



多項式的運算與運用

主題

1

多項式加法、減法與乘法

【觀念一】單項式

- (1) 單項式：只有一項的式子，如： $x, 2x^2, \dots$ 等
- (2) 同款單項式可相加、減，如： $2x^2 + 5x^2 = 7x^2$
- (3) 單項式可相乘，如： $(2x^2) \times (3x^2) = 6x^4$
- (4) 單項式可相除：如： $\frac{6x^3}{3x} = 2x^2$



【觀念二】多項式

- (1) 由幾個單項式所組成的式子
- (2) 型如： $f(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \dots + a_1 x + a_0$ 且 $a_n \neq 0$
(其中 $n \in \mathbb{N}$ 或 $n = 0$)，稱為 x 的 n 次多項式
- (3) 以 $\deg f(x) = n$ 表示 $f(x)$ 的次數為 n
- (4) $f(x) \in \mathbb{R}[x]$ 表示**實係數** x 多項式 $\Rightarrow f(x) = 3x^2 + \sqrt{2}x + \frac{1}{3}$
- (5) $g(x) \in \mathbb{Q}[x]$ 表示**有理係數** x 多項式 $\Rightarrow g(x) = \frac{3}{4}x^2 + 7x - 0.3$

【觀念三】多項式不定元

- (1) x 不能在分母($\frac{1}{x+1}$ 稱**分式**或**有理式**)
- (2) x 不能在根號內($\sqrt{x+1}$ 稱**根式**或**無理式**)
- (3) x 不能在絕對值內
- (4) 不能**無限項**

【觀念四】二個多項式相等的條件

$$f(x) = a_n x^n + \cdots + a_1 x + a_0, \quad g(x) = b_n x^n + \cdots + b_1 x + b_0$$

條件 1 次數相等

條件 2 對應係數相等

性質 若 $f(x) = g(x)$ ，則 x 代入任何值，其個別所得的值必相等。

《說明》 $f(x) = 3x^2 - 12x + 11$

$$g(x) = a(x-1)(x-2) + b(x-2)(x-3) + c(x-3)(x-1)$$

已知 $f(x) = g(x)$ ，求 a, b, c ？

法 1 比較係數法

$$\begin{aligned} 3x^2 - 12x + 11 &= a(x-1)(x-2) + b(x-2)(x-3) + c(x-3)(x-1) \\ \Rightarrow 3x^2 - 12x + 11 &= (a+b+c)x^2 - (3a+5b+4c)x + (2a+6b+3c) \\ \therefore \begin{cases} a+b+c=3 \\ 3a+5b+4c=12 \\ 2a+6b+3c=11 \end{cases} &\Rightarrow \begin{cases} a=1 \\ b=1 \\ c=1 \end{cases} \end{aligned}$$

法 2 數值代入法

$$3x^2 - 12x + 11 = a(x-1)(x-2) + b(x-2)(x-3) + c(x-3)(x-1)$$

$$x=1 \text{ 代入得 } 2 = b(-1)(-2) \Rightarrow b=1$$

$$x=2 \text{ 代入得 } -1 = c(-1)(1) \Rightarrow c=1$$

$$x=3 \text{ 代入得 } 2 = a(2)(1) \Rightarrow a=1$$

【觀念五】二多項式的加法與減法如何運算

$\Rightarrow$ 將二多項式同次項的係數相加(相減)

《說明》 $f(x) = 2x^3 + 5x + 7$ ， $g(x) = x^2 + 6x - 1$ ，計算 $f(x) + g(x)$ ？

法 1 橫式算法

$$\begin{aligned} f(x) + g(x) &= (2x^3 + 5x + 7) + (x^2 + 6x - 1) \\ &= 2x^3 + x^2 + 11x + 6 \end{aligned}$$

法 2 直式算法

$$\begin{array}{r}
 2x^3 + 0x^2 + 5x + 7 \leftarrow f(x) \\
 +) \quad \quad x^2 + 6x - 1 \leftarrow g(x) \\
 \hline
 2x^3 + x^2 + 11x + 6
 \end{array}$$

法 3 分離係數直式算法

$$\begin{array}{r}
 2 + 0 + 5 + 7 \leftarrow f(x) \\
 +) \quad 1 + 6 - 1 \leftarrow g(x) \\
 \hline
 2 + 1 + 11 + 6
 \end{array}$$

【觀念六】二多項式的乘法如何運算

(1) 二個單項式的乘法是「係數相乘、次數相加」

《說明》 $(3x^2)(5x^3) =$

(2) 二個多項式的乘法是利用分配律展開成單項式相乘，
然後合併同次項。

《說明》 $f(x) = x^2 - 2x + 3$ ， $g(x) = x^3 + x - 1$ ，計算 $f(x) \cdot g(x)$

法 1 橫式算法

$$\begin{aligned}
 f(x) \cdot g(x) &= (x^2 - 2x + 3)(x^3 + x - 1) \\
 &= x^2(x^3 + x - 1) - 2x(x^3 + x - 1) + 3(x^3 + x - 1) \\
 &= x^5 + x^3 - x^2 - 2x^4 - 2x^2 + 2x + 3x^3 + 3x - 3 \\
 &= x^5 - 2x^4 + 4x^3 - 3x^2 + 5x - 3
 \end{aligned}$$

法 2 直式算法

$$\begin{array}{r}
 \quad \quad x^2 - 2x + 3 \\
 \times) \quad x^3 + 0x^2 + x - 1 \\
 \hline
 \quad \quad x^5 - 2x^4 + 3x^3 \\
 \quad \quad \quad x^3 - 2x^2 + 3x \\
 \quad \quad \quad \quad - x^2 + 2x - 3 \\
 \hline
 \quad \quad x^5 - 2x^4 + 4x^3 - 3x^2 + 5x - 3
 \end{array}$$

法 3 分離係數直式算法

$$\begin{array}{r}
 1-2+3 \\
 \times) 1+0+1-1 \\
 \hline
 1-2+3 \\
 1-2+3 \\
 -1+2-3 \\
 \hline
 1-2+4-3+5-3
 \end{array}$$

(二個最高次項對齊)

$$\begin{array}{r}
 1 \quad -2 \quad 3 \\
 \times) 1 \quad 0 \quad 1 \quad -1 \\
 \hline
 -1 \quad 2 \quad -3 \\
 1 \quad -2 \quad 3 \\
 \hline
 1 \quad -2 \quad 3 \\
 1 \quad -2 \quad 4 \quad -3 \quad 5 \quad -3
 \end{array}$$

(二個最低次項對齊)

【觀念七】多項式加法、減法、乘法性質

- (1) $f(x)+g(x)=g(x)+f(x) \Rightarrow$ 加法交換律
- (2) $f(x) \cdot g(x)=g(x) \cdot f(x) \Rightarrow$ 乘法交換律
- (3) $f(x)+[g(x)+h(x)]=[f(x)+g(x)]+h(x) \Rightarrow$ 加法結合律
- (4) $f(x) \cdot [g(x) \cdot h(x)]=[f(x) \cdot g(x)] \cdot h(x) \Rightarrow$ 乘法結合律
- (5) $f(x)[g(x)+h(x)]=f(x)g(x)+f(x)h(x) \Rightarrow$ 分配律

例 1. (能力指標：係數問題)

XHBR



$$f(x) = x^{10} + 2x^9 + 3x^8 + \cdots + 10x + 11,$$

$$g(x) = 11x^{10} + 10x^9 + 9x^8 + \cdots + 2x + 1$$

試求 $f(x) \cdot g(x)$ 展開式中 (1) x^{10} 係數 (2) x^9 係數 (3) x^8 係數

$$\textcircled{\text{C}} \text{ 平方和公式： } 1^2 + 2^2 + 3^2 + \cdots + n^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$$

解： $f(x) \cdot g(x) = (x^{10} + 2x^9 + 3x^8 + \cdots + 10x + 11)(11x^{10} + 10x^9 + 9x^8 + \cdots + 2x + 1)$

(1) x^{10} 係數 =

(2) x^9 係數 =

=

(3) x^8 係數 =

=

例 2. (能力指標：係數應用)

$(1+2x+3x^2+4x^3+5x^4+\cdots+10x^9)^4$ 展開式中，求 x^4 係數？

解：本題只求到 x^4 ，所以原多項式中 x^5 ， x^6 以上的項皆可省略
只考慮 $(1+2x+3x^2+4x^3+5x^4)^4$

(1) (2)

$$\begin{array}{r} \\ \times) \\ \hline \end{array}$$

例 3. (能力指標：連乘係數)

$$(x+1)(x+2)\cdots(x+10) = a_{10}x^{10} + a_9x^9 + \cdots + a_1x + a_0,$$

求 (1) a_{10} (2) a_0 (3) a_9 (4) a_8 。

解：首先先尋找連乘積展開的規則

$$(x+a)(x+b) = x^2 + (a+b)x + (ab)$$

$$(x+a)(x+b)(x+c) = x^3 + (a+b+c)x^2 + (ab+bc+ca)x + (abc)$$

$$(x+a)(x+b)(x+c)(x+d) = \underline{\hspace{1cm}} x^4 + \underline{\hspace{1cm}} x^3 + \underline{\hspace{1cm}} x^2 \\ + \underline{\hspace{1cm}} x + \underline{\hspace{1cm}}$$

(1) $a_{10} =$

(2) $a_0 =$

(3) $a_9 =$

(4) $a_8 =$



例 4. (能力指標：次數運算)

$\deg f(x) = 4$, $\deg g(x) = 3$, 求下列各題之次數？

(1) $\deg [f(x) + g(x)] = 4$

(2) $\deg [f(x) - g(x)] = 4$

(3) $\deg [f(x) \cdot g(x)] = 7$

(4) $\deg [f(g(x))] = 12$

LGQL



例 5. (能力指標：多項式相等)

設 $\deg f(x) = 2$, 已知 $(1 - 4x)\{f(x) + x(f(x))^2\} = 1 + x^3 g(x)$,

求 $f(x) = ?$

MIKQ



解： 1° 令 $f(x) = ax^2 + bx + c$

$$\Rightarrow (1 - 4x)\{(ax^2 + bx + c) + x(ax^2 + bx + c)^2\} = 1 + x^3 g(x)$$

2° 兩邊比較 x^0 , x^1 , x^2 的係數

$$\Rightarrow \begin{cases} x^0 : c = 1 \\ x^1 : -4c + b + c^2 = 0 \\ x^2 : -4b + a - 4c^2 + 2bc = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a = 10 \\ b = 3 \\ c = 1 \end{cases}$$

$$\text{故 } f(x) = 10x^2 + 3x + 1$$



回家作業



1. $f(x) = a(x-1)(x-2) + b(x-2)(x-3) + c(x-1)(x-3)$, $g(x) = x^2 + 3$

已知 $f(x) = g(x)$ ，求 a, b, c 之值。



2. 設 $(x-1)(2x-1)(3x-1)(4x-1)\dots(10x-1) = a_{10}x^{10} + a_9x^9 + a_8x^8 + \dots + a_1x + a_0$ ，

求 a_1 與 a_{10} 。

3. 設 $(x-1)(x-2)(x-3)\dots(x-9)(x-10) = a_{10}x^{10} + a_9x^9 + \dots + a_1x + a_0$ ，求 a_9 及 a_{10} 。

4. 設 $24x^3 = (3x+1)(ax^2+bx+c)+d$ ，求常數 a, b, c, d 之值。

簡答

1. $a=6, b=2, c=-7$ 2. $-55, 3628800$ 3. $a_9 = -55, a_{10} = 1$

4. $(a, b, c, d) = (8, -\frac{8}{3}, \frac{8}{9}, -\frac{8}{9})$



回家作業



5. (96 數乙試題)

設 r, s 為整數，已知整係數多項式 $x^3 + rx + s$ 的因式分解是

$x^3 + rx + s = (x + a)^2(x + b)$ ，其中 a, b 為相異實數，求證 a, b 都是有理數。

6. (100 學測試題)

多項式 $4(x^2 + 1) + (x + 1)^2(x - 3) + (x - 1)^3$ 等於下列哪一個選項？

- (1) $x(x + 1)^2$ (2) $2x(x - 1)^2$ (3) $x(x - 1)(x + 1)$
(4) $2x(x - 1)^2(x + 1)$ (5) $2x(x - 1)(x + 1)$



5. 見詳解 6. (5)