

主題 4 直線方程式



【觀念一】二元一次方程式：型如： $ax+by+c=0$ ($a, b, c \in \mathbb{R}$, $a^2+b^2 \neq 0$)

其圖形為 _____

(1) 若 $a \neq 0$, $b = 0$, 則 $x = -\frac{c}{a}$ 為 _____ 線

(方程式不出現 y 項, 圖形與 y 軸平行或重合)

(2) 若 $a = 0$, $b \neq 0$, 則 $y = -\frac{c}{b}$ 為 _____ 線

(方程式不出現 x 項, 圖形與 x 軸平行或重合)

(3) 若 $a \neq 0$, $b \neq 0$, 則 $ax+by+c=0$ 的圖形與二軸均有交點

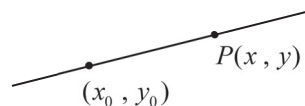
【觀念二】點斜式 (已知 L 經過一點及 m 求直線)

(1) 經過點 (x_0, y_0) 且斜率為 m 的直線方程式為 _____

(2) 經過點 (x_0, y_0) 且斜率不存在的直線方程式為 _____

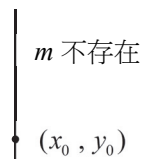
《說明》(1) 令直線每一個動點 $P(x, y)$

$$\therefore m = \frac{y - y_0}{x - x_0} \Rightarrow y - y_0 = m(x - x_0)$$



(2) m 不存在為鉛直線又過 (x_0, y_0)

$$\therefore x = x_0$$



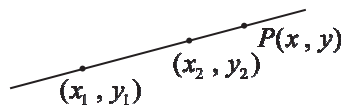
【觀念三】二點式 (已知 L 經過二點求直線)

L 過二點 $(x_1, y_1), (x_2, y_2)$ 的直線方程式為 _____

《說明》令直線每一個動點 $P(x, y)$

$$\therefore m = \frac{y - y_1}{x - x_1} = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}$$

$$\therefore y - y_1 = \left(\frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} \right) (x - x_1)$$



【觀念四】截距

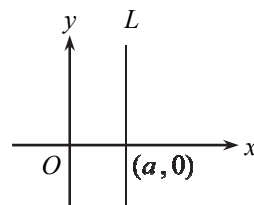
- (1) x 軸截距：若 L 與 x 軸相交時，其交點的 _____ 稱之
- (2) y 軸截距：若 L 與 y 軸相交時，其交點的 _____ 稱之
- (3) 零截距：若 L 過原點 O 時，其 x, y 軸截距同時存在，且皆為 0

【觀念五】截距式 (已知二軸截距求直線)

- (1) 已知 x 軸截距 a ，無 y 軸截距，直線方程式為 _____
- (2) 已知 y 軸截距 b ，無 x 軸截距，直線方程式為 _____
- (3) 已知 x 軸截距 a ， y 軸截距 b ，直線方程式為 _____

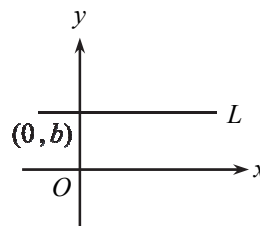
《說明》(1) x 軸截距 a ，表過點 $(a, 0)$

且為鉛直線 $\therefore x = a \Rightarrow \frac{x}{a} = 1$



(2) y 軸截距 b ，表過點 $(0, b)$

且為水平線 $\therefore y = b \Rightarrow \frac{y}{b} = 1$



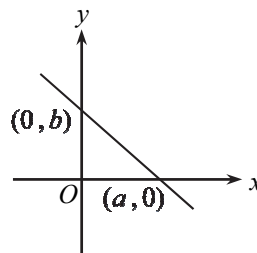
(3) x 軸截距 a ，表過點(,)

y 軸截距 b ，表過點(,)

$m =$

利用點斜式： $y - 0 = \frac{-b}{a}(x - a)$

$$\Rightarrow ay + bx = ab \Rightarrow \frac{x}{a} + \frac{y}{b} = 1$$



【觀念六】斜截式：(已知斜率與 y 軸截距求直線)

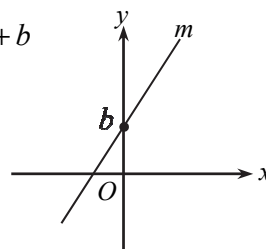
L 斜率為 m ， y 軸截距為 b ，直線方程式為 _____

《說明》(1) y 軸截距 b 表過 $(0, b)$

(2) 利用點斜式： $y - b = m(x - 0) \Rightarrow y = mx + b$

(3) 其實斜截式即是一次函數 (線性函數)

$$y = f(x) = \underbrace{ax + b}_{mx + b}$$



【觀念七】 $ax + by + c = 0$ ，由係數直接看出 $m =$

《說明》 $ax + by + c = 0$ 過 $(-\frac{c}{a}, 0)$ ， $(0, -\frac{c}{b})$

$$m = \frac{0 - (-\frac{c}{b})}{-\frac{c}{a} - 0} = -\frac{a}{b}$$

【觀念八】 由斜率可反推直線前二項格式

例： $2x + 3y + 1 = 0 \Rightarrow m =$

反推 $m = -\frac{2}{3} = \frac{2(x)}{-3(y)}$ ，可知 L 方程式為

立即練習 (1) $m = \frac{1}{7} \Rightarrow$

(2) $m = -\frac{5}{2} = \frac{5(\quad)}{-2(\quad)} \Rightarrow$

(3) $m = 3 = \frac{3(\quad)}{1(\quad)} \Rightarrow$

【觀念九】 平行假設法：與 $ax + by + c = 0$ 平行之直線可設：_____

垂直假設法：與 $ax + by + c = 0$ 垂直之直線可設：_____

例 1. (能力指標：直線方程式)

由下列各題所給予的條件求直線方程式：

(1) 過 $(3, 2)$ 且 $m = 3 \Rightarrow$ 點斜式 $\Rightarrow$

(2) 過 $(3, 2), (1, -1) \Rightarrow$ 二點式 $\Rightarrow m = \quad \Rightarrow$

(3) x 軸截距 3， y 軸截距 -2 $\Rightarrow$ 截距式 $\Rightarrow$

(4) $m = 3$ ， y 軸截距 2 $\Rightarrow$ 斜截式 $\Rightarrow$

(5) $m = 2$ ， x 軸截距 3 $\Rightarrow m = 2, (3, 0) \Rightarrow$ 點斜式 $\Rightarrow$



例 2. (能力指標：直線平行假設法)

L 過 $(3, 1)$ 且與 $2x + y + 1 = 0$ 平行，求直線 L 的方程式。

解：



例 3. (能力指標：直線垂直假設法)

求過點 $(-2, -5)$ 且與直線 $x - 2y - 7 = 0$ 垂直之直線方程式。

解：

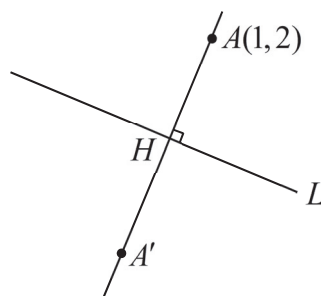


例 4. (能力指標：垂足、對稱點、距離)

$A(1, 2)$, $L: x + 3y + 3 = 0$ ，求 A 對 L 之

(1) 垂足 (2) 對稱點 (3) 距離

解：





回家作業



1. 求下列各直線方程式：

(1) 過點 $(3, -2)$ ，斜率為 5

(2) 過點 $(1, -4)$ 與點 $(2, 3)$

(3) x 截距為 5， y 截距為 6

(4) x 截距為 -2 ，斜率為 $\frac{1}{3}$

(5) 過點 $(3, 4)$ 而平行於 $x + y = 1$

(6) 過點 $(3, 4)$ 而垂直於 $2x + y = 1$



2. 三角形的三高共點，此點稱為該三角形的垂心，若一三角形的三頂點為

$A(1, -6)$, $B(2, 2)$, $C(-5, -1)$ ，試求三高之直線方程式及 $\triangle ABC$ 之垂心坐標。

3. 已知平行四邊形的兩邊分別在直線 $2x + 3y = 7$ ， $x - 3y = -4$ 上，一頂點為 $(5, 5)$ ，

試求其他三個頂點的位置。

簡答

1. (1) $5x - y - 17 = 0$ (2) $7x - y - 11 = 0$ (3) $\frac{x}{5} + \frac{y}{6} = 1$ (4) $y = \frac{1}{3}(x + 2)$

(5) $x + y - 7 = 0$ (6) $x - 2y + 5 = 0$ 2. $7x + 3y + 11 = 0$, $6x - 5y - 2 = 0$,

$x + 8y + 13 = 0$, $(-\frac{49}{53}, -\frac{80}{53})$ 3. $(7, \frac{11}{3})$, $(1, \frac{5}{3})$, $(-1, 3)$



回家作業



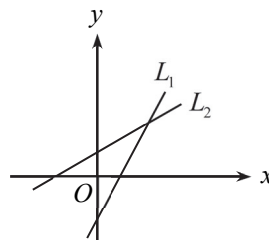
4. (83 推甄試題)

平面上四點 $A(-1, 2)$, $B(4, 2)$, $C(2, -1)$ 和 $O(0, 0)$ ，過 B 點作直線 OC 的平行線交直線 OA 於 D 點，則 D 點的坐標為 _____。

5. (92 學測試題)

如圖，兩直線 L_1 , L_2 之方程式分別為 $L_1: x + ay + b = 0$, $L_2: x + cy + d = 0$ ；請問下列哪些選項是正確的？

- (A) $a > 0$ (B) $b > 0$ (C) $c > 0$
(D) $d > 0$ (E) $a > c$



簡答

4. $(-\frac{8}{3}, \frac{16}{3})$ 5. (D)(E)



回家作業



6. (94 數乙試題)

小明玩戰爭網路遊戲，在螢幕上有一坐標平面，飛機 P 以等速直線前進，在坐標 $(-12, 4)$ 的位置被發現，經過 1 秒後到達坐標 $(-10, 4)$ ，再經 1 秒後，小明從原點選一方向發射一飛彈 R ，假設 R 也以直線前進且速率跟 P 相同，而且 R 剛好擊中 P 。試求 R 擊中 P 時的坐標 (a, b) 為 _____。

7. (96 數乙試題)

某別墅有一個四塊正方形的玻璃拼成的田字形窗戶，窗外路燈的光線 (假設路燈是一點光源) 透過窗戶在地板上形成一個變形的田字形光影。在地板上建置一個直角坐標系，發現田字形光影外框的四個頂點的坐標分別為 $(-4, 40)$ ， $(16, 0)$ ， $(16, 40)$ 和 $(28, 16)$ 。求田字形窗戶的中心投影在地板上的坐標。



6. $(-3, 4)$ 7. $(16, 25)$