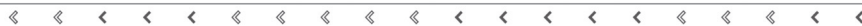


主題 20 指對數綜合題型



例 1. (能力指標：複利)

小沂參加銀行存款，約定以年利率1%的複利，一年為一期計息。

若小沂在今年年初存入 10000 元，則 15 年後可得本利和 _____ 元。

解：



例 2. (能力指標：指數估算)

設 a, b 為實數，若 10^a 是 10^b 的 2018 倍，則 $a - b$ 最接近哪一個整數？

- (1) 0 (2) 1 (3) 2 (4) 3 (5) 4

解：



例 3. (能力指標：指數應用)

SBYN



所謂「1.01 的勤勉法則」是指如果你每天都比前一天進步 0.01，一年以後你將具備有現在的 37.8 倍的能力，此結果是由 1.01^{365} 約等於 37.8 而得到。如果情況相反，你每天都比前一天退步 0.01，請估算你 365 天之後，大約還有現在的多少倍能力，請選出最接近的選項。

- (1) 0.3 (2) 0.2 (3) 0.05 (4) 0.02 (5) 0.001

解：

例 4. (能力指標：指數應用)



某一類的傳染病接觸，感染後人便會產生抗體而終身免疫，此類的傳染病的感染率 $I(t)$ 定義為

$$I(t) = \frac{\text{在時間 } t \text{ 時被感染過的人數}}{\text{這城市的總人數}},$$

而且當 $I(t) = \frac{1}{2}$ 的時間 t 是該傳染病的傳播高峰。根據衛生組織的調查研究

建立了一個關於 $I(t)$ 的數學模型： $I(t) = \frac{1}{1 + a \cdot 7^{-bt}}$ 。某種此類的傳染病在

某個城市蔓延，剛開始(即 $t = 0$ 時)，約有 2% 的人口被感染，當 $t = 3$ 週，約有 12.5% 的人口被感染，試回答下列問題：

- (1) 求出 $(a, b) = \underline{\hspace{2cm}}$ 。
- (2) 請問 9 週之後，該城市約有多少比例的人口被感染此傳染病？

解：

例 5. (能力指標：指對數運算)



一個特製的計算機有一個常用對數鍵 $\boxed{\log x}$ 與指數鍵 $\boxed{100^x}$ ，若輸入一個數字後再按 $\boxed{\log x}$ ，計算機螢幕會輸出該數字的對數值，例如：輸入數字 10 後再按 $\boxed{\log x}$ 會得到 1。若輸入一個數字後再按 $\boxed{100^x}$ ，計算機螢幕會輸出該數字的指數值，例如：輸入數字 1 後再按 $\boxed{100^x}$ 會得到 100。

根據以上的說明，若輸入數字 2，再交替按對數鍵 $\boxed{\log x}$ 與指數鍵 $\boxed{100^x}$ 各 3 次，即 $2 \rightarrow \boxed{\log x} \rightarrow \boxed{100^x} \rightarrow \boxed{\log x} \rightarrow \boxed{100^x} \rightarrow \boxed{\log x} \rightarrow \boxed{100^x}$ ，則該特製計算機螢幕輸出的數字最接近下列何者？

- (1) 100 (2) $\sqrt{100}$ (3) 10000 (4) 16 (5) 256

解：

例 6. (能力指標：計算機)



小明利用智慧型手機上的計算機功能操作指數與對數的運算，

當他依序鍵入 3 , x^y , 5 , $=$ 時，結果依序顯示 3 , $3^{\wedge}$, $3^{\wedge}5$, $[243]$ ，表示 $3^5 = 243$ ；當他依序鍵入 $\log$, 3 , $)$, $=$ 時，結果依序顯示 $\log($, $\log(3)$, $\log(3)$, $[0.4771212547197]$ ，表示 $\log 3 \approx 0.4771212547197$ 。

如果小明依序鍵入 8 , x^y , $($, $\log$, 5 , $)$, $\div$, $\log$, 2 , $)$, $)$, $=$ ，那麼最後的結果會顯示_____。

解：

例 7. (能力指標：對數應用)

天空中星星亮度的「視星等」與對數函數有關。天文學家以織女星的亮度為標準，令織女星的亮度為 I_0 ，被觀察的星星的亮度為 I ，



將其星等定義為 $m = -\frac{5}{2} \log \left(\frac{I}{I_0} \right)$ 。在星空中，人類肉眼可見最暗的

星星為 6 等星，而天蠍座的心宿二為 1 等星，求：

- (1) 心宿二的亮度是 6 等星之亮度的多少倍？ _____
- (2) 另一顆恆星 M 的亮度為心宿二的 1000 倍，求恆星 M 的星等？ _____

解：

例 8. (能力指標：對數應用)

健康好喝的蜂蜜檸檬水，網路上盛行的完美比例是：20 ml (毫升) 的蜂蜜，10 ml (毫升) 的檸檬，400 ml (毫升) 的水。



在化學上我們用水溶液氫離子的濃度 $[H^+]$ (莫耳/升) 來定義該水溶液的酸鹼值(pH 值)，其關係為 $pH = -\log[H^+]$ 。

已知蜂蜜的 pH 值約為 4，檸檬的 pH 值約為 2.5，水的 pH 值約為 7，則下列哪些選項正確？

- (1) 甲溶液 pH 值為 4，乙溶液 pH 值為 5，則甲的氫離子濃度是乙的 10 倍
- (2) pH 值 4 的氫離子濃度小於 pH 值 5 的氫離子濃度
- (3) 100 ml 的蜂蜜加上 100 ml 的水，合成的蜂蜜水 pH 值為 5.5
- (4) 100 ml 的蜂蜜加上 400 ml 的水，合成的蜂蜜水 pH 值小於 5
- (5) 網路上的完美比例蜂蜜檸檬水，其 pH 值小於 4

解：

例 9. (成功高中學資)

我們常用 pH 值來表達溶液的酸鹼程度。若以 $[H^+]$ 表示溶液中的氫離子濃度，則 pH 值 $= -\log[H^+]$ 。例如純水在 $25^\circ C$ 時的 $[H^+] = 10^{-7}$ 莫耳/升，因此純水的 pH 值為 $-\log 10^{-7} = 7$ 。今有一杯 pH 值 $= 2.8$ 的檸檬汁、一杯 pH 值 $= 3.8$ 的橘子汁與一杯 pH 值 $= 6.8$ 的牛奶，請問：

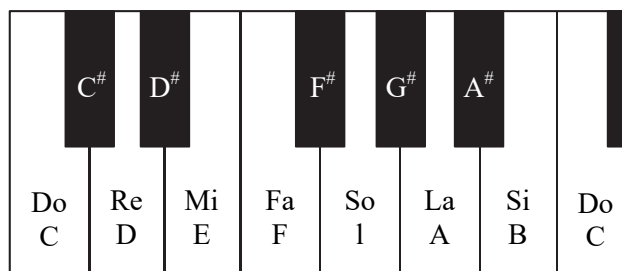
- (1) 檸檬汁的氫離子濃度是橘子汁氫離子濃度的幾倍？
- (2) 牛奶的氫離子濃度是橘子汁氫離子濃度的幾倍？

解：

例 10. (北一女中學資)

- (1) 「十二平均律」是鋼琴音階的依循規則：每一個音的弦長都是前一個音弦長的 $\frac{1}{\sqrt[12]{2}}$ 倍(例如： C 與 $C^\sharp$ ， E 與 F)。設第一個音的弦長為 1，則第 n 個音的弦長為 $\frac{1}{2}$ 時，則 n 的值為何？
- (2) 已知鋼琴音階的頻率與音的弦長成反比，若將鋼琴鍵盤所表現的音階一個「八度」平均分成十二等份，每等分稱為半音，音高八度音指的是頻率乘上二倍，八度音的頻率分為十二等分，即是分為十二項的等比數列。如下圖，已知(最左側的 C)中央 Do 上的 La (A)發出的頻率為 $440Hz$ ，通常被當作標準音高，則中央 Do 發出的頻率為多少 Hz ？(可用計算機，並四捨五入至整數)

解：



指數與對數綜合題型解析

1.【答】：11609 (元)

$$\begin{aligned}\text{【解】：}1^\circ \text{ 本利和} &= 10000\left(1 + \frac{1}{100}\right)\left(1 + \frac{1}{100}\right) \cdots \left(1 + \frac{1}{100}\right) \\ &= 10000\left(1 + \frac{1}{100}\right)^{15} = 10000(1.01)^{15} \\ &\approx 10000 \times 1.1609 = 11609 \text{ (元)}\end{aligned}$$

2.【答】：(4)

$$\begin{aligned}\text{【解】：}1^\circ 10^a &= 10^b \times 2018 \Rightarrow 10^{a-b} = 2018 \\ &\Rightarrow a - b = \log 2018 \approx 3.3049 \\ &\text{最接近整數 } 3 \\ &\therefore \text{故選 (4)}\end{aligned}$$

3.【答】：(4)

$$\begin{aligned}\text{【解】：}1^\circ \text{ 退步 } 0.01 &\Rightarrow \text{每一天變成 } 0.99 \\ &\therefore (0.99)^{365} = 0.0255 \cdots \\ &\approx 0.02 \\ &\text{故選 (4)}\end{aligned}$$

4.【答】：(1) $(49, \frac{1}{3})$ (2) 87.5%

$$\begin{aligned}\text{【解】：(1) } 1^\circ t = 0 &\Rightarrow I(0) = \frac{1}{1 + a \times 7^0} = \frac{2}{100} \Rightarrow \frac{1}{1 + a} = \frac{1}{50} \\ &\Rightarrow 1 + a = 50 \Rightarrow a = 49 \\ 2^\circ t = 3 &\Rightarrow I(3) = \frac{1}{1 + 49 \times 7^{-3b}} = \frac{12.5}{100} \Rightarrow \frac{1}{1 + 7^{2-3b}} = \frac{1}{8} \\ &\Rightarrow 1 + 7^{2-3b} = 8 \Rightarrow 7^{2-3b} = 7 \Rightarrow 2 - 3b = 1 \Rightarrow b = \frac{1}{3} \\ (2) t = 9 &\Rightarrow I(9) = \frac{1}{1 + 49 \times 7^{\frac{1}{3} \times 9}} = \frac{1}{1 + 7^3} \\ &= \frac{7}{7 + 1} = \frac{7}{8} \times 100\% = 87.5\%\end{aligned}$$

5.【答】：(5)

【解】： $2 \rightarrow 100^{\log 2} \rightarrow \log 4 \rightarrow 100^{\log 4} \rightarrow \log 16 \rightarrow 100^{\log 16}$

$$\begin{array}{ccc} \parallel & \parallel & \parallel \\ (10^{\log 2})^2 & (10^{\log 4})^2 & (10^{\log 16})^2 \\ \parallel & \parallel & \parallel \\ 2^2 = 4 & 4^2 = 16 & 16^2 = 256 \end{array}$$

故選 (5)

6.【答】：125

【解】： 1° 原數 $= 8^{\log 5 + \log 2} = 8^{\frac{\log 5}{\log 2}}$

$$2^\circ \text{ 令 } \begin{cases} \log 5 = m \\ \log 2 = n \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 10^m = 5 \\ 10^n = 2 \rightarrow (10^n)^{\frac{1}{n}} = 2^{\frac{1}{n}} = 10 \end{cases}$$

$$\text{原數} = 8^{\frac{\log 5}{\log 2}} = 8^{\frac{m}{n}} = (2^{\frac{m}{n}})^3 = [(2^{\frac{1}{n}})^m]^3 = (10^m)^3 = 5^3 = 125$$

7.【答】：(1) 100 (2) $-\frac{13}{2}$

$$\begin{aligned} \text{【解】：(1)} \quad \begin{cases} 6 = -\frac{5}{2} \log\left(\frac{I_1}{I_0}\right) \\ 1 = -\frac{5}{2} \log\left(\frac{I_2}{I_0}\right) \end{cases} & \Rightarrow \begin{cases} \frac{I_1}{I_0} = 10^{-\frac{12}{5}} \\ \frac{I_2}{I_0} = 10^{-\frac{2}{5}} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} I_1 = I_0 \times 10^{-\frac{12}{5}} \\ I_2 = I_0 \times 10^{-\frac{2}{5}} \end{cases} \\ & \Rightarrow \frac{I_2}{I_1} = 10^{-\frac{2}{5} + \frac{12}{5}} = 100 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{(2)} \quad \begin{cases} 1 = -\frac{5}{2} \log\left(\frac{I_2}{I_0}\right) \\ k = -\frac{5}{2} \log\left(\frac{I_M}{I_0}\right) \end{cases} & \Rightarrow \begin{cases} I_2 = I_0 \times 10^{-\frac{2}{5}} \\ I_M = I_0 \times 10^{-\frac{2k}{5}} \end{cases} \\ \Rightarrow \frac{I_M}{I_2} = 10^{-\frac{2k}{5} + \frac{2}{5}} = 1000 = 10^3 & \Rightarrow -\frac{2k}{5} + \frac{2}{5} = 3 \\ \Rightarrow \frac{2k}{5} = -\frac{13}{5} & \Rightarrow k = -\frac{13}{2} \end{aligned}$$

8.【答】：(1)(4)

【解】：(1) 正確

$$\begin{cases} 4 = -\log[H_{\text{甲}}^+] \\ 5 = -\log[H_{\text{乙}}^+] \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} H_{\text{甲}}^+ = 10^{-4} \\ H_{\text{乙}}^+ = 10^{-5} \end{cases} \Rightarrow \frac{H_{\text{甲}}^+}{H_{\text{乙}}^+} = \frac{10^{-4}}{10^{-5}} = 10$$

(2) 錯誤

$$\begin{aligned} H_{\text{甲}}^+ &= 10^{-4} \\ H_{\text{乙}}^+ &= 10^{-5} \Rightarrow 10^{-4} > 10^{-5} \end{aligned}$$

(3) 錯誤

$$\begin{array}{|c|} \hline 10^{-4} \\ \hline \end{array} + \begin{array}{|c|} \hline 10^{-7} \\ \hline \end{array} = \begin{array}{|c|} \hline x \\ \hline \end{array}$$
$$100 + 100 = 200$$

蜂蜜 水

$$\Rightarrow 100 \times 10^{-4} + 100 \times 10^{-7} = 200x$$

$$\Rightarrow x = \frac{100(10^{-4} + 10^{-7})}{200} > \sqrt{10^{-4} \times 10^{-7}} = 10^{-5.5}$$

$$\text{又 } 10^{-4} \neq 10^{-7} \Rightarrow pH < 5.5$$

(4) 正確

$$\begin{array}{|c|} \hline 10^{-4} \\ \hline \end{array} + \begin{array}{|c|} \hline 10^{-7} \\ \hline \end{array} = \begin{array}{|c|} \hline y \\ \hline \end{array}$$
$$100 + 400 = 500$$

$$\Rightarrow 100 \times 10^{-4} + 400 \times 10^{-7} = 500y$$

$$\Rightarrow y = \frac{100 \times 10^{-4} + 400 \times 10^{-7}}{500} = \frac{10^{-4} + 4 \times 10^{-7}}{5} = 0.00002008$$

$$\approx 2.008 \times 10^{-5} > 10^{-5} \Rightarrow pH < 5$$

(5) 錯誤

$$\begin{array}{|c|} \hline 10^{-4} \\ \hline \end{array} + \begin{array}{|c|} \hline 10^{-2.5} \\ \hline \end{array} + \begin{array}{|c|} \hline 10^{-7} \\ \hline \end{array} = \begin{array}{|c|} \hline z \\ \hline \end{array}$$
$$20 + 10 + 400 = 430$$

$$\Rightarrow 20 \times 10^{-4} + 10 \times 10^{-2.5} + 400 \times 10^{-7} = 430z$$

$$\Rightarrow z = \frac{2 \times 10^{-3} + 10^{-1.5} + 4 \times 10^{-5}}{430}$$

$$= \frac{2 \times 10^{-3} + \sqrt{10} \times 10^{-2} + 4 \times 10^{-5}}{430} < \frac{2 \times 10^{-3} + 4 \times 10^{-2} + 4 \times 10^{-5}}{430}$$

$$= \frac{0.04204}{430} < \frac{0.043}{430} = 10^{-4}$$

$$\therefore z < 10^{-4} \Rightarrow pH > 4$$