



式的運算

主題 10 乘法公式



型一 平方公式

【觀念一】和的平方公式： $(a+b)^2 = a^2 + 2ab + b^2 = (a-b)^2 + 4ab$

【觀念二】差的平方公式： $(a-b)^2 = a^2 - 2ab + b^2 = (a+b)^2 - 4ab$

【觀念三】平方差公式： $(a+b)(a-b) = a^2 - b^2$

【觀念四】三項和的平方公式： $(a+b+c)^2 = a^2 + b^2 + c^2 + 2(ab+bc+ca)$

例 1. (能力指標：平方差)

$$\frac{3^2}{3^2-1} \times \frac{4^2}{4^2-1} \times \frac{5^2}{5^2-1} \times \cdots \times \frac{32^2}{32^2-1} = ?$$

解：



例 2. (能力指標：平方差)

$$7 \times 9 \times (8^2 + 1) \times (8^4 + 1) \times (8^8 + 1) = 2^n - 1, \text{ 求 } n = ?$$

解：



例 3. (能力指標：完全平方式)

$$\text{求 } \sqrt{95 \times 99 \times 101 \times 105 + 144} = ?$$

解：



例 4. (能力指標：倒數完全平方式)

若 $0 < x < 1$ ，化簡 $\sqrt{x^2 + \frac{1}{x^2} + 2} - \sqrt{x^2 + \frac{1}{x^2} - 2} = ?$

解：





回家作業



1. 設 x, y 是兩實數，且 $x > y$ 。若 $x + y = 2$, $x^2 + y^2 = 5$ ，

則 $\frac{1}{x} - \frac{1}{y} = \underline{\hspace{2cm}}$ 。



2. 已知 $7 \times 9 \times (8^2 + 1) \times (8^4 + 1) \times (8^8 + 1) = 4^n - 1$ ，求 n 。

3. 設 $x = \frac{1^2}{1} + \frac{2^2}{3} + \frac{3^2}{5} + \frac{4^2}{7} + \cdots + \frac{49^2}{97} + \frac{50^2}{99}$, $y = \frac{1^2}{3} + \frac{2^2}{5} + \frac{3^2}{7} + \frac{4^2}{9} + \cdots + \frac{49^2}{99} + \frac{50^2}{101}$ 。

求 $x - y$ 之值。



1. $2\sqrt{6}$ 2. 24 3. $\frac{2550}{101}$



回家作業



4. 已知 a, b, c 為實數，且 $a+b+c=0$, $a^2+b^2+c^2=1$ ，求 $a^4+b^4+c^4$ 之值。

5. 化簡 $\sqrt{1999 \times 2000 \times 2001 \times 2002 + 1}$ 。

6. 若 n 為正整數，已知 $(1-\frac{1}{2^2})(1-\frac{1}{3^2})(1-\frac{1}{4^2})\cdots(1-\frac{1}{n^2})=\frac{501}{1000}$ ，試求 n 之值。



4. $\frac{1}{2}$ 5. 4001999 6. 500



回家作業



7. 設 $x = \frac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{\sqrt{6}+\sqrt{2}}$ ，試求下列各小題：

(1) $x + \frac{1}{x}$

(2) $x^2 + \frac{1}{x^2}$

(3) $x^3 + \frac{1}{x^3}$

本題無數位影音服務，
請同學詳實練習並善用輔導資源



7. (1) 4 (2) 14 (3) 52

數位 延伸閱讀



1. (能力指標：平方差)

$$f(x) = (1+x)(1+x^4)(1+x^{16})(1+x^{64})\cdots, \text{ 若 } f\left(\frac{3}{8}\right) \cdot f(a) = \frac{8}{5},$$

求 $a = ?$



$$\text{解：} 1^\circ \begin{cases} f(x) = (1+x)(1+x^4)(1+x^{16})(1+x^{64})\cdots \\ f(x^2) = (1+x^2)(1+x^8)(1+x^{32})(1+x^{128})\cdots \end{cases}$$

$$\begin{aligned} \Rightarrow f(x) f(x^2) &= (1+x)(1+x^2)(1+x^4)(1+x^8)(1+x^{16})(1+x^{32})\cdots \\ &= \frac{(1-x)(1+x)(1+x^2)(1+x^4)(1+x^8)\cdots}{1-x} = \frac{1-x^\infty}{1-x} \end{aligned}$$

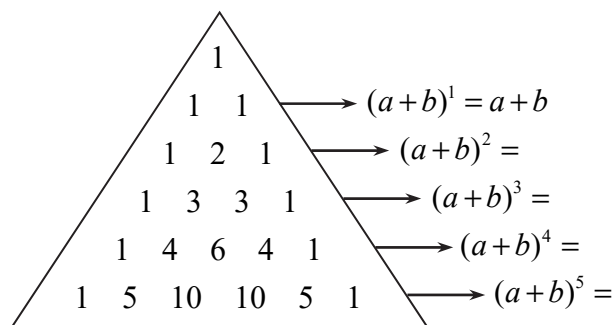
$$2^\circ f\left(\frac{3}{8}\right) f\left(\frac{9}{64}\right) = \frac{1 - \left(\frac{3}{8}\right)^\infty}{1 - \frac{3}{8}} = \frac{1}{\frac{5}{8}} = \frac{8}{5}$$

$$\Rightarrow f\left(\frac{3}{8}\right) f\left(\frac{9}{64}\right) = f\left(\frac{3}{8}\right) f(a)$$

$$\Rightarrow f(a) = f\left(\frac{9}{64}\right) \Rightarrow a = \frac{9}{64}$$

型二 高次公式(I)

【觀念一】巴斯卡三角形



【觀念二】基本公式

$$(1) (x+y)^2 = x^2 + 2xy + y^2$$

$$(2) (x+y)^3 = x^3 + 3x^2y + 3xy^2 + y^3$$

$$(3) (x-y)^3 =$$

$$(4) (x+y)^4 = x^4 + 4x^3y + 6x^2y^2 + 4xy^3 + y^4$$

$$(5) (x-y)^4 = x^4 - 4x^3y + 6x^2y^2 - 4xy^3 + y^4$$

$$(6) (x+y)^5 = x^5 + 5x^4y + 10x^3y^2 + 10x^2y^3 + 5xy^4 + y^5$$

$$(7) (x-y)^5 = x^5 - 5x^4y + 10x^3y^2 - 10x^2y^3 + 5xy^4 - y^5$$

【觀念三】和的立方公式： $(a+b)^3 = a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3$

$$= a^3 + b^3 + 3ab(a+b)$$

【觀念四】差的立方公式： $(a-b)^3 = a^3 - 3a^2b + 3ab^2 - b^3$

$$= a^3 - b^3 - 3ab(a-b)$$

【觀念五】立方和公式： $a^3 + b^3 = (a+b)^3 - 3ab(a+b) = (a+b)(a^2 - ab + b^2)$

$$\text{重要應用：} x^3 + 1 =$$

【觀念六】立方差公式： $a^3 - b^3 = (a-b)^3 + 3ab(a-b) = (a-b)(a^2 + ab + b^2)$

$$\text{重要應用：} x^3 - 1 =$$

【觀念七】(1) $x^4 + x^2 + 1 = (x^2 + 1)^2 - x^2 = (x^2 + x + 1)(x^2 - x + 1)$

$$(2) a^4 + a^2b^2 + b^4 = (a^2 + b^2)^2 - (ab)^2 = (a^2 + ab + b^2)(a^2 - ab + b^2)$$

例 1. (能力指標：配方)

若已知 $a + b = 5$, $ab = 3$ ，試求：

(1) $a^2 + b^2$ (2) $(a - b)^2$ (3) $a^3 + b^3$ (4) $a^4 + b^4$ (5) $a^5 + b^5$

解：



例 2. (能力指標：倒數配方)

若已知 $x + \frac{1}{x} = 3$ ，試求：

(1) $x^2 + \frac{1}{x^2}$ (2) $x^3 + \frac{1}{x^3}$ (3) $x^4 + \frac{1}{x^4}$ (4) $x^5 + \frac{1}{x^5}$

解：

UUH



例 3. (能力指標： $x^4 + x^2 + 1$ 分解)

化簡：(1) $(a+1)(a-1)(a^2+a+1)(a^2-a+1)$

(2) $(a+1)(a-1)(a^4+a^2+1)$

解：

ZVBD





回家作業



1. 設 $a^2 = 5$ ，則 $(a-1)(a+1)(a^2-a+1)(a^2+a+1)$ 之值為 _____。



2. 設 a, b 為實數，且 $a+b=1$ ， $a^2+b^2=3$ ，試求 $a^3+2a^2b+2ab^2+b^3$ 之值。

3. 設實數 x, y 滿足 $x+2y=3$ ， $x^3+8y^3=9$ ，則 $x^2+4y^2=$ _____。

4. 利用乘法公式 $(x+y)^4$ 與 $(x-y)^4$ 的展開式求 $(\sqrt{11}+\sqrt{7})^4$ 的整數部分。



1. 124 2. 2 3. 5 4. 1263



型三 高次公式(II)

【觀念一】 $a^2 + b^2 + c^2 - ab - bc - ca = \frac{1}{2}[(a-b)^2 + (b-c)^2 + (c-a)^2]$



【觀念二】三項立方公式：

$$(1) \quad a^3 + b^3 + c^3 - 3abc = (a+b+c)(a^2 + b^2 + c^2 - ab - bc - ac)$$

《證明》 $a^3 + b^3 + c^3 - 3abc = (a+b)^3 - 3ab(a+b) + c^3 - 3abc$

$$= (a+b)^3 + c^3 - 3ab(a+b+c)$$

$$= (a+b+c)^3 - 3(a+b)c(a+b+c) - 3ab(a+b+c)$$

$$= (a+b+c)[(a+b+c)^2 - 3(ab+bc+ca)]$$

$$= (a+b+c)(a^2 + b^2 + c^2 - ab - bc - ca)$$

(2) 若 $a+b+c=0$ 則 $a^3 + b^3 + c^3 = 3abc$

(3) $a^3 + b^3 + c^3 - 3abc = (a+b+c)(a^2 + b^2 + c^2 - ab - bc - ca)$

$$= (a+b+c) \frac{1}{2}[(a-b)^2 + (b-c)^2 + (c-a)^2]$$

$$\because (a-b)^2 + (b-c)^2 + (c-a)^2 \geq 0,$$

$$a^3 + b^3 + c^3 - 3abc \text{ 與 } a+b+c \text{ 同號}$$

【觀念三】高次公式：

$$a^n - b^n = (a-b)(a^{n-1} + a^{n-2}b + \cdots + ab^{n-2} + b^{n-1})$$

$$a^n + b^n = (a+b)(a^{n-1} - a^{n-2}b + \cdots - ab^{n-2} + b^{n-1}) \quad (\text{若 } n \text{ 為奇數})$$

重要應用：(1) $x^2 - 1 =$

$$x^3 - 1 =$$

$$x^4 - 1 =$$

$$x^5 - 1 =$$

(2) $x^3 + 1 =$

$$x^5 + 1 =$$

1. (能力指標：配方)

$$x, y \in \mathbb{R}, x^2 + xy + y^2 + x - y + 1 = 0, \text{ 求 } x, y = ?$$

解：



2. (能力指標： $a^3 + b^3 + c^3 - 3abc$ 的應用)

$$\text{若已知 } a + b + c = 5, ab + bc + ac = 3, \text{ 試求： } a^3 + b^3 + c^3 - 3abc = ?$$

解：



3. (能力指標： $a^3+b^3+c^3-3abc$ 的應用)

a, b, c 為三角形三邊長且滿足 $a^3+b^3+c^3=3abc$ ，證明此三角形為正三角形。

證：



4. (能力指標： $a^3+b^3+c^3-3abc$ 的應用)

試求 $(2^5+3)^3+(8-2^5)^3-11^3=?$

解：



5. (能力指標： $a^3 + b^3 + c^3 - 3abc$ 的應用)

化簡 $(2x+3)^3 + (3x-4)^3 + (1-5x)^3$ 。

解：



6. (能力指標： $a^3 + b^3 + c^3 = 3abc$ 的應用)

試因式分解 $(3a-2b)^3 - (5c-2b)^3 - (3a-5c)^3$

解：



數位 延伸閱讀回家作業



1. 已知 $x = \sqrt{7} + \sqrt{5} - \sqrt{2}$, $y = \sqrt{7} - \sqrt{5} + \sqrt{2}$, $z = -\sqrt{7} + \sqrt{5} + \sqrt{2}$,

試回答下列問題：

(1) $x^2 + y^2 + z^2 + xy + yz + zx =$ _____ 。

(2) $x^3 + y^3 + z^3 - 3xyz =$ _____ 。



2. 設 a, b, c 為三角形三邊長且 $8^a + 8^b + 8^c = 3 \cdot 2^{a+b+c}$, 證明三角形為正三角形。

3. 因式分解 $a^3 + b^3 - c^3 + 3abc$ 。

簡 答

1. (1) 28 (2) $4(2\sqrt{2} + 5\sqrt{5} + 7\sqrt{7} - 3\sqrt{70})$ 2. 見詳解

3. $(a+b-c)(a^2+b^2+c^2-ab+bc+ca)$