

主題 6 絕對值

CLQQ

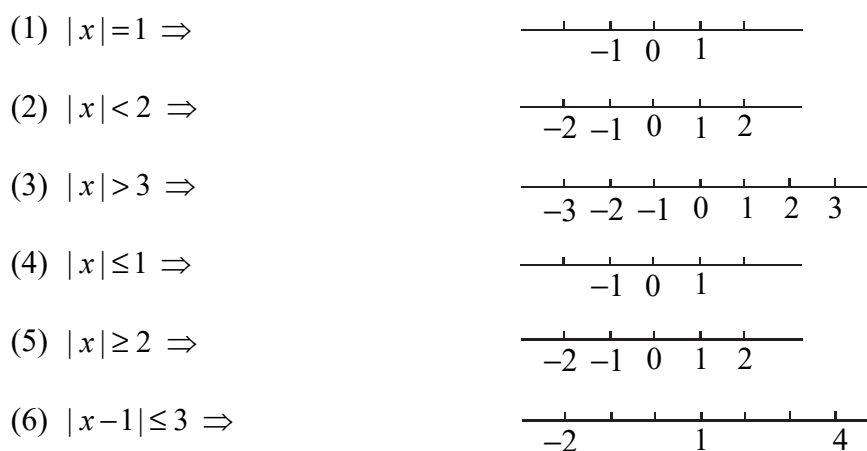


【觀念一】 $|x| = \begin{cases} (x \geq 0) \\ (x < 0) \end{cases}$

【觀念二】絕對值的幾何意義：

- (1) $|x|$ 表示： x 到原點的距離
- (2) $|x_1 - x_2|$ 表示： x_1 到 x_2 的距離

【觀念三】在數線上指出下列絕對值不等式及等式的解



【觀念四】絕對值不等式的結論

- (1) $|x| \leq a \ (a > 0) \Rightarrow$
- (2) $|x| < a \ (a > 0) \Rightarrow$
- (3) $|x| \geq a \ (a > 0) \Rightarrow$
- (4) $|x| > a \ (a > 0) \Rightarrow$

【觀念五】數線不等式

$$(1) \left| x - \frac{M+m}{2} \right| \leq \frac{M-m}{2} \Rightarrow \frac{m-M}{2} \leq x - \frac{M+m}{2} \leq \frac{M-m}{2} \Rightarrow m \leq x \leq M$$

$$(2) \left| x - \frac{M+m}{2} \right| \geq \frac{M-m}{2} \Rightarrow x - \frac{M+m}{2} \geq \frac{M-m}{2} \text{ 或 } x - \frac{M+m}{2} \leq \frac{m-M}{2} \\ \Rightarrow x \geq M \text{ 或 } x \leq m$$

$$(3) m \leq x \leq M \Rightarrow \left| x - \frac{M+m}{2} \right| \leq \frac{M-m}{2}$$

$$(4) x \geq M \text{ 或 } x \leq m \Rightarrow \left| x - \frac{M+m}{2} \right| \geq \frac{M-m}{2}$$

【觀念六】絕對值不等式： $||a|-|b|| \leq |a+b| \leq |a|+|b|$

$$\text{【觀念七】} (1) |a+b| = |a|+|b| \Leftrightarrow \quad (\text{同號性質})$$

$$(2) |a-b| = |a|+|b| \Leftrightarrow \quad (\text{異號性質})$$

例 1. (能力指標：絕對值不等式)

$|ax+1| \leq b$ 之解為 $-1 \leq x \leq 5$ ，求 a, b 之值？

解：法 1 由 $|ax+1| \leq b \Rightarrow -b \leq ax+1 \leq b \Rightarrow -b-1 \leq ax \leq b-1$

$$\textcircled{1} a > 0, \frac{-b-1}{a} \leq x \leq \frac{b-1}{a}$$

$$\textcircled{2} a < 0, \frac{b-1}{a} \leq x \leq \frac{-b-1}{a}$$

法 2 由 $-1 \leq x \leq 5 \Rightarrow$



例 2. (能力指標：絕對值不等式)

解不等式： $3 < |2x - 1| < 5$ 。

$$\text{解：} 1^\circ \begin{cases} 2x - 1 \geq 0 \\ 3 < 2x - 1 < 5 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x \geq \frac{1}{2} \\ 2 < x < 3 \end{cases}$$

$$2^\circ \begin{cases} 2x - 1 < 0 \\ 3 < -(2x - 1) < 5 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x < \frac{1}{2} \\ 2 < x < 3 \end{cases}$$

TFNJ



例 3. (能力指標：絕對值方程)

$|x - 2| + |x - 1| = 6$ ，求 $x = ?$

解：

$$\begin{array}{c} \text{③} \qquad \text{②} \qquad \text{①} \\ \hline \qquad 1 \qquad 2 \end{array}$$

$$\text{①} \begin{cases} x \geq 2 \\ x - 2 + x - 1 = 6 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x \geq 2 \\ x = \frac{9}{2} \end{cases} \Rightarrow x = \frac{9}{2}$$

$$\text{②} \begin{cases} 1 \leq x < 2 \end{cases}$$

$$\text{③} \begin{cases} x < 1 \end{cases}$$

由①, ②, ③知

AGHB



例 4. (成功高中學資)

一筆直的路段設有水廠 A 與電廠 B 各一座，其坐標為 $A(-2)$ 、 $B(4)$ ，為了回饋沿路居民，水電的基本費計算方式為：「住戶到電廠距離的 3 倍加上該住戶到水廠的距離和為該用戶的水電基本費。」則該路段基本費不超過 22 元的區域範圍為 _____。(今設路段住戶 P 坐標 x 即求 x 範圍)

解：



回家作業



1. 設 a, b 是不為 0 的實數，試問何者使 $ab < 0$ 恆成立？

(1) $|a| + |b| = |a+b|$

(2) $|a| - |b| = |a+b|$

(3) $|a| - |b| = |a-b|$

(4) $|a-5| + |b-5| = |a-b|$ 。



2. 設 x, y 為實數，且 $|x-2| \leq 3, |y+1| \leq 2$ ，

則 $|2x-11| + |y+5| + |2y-3| + \sqrt{x^2+6x+9} + \sqrt{(x+y+12)^2} = \underline{\hspace{2cm}}$ 。

3. 若解下列不等式，則何者 x 的範圍在數線上所佔的長度為 8？

(A) $|x| \leq 8$

(B) $|x| \geq -8$

(C) $|x-1| \leq 4$

(D) $|2x-1| \leq 2$

(E) $3 \leq |x+1| \leq 11$ 。



1. (2) 2. 34 3. (C)



回家作業



4. 設 p, q 皆為特定實數，若 $|px+1| \geq q$ 之解為 $x \geq 7$ 或 $x \leq -1$ ，則實數對 $(p, q) = \underline{\hspace{2cm}}$ 。

5. 方程式 $|x+1| + |2x-3| = 4$ 的實數解為 $\underline{\hspace{2cm}}$ 。

6. 解不等式 $\begin{cases} |x-1| \geq 3 \\ |2x+3| < 5 \end{cases}$ 。



4. $(\frac{-1}{3}, \frac{4}{3})$ 5. 0 或 2 6. $-4 < x \leq -2$



回家作業



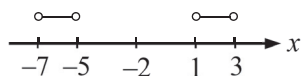
7. (1) 某產品背後包裝重量的標示如右圖所示： (北一女中學資)

若此產品重量為 x g，試以絕對值符號表示重量 x 的範圍。

容量： 30 ± 3 g

產地：台灣宜蘭

- (2) 請利用一條絕對值不等式表示以下的數線區間。



本題無數位影音服務，
請同學詳實練習並善用輔導資源

8. 試求不等式 $4 < |2 - 3x| \leq 16$ 之解為_____。

本題無數位影音服務，
請同學詳實練習並善用輔導資源



7. (1) $|x - 30| \leq 3$ (2) $3 < |x + 2| < 5$ 8. $-\frac{14}{3} \leq x \leq -\frac{3}{2}$ 或 $2 < x \leq 6$



回家作業



9. (103 學測試題)

請問滿足絕對值不等式 $|4x - 12| \leq 2x$ 的實數 x 所形成的區間，
其長度為下列哪一個選項？

- (1) 1 (2) 2 (3) 3 (4) 4 (5) 6 。



9. (4)

數位 延伸閱讀



1. (能力指標：絕對值性質)

(1) $a, b \in \mathbb{R}$ ，證明 $|a| + |b| \geq |a+b|$ 。

(2) 利用(1)結果證明： $|a-b| \geq |a| - |b|$ 。

解：(1) 有關絕對值證明一律採平方法

$$\begin{aligned} (|a| + |b|)^2 - (|a+b|)^2 &= a^2 + b^2 + 2|ab| - (a+b)^2 \\ &= a^2 + b^2 + 2|ab| - a^2 - b^2 - 2ab \\ &= 2(|ab| - ab) \geq 0 \end{aligned}$$

$$\therefore (|a| + |b|)^2 \geq (|a+b|)^2 \Rightarrow |a| + |b| \geq |a+b|$$

(2) $\because |a| + |b| \geq |a+b|$

$$\therefore |a-b| + |b| \geq |a-b+b| \Rightarrow |a-b| \geq |a| - |b|$$

RGMN



2. (能力指標：性質循環應用)

(1) $|a| < 1, |b| < 1$ ，證明 $\left| \frac{a+b}{1+ab} \right| < 1$ 。

(2) 利用(1)的結果及 $|c| < 1$ ，證明 $\left| \frac{a+b+c+abc}{1+ab+bc+ca} \right| < 1$ 。

解：(1) 有關絕對值證明題一律採平方法

$$\begin{aligned} \left(\left| \frac{a+b}{1+ab} \right| \right)^2 - 1 &= \frac{(a+b)^2}{(1+ab)^2} - 1 \\ &= \frac{a^2 + b^2 + 2ab - 1 - 2ab - a^2b^2}{(1+ab)^2} \\ &= \frac{-(a^2-1)(b^2-1)}{(1+ab)^2} < 0 \quad \left(\begin{array}{ll} \because |a| < 1 & \therefore a^2 < 1 \\ \because |b| < 1 & \therefore b^2 < 1 \end{array} \right) \end{aligned}$$

$$\therefore \left| \frac{a+b}{1+ab} \right|^2 < 1 \Rightarrow \left| \frac{a+b}{1+ab} \right| < 1$$

(2) 由(1)的結果知 $\left| \frac{a+b}{1+ab} \right| < 1$ 且 $|c| < 1$

$\Rightarrow$

NEAX



3. (能力指標：性質循環應用)

(1) $|a| < 1, |b| < 1$ ，證明 $ab + 1 > a + b$ 。

(2) 由(1)結果， $|c| < 1$ ，證明 $abc + 2 > a + b + c$ 。

解：

TLPV



4. (能力指標：絕對值不等式)

證明： $\frac{|a+b|}{1+|a+b|} \leq \frac{|a|}{1+|a|} + \frac{|b|}{1+|b|}$ 。

解：

IHC

