表成 $(2x-1)$ 的多項式。

解：(1) $8x^3 - 4x^2 - 12x + 1 = a_3(x-1)^3 + a_2(x-1)^2 + a_1(x-1) + a_0$

8	-4	-12	1	
8	4	-8	1	
8	4	-8	-7	← 商式 = $a_1 + a_2(x-1) + a_3(x-1)^2$ ，餘式 = a_0
8	12			
8	12	4		← 商式 = $a_2 + a_3(x-1)$ ，餘式 = a_1
8				
8			20	← 商式 = a_3 ，餘式 = a_2

(2) $8x^3 - 4x^2 - 12x + 1 = b_3(2x-1)^3 + b_2(2x-1)^2 + b_1(2x-1) + b_0$

8	-4	-12	1	

《結論》多項式 $f(x)$ 可表成任何其他型式的降幂或升幂型式

應用 2 逐一減項



例： $f(x) = x^3 - 2x^2 + x + 1$

$$= a(x-1)(x-2)(x-3) + b(x-1)(x-2) + c(x-1) + d,$$

求 a, b, c, d ?

解： **法 1** 代入數值法

$$x^3 - 2x^2 + x + 1 = a(x-1)(x-2)(x-3) + b(x-1)(x-2) + c(x-1) + d$$

觀察：求 $d \Rightarrow x=1$ 代入，得 $d=1$

求 $c \Rightarrow x=2$ 代入，得 $c+1=3 \therefore c=2$

求 $b \Rightarrow x=3$ 代入，得 $b=4$

求 $a \Rightarrow$ 可不要代入數值，直接用比較 x^3 係數，得 $a=1$

法 2 連續綜合除法

$$x^3 - 2x^2 + x + 1 = a(x-1)(x-2)(x-3) + b(x-1)(x-2) + c(x-1) + d$$

1	-2	1	1		
	1	-1	0	1	2
1	-1	0	1		
	2	2			

商式 = $a(x-2)(x-3) + b(x-2) + c$,
餘式 $d=1$

1	1				
	3				

商式 = $a(x-3) + b$, 餘式 $c=2$

1					
	4				

商式 = a , 餘式 $b=4$

應用 3 整數求值 $\Rightarrow$ _____

例：試計算： $7^4 - 6 \times 7^3 - 4 \times 7^2 - 19 \times 7 - 11$ 之值

解：1° 本題可轉化成

令 $f(x) = x^4 - 6x^3 - 4x^2 - 19x - 11$ ，求 $f(7)$

2° 利用餘式定理： $f(x) = (x-7)q(x) + r$

$f(7) = r \quad \therefore$ 直接求餘式即可

$$\begin{array}{r|rrrrr} 1 & -6 & -4 & -19 & -11 & \\ \hline & & & & & 7 \end{array}$$

應用 4 小數求近似值 $\Rightarrow$ _____

例： $f(x) = x^3 - x + 2$ ，求 $f(-0.99)$ 之值估計到小數第二位

解：1° 觀察：令 $x = -0.99 \Rightarrow x+1 = 0.01$

2° 將多項式表成 $x+1$ 型式（利用連續綜合除法）

$$\begin{array}{r|rrrr} 1 & 0 & -1 & 2 & \\ \hline & -1 & 1 & 0 & -1 \\ \hline 1 & -1 & 0 & 2 & \\ \hline & -1 & 2 & & \\ \hline 1 & -2 & 2 & & \\ \hline & -1 & & & \\ \hline 1 & -3 & & & \end{array}$$

$$f(x) = x^3 - x + 2 = 2 + 2(x+1) - 3(x+1)^2 + (x+1)^3$$

$$f(-0.99) = 2 + 2(0.01) - 3(0.01)^2 + (0.01)^3$$

=

《結論》小數求值題型

- ① $f(0.99) \Rightarrow$ 將 $f(x)$ 表成 _____ 型式
- ② $f(1.99) \Rightarrow$ 將 $f(x)$ 表成 _____ 型式
- ③ $f(-1.99) \Rightarrow$ 將 $f(x)$ 表成 _____ 型式
- ④ $f(0.51) \Rightarrow$ 將 $f(x)$ 表成 _____ 或 _____ 型式
- ⑤ $f(0.33) \Rightarrow$ 將 $f(x)$ 表成 _____ 型式
- ⑥ $f(0.667) \Rightarrow$ 將 $f(x)$ 表成 _____ 型式

應用 5 無理數或虛數求值 $\Rightarrow$ _____



例： $f(x) = x^4 - 2x^2 + 3x - 4$ ，求 $f(1+\sqrt{3}) = ?$

解：1° 令 $x = 1 + \sqrt{3} \Rightarrow x - 1 = \sqrt{3} \Rightarrow x^2 - 2x + 1 = 3 \Rightarrow x^2 - 2x - 2 = 0$

2° $f(x) = x^4 - 2x^2 + 3x - 4$

$= (x^2 - 2x - 2)(\quad) + (\quad)$

3° $f(1+\sqrt{3}) =$

應用 6 置換

GLFF



例：已知 $f(x-1) = x^3 + 6x^2 - x + 3$ ，求 $f(x) = ?$

解：1° 將 $f(x-1) = x^3 + 6x^2 - x + 3 = a(x-1)^3 + b(x-1)^2 + c(x-1) + d$

$$\begin{array}{r|rrrr} 1 & 6 & -1 & 3 & \\ & 1 & 7 & 6 & 1 \\ \hline 1 & 7 & 6 & 9 & \\ & 1 & 8 & & \\ \hline 1 & 8 & 14 & & \\ & 1 & & & \\ \hline 1 & 9 & & & \end{array}$$

$$f(x-1) = (x-1)^3 + 9(x-1)^2 + 14(x-1) + 9$$

$$\Rightarrow f(t) = t^3 + 9t^2 + 14t + 9$$

$\Rightarrow$

應用 7 置換

TGDV



例： $(x+1)^3 - 2(x+1)^2 + 3(x+1) + 5 = a(x-2)^3 + b(x-2)^2 + c(x-2) + d$ ，

求 a, b, c, d ？

解：1° 將式子變成 $t^3 - 2t^2 + 3t + 5 = a(t-3)^3 + b(t-3)^2 + c(t-3) + d$

$$\begin{array}{r|rrrr} 1 & -2 & 3 & 5 & \\ \hline & & & & 3 \end{array}$$



回家作業



1. 設 a, b, c, d, e 為常數，且

$$x^4 + 8x^3 - 25x^2 + 30x - 8 = a(x-2)^4 + b(x-2)^3 + c(x-2)^2 + d(x-2) + e,$$

求 a, b, c, d, e 之值。



2. 多項式 $x^3 - 8x^2 + 20x - 17 = a(x-1)(x-2)(x-3) + b(x-1)(x-2) + c(x-1) + d$ ，
求 a, b, c, d 之值。

3. 設 $f(x) = 54x^3 - 99x^2 + 66x - 20$

(1) 試將 $f(x)$ 表示成 $3x-1$ 的多項式

(2) 試求 $f(0.33)$ 的近似值到小數第四位。

4. 設 $f(x) = x^5 + x^4 - 10x^3 - 10x^2 + x + 5$ ，試求 $f(1+\sqrt{2})$ 之函數值。

簡答

1. $(a, b, c, d, e) = (1, 16, 47, 58, 32)$ 2. $(a, b, c, d) = (1, -2, 3, -4)$
3. (1) $2(3x-1)^3 - 5(3x-1)^2 + 6(3x-1) - 7$ (2) -7.0605 4. $-36 - 28\sqrt{2}$



回家作業



5. 設 $f(x) = x^5 - 2x^4 - 3x^3 + 7x^2 + x + 6$

(1) 將 $f(x)$ 表成 $(x-2)$ 的多項式，即 $f(x) = \sum_{k=0}^5 a_k (x-2)^k$

(2) 求 $f(1.999)$ 的近似值。(取到小數第三位)

6. 以 $a + b\sqrt{2}$ 的形式化簡

$$4\left(\frac{3+\sqrt{2}}{2}\right)^4 - 12\left(\frac{3+\sqrt{2}}{2}\right)^3 + 3\left(\frac{3+\sqrt{2}}{2}\right)^2 + 14\left(\frac{3+\sqrt{2}}{2}\right) - 8。$$

其中 a, b 為有理數。

7. 已知 $f(x) = x^3 - 2x^2 + 10x + 1$ ，若 $g(x+2) = f(x-1)$ ，則 $g(x)$ 為 _____。



5. (1) $(x-2)^5 + 8(x-2)^4 + 21(x-2)^3 + 21(x-2)^2 + 9(x-2) + 12$ (2) 11.991

6. $2 + \sqrt{2}$ 7. $x^3 - 11x^2 + 49x - 74$