



常用對數

主題

19

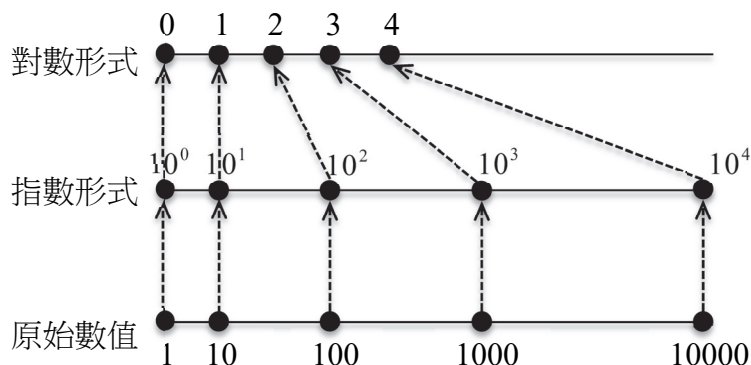
常用對數

NAKK



【觀念一】數量級 (Power)

- (1) $10^n \Rightarrow \text{ten to the power of } n$ ，此處的 n ，可以視為一個數所在的量級。
- (2) 任何數可以用科學記號表示，可以看出數所在的量級。
- (3) 人類對宇宙的數字產生三種形式：原始數值、指數形式與對數形式，我們用以下的圖，來說明：



- (4) 由上圖看出：

$$\log_{10} 1 = \log 1 = 0 \Rightarrow 10^0 = 10^{\log 1} = 1$$

$$\log_{10} 10 = \log 10 = 1 \Rightarrow 10^1 = 10^{\log 10} = 10$$

$$\log_{10} 100 = \log 100 = 2 \Rightarrow 10^2 = 10^{\log 100} = 100$$

$$\log_{10} 1000 = \log 1000 = 3 \Rightarrow 10^3 = 10^{\log 1000} = 1000$$

$$\log_{10} 10000 = \log 10000 = 4 \Rightarrow 10^4 = 10^{\log 10000} = 10000$$

- (5) 原始數值與對數值的關係

$$\textcircled{1} \log(\text{原始數值}) = \text{對數值(數量級 power)}$$

$$\textcircled{2} \text{原始數值} = 10^{\text{對數值}} = 10^{\log(\text{原始數值})} = 10^{\text{數量級}} = 10^{\text{power}}$$

【觀念二】對數定義

- (1) $10^{\log a} = a \Rightarrow 10^x = a \Rightarrow x = \log a$ (稱 a 的常用對數) ,
此為指數型式變成對數型式。

[立即練習]

$$10^x = 2 \Rightarrow x =$$

$$10^y = 3 \Rightarrow y =$$

$$10^m = 7 \Rightarrow m =$$

- (2) $\log a = x \Rightarrow \log_{10} a = x \Rightarrow 10^x = a$, 此為對數型式變成指數型式。

[立即練習]

$$\log a = 2 \Rightarrow a =$$

$$\log 1 =$$

$$\log b = 4 \Rightarrow b =$$

$$\log 100 =$$

$$\log t = -1 \Rightarrow t =$$

$$\log 0.1 =$$

$$\log s = -3 \Rightarrow s =$$

$$\log \frac{1}{1000} =$$

【觀念三】對數值估算

- (1) 已知 $10^x = 2$, 如何估計 x 的值 ?
(2) 我們可以採用指數十分逼近夾擊來估算 , 方法如下 :

步驟一 $10^0 = 1, 10^1 = 10 \Rightarrow 0 < x < 1$



步驟二 $10^{0.3} = 1.995, 10^{0.4} = 2.512 \Rightarrow 0.3 < x < 0.4$



步驟三 $10^{0.30} = 1.995, 10^{0.31} = 2.042 \Rightarrow 0.30 < x < 0.31$



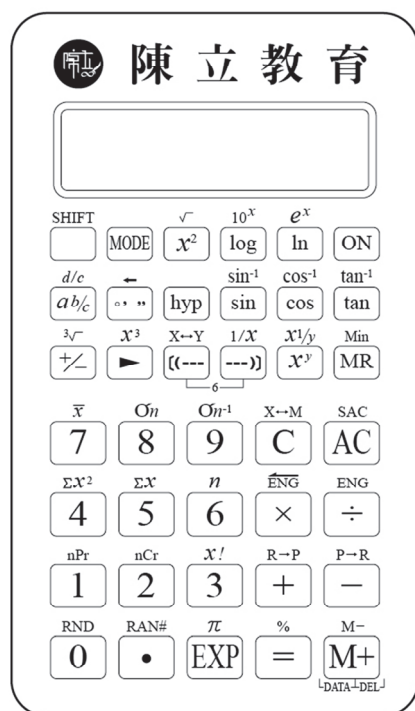
步驟四 $10^{0.301} = 1.999, 10^{0.302} = 2.0045 \Rightarrow 0.301 < x < 0.302$



步驟五 $10^{0.3010} = 1.9999, 10^{0.3011} = 2.003 \Rightarrow 0.3010 < x < 0.3011$

(3) 按此步驟往下進行， x 的左右近似值。越來越接近，最後會得到一個 x 值，此 x 值即為 $x = \log 2$ 。

(4) 計算機



(5) 計算機常用對數求值

$$\log 3: \boxed{3} \Rightarrow \boxed{\log} \Rightarrow \boxed{=}$$

$$\log 4.8: \boxed{4.8} \Rightarrow \boxed{\log} \Rightarrow \boxed{=}$$

$$\log x: \boxed{x} \Rightarrow \boxed{\log} \Rightarrow \boxed{=}$$

【觀念四】常用對數性質

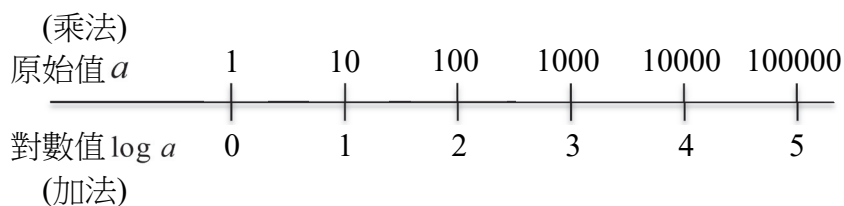
(1) 性質一：常用對數值增加 1 $\Leftrightarrow$ 原始值增為 10 倍。

$$\text{《說明》} \begin{cases} \log M = a \\ \log N = a + 1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} M = 10^a \\ N = 10^{a+1} \end{cases} \Rightarrow N = 10^a \times 10 = M \times 10 = 10M$$

(2) 性質二：常用對數值減少 1 $\Leftrightarrow$ 原始值減為 $\frac{1}{10}$ 倍。

$$\text{《說明》} \begin{cases} \log T = a \\ \log S = a - 1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} T = 10^a \\ S = 10^{a-1} \end{cases} \Rightarrow S = 10^a \times 10^{-1} = T \times \frac{1}{10} = \frac{1}{10}T$$

(3) 圖示：



例 1. (能力指標：計算機求值)

請完成下列各小題：

(1) $10^{4.8} =$

(2) $\log 4.8 =$

(3) $10^a = 6.5 \Rightarrow a = \log 6.5 =$

(4) $\log b = 6.5 \Rightarrow b = 10^{6.5} =$

解： (1) $10^{4.8} = 63095.73444\cdots$

(2) $\log 4.8 = 0.68124123\cdots$

(3) $10^a = 6.5 \Rightarrow a = \log 6.5 = 0.81291335\cdots$

(4) $\log b = 6.5 \Rightarrow b = 10^{6.5} = 3162277.6601\cdots$

例 2. (各校段考試題)

(1) 試求 $\log(10^{12}) + 10^{\log 7} + \log 0.01 =$ _____。

(2) 已知 $a = \log 40$, $b = \log 25$, 則 $a + b =$ _____。

(3) 已知 $k = \log 3$, 則 $1000^k + 100^{-k} =$ _____。

解：



例 3. (中山女中)

請選出正確的選項。

(參考數值 $\log 2 \approx 0.3010$, $\log 3 \approx 0.4771$, $\log 7 \approx 0.8450$)

- (1) 對每個 $a > 0$ ，都有唯一的實數 x 滿足 $10^x = a$ ，這個實數 x 記為 $\log a$
- (2) 若 a, b 為正實數 $\log a = 1.5$ 且 $\log b = 2.2$ ，則 ab^2 的整數部分為 6 位數
- (3) $\log 101415$ 介於 5 與 6 之間
- (4) 1.3579×10^{-7} 的小數點後第 8 位數字開始不為 0
- (5) 2^{70} 的整數部分為 22 位數

解：

例 4. (各校段考試題)

- (1) 若 $\log a = 3 + \log 4.72$ ， $\log b = 2 + \log 0.236$ ，則 a 是 b 的 _____ 倍。
- (2) 已知 $a, b > 0$ ，且滿足 $\log(ab^2) = 8 + \log 1.28$ ， $\log(a^2b) = 7 + \log 3.2$ ，
求 $\log(a+b) =$ _____。

解：

例 5. (建國中學)

實數 a 、 b 之間的關係為 $2a = 4 + 3\log b$ ，則當 b 變為 10 倍時， a 增加多少？

解：

例 6. (成功高中)

pH 值可以用來表示溶液的酸鹼程度，若 $[H^+]$ 表示溶液中氫離子的濃度，則 $pH = -\log[H^+]$ 。假設檸檬汁的 $[H^+] = 10^{-3}$ ，則檸檬汁的 $pH = 3$ 。若將 $pH = 3$ 的檸檬汁與 $pH = 4$ 的橘子汁以 1：3 的比例混合，求混合溶液的 pH 值約為多少？（四捨五入至小數點以下第一位， $\log 3.25 \approx 0.5119$ ）

解：

例 7. (實驗高中)

目前國際使用「芮氏規模」來表示地震的強度，設 $E(r)$ 為地震「芮氏規模 r 」震央所釋放出的能量(單位：焦耳)，且 r 與 $E(r)$ 的關係如下：

$$\log E(r) = 4.8 + 1.5r \circ$$

- (1) 九二一地震，發生於民國 88 年 9 月 21 日，震央位於南投集集，其芮氏規模為 7.3，試問其震央所釋放的能量 $E(7.3)$ 的整數部分為幾位數？
- (2) 呈上，三三一地震，發生於民國 91 年 3 月 31 日，震央位於花蓮秀林，其芮氏規模為 6.8，試問「九二一地震」其震央所釋放的能量約為「三三一地震」時震央所釋放的能量的多少倍？($\log 31.623 \approx 1.5$ ，小數點以下無條件進位至整數)
- (3) 呈上，九二一地震震央所釋出的能量約為西元 1964 年白河地震震央所釋出的能量的 30 倍，試問白河地震的芮氏規模為多少？
(四捨五入至小數點第一位， $1.4771 \div 3 \approx 0.4924$)(4 分)

解：

例 8. (建國中學學資)

所謂「梅森質數」是指形如 $2^p - 1$ 的質數，其中 p 為質數。「GIMPS 計畫」是透過網路連接全球各地的電腦資源搜尋梅森質數。已知 $2^{521} - 1$ 是一個質數。試回答下列問題：

- (1) 根據常用對數的定義 $2 = 10^{\log 2}$ ，令 $2^{521} = 10^k$ ，試用 $\log 2$ 來表示 k 。
- (2) 用計算機求出 k 的近似值。(四捨五入至小數點後第一位)
- (3) 請問質數 $2^{521} - 1$ 是幾位數？

解： (1) $2^{521} = (10^{\log 2})^{521} = 10^{521 \times \log 2}$ ， $k = 521 \times \log 2$

(2) 利用計算機可以求得 $k = 521 \times \log 2 \approx 156.8$

(3) $2^{521} - 1 \approx 10^{156.8} \Rightarrow 10^{156} < 2^{521} - 1 < 10^{157}$ ，故 $2^{521} - 1$ 是 157 位數



回家作業



1. $\log 2 + \log 5 = ?$

XHIB



2. $\log 5 + \log 8 + \log 25 = ?$

3. $\log a = 1.23, \log b = 3.23, \log c = -2.77$

(1) b 是 a 的幾倍？

(2) c 是 a 的幾倍？



1. 1 2. 3 3. (1) 100 (2) $\frac{1}{10000}$



回家作業



4. 在真實世界中，很多類型的數據通常都遵守「班佛定律：一堆從實際生活得出的數據中首位數字為 a 的比例約為 $\log(1 + \frac{1}{a})$ 。」審計部門常會用此定律來檢查帳目是否作假。試問：一堆數據中首位數字為 7 的比例約為多少百分比？
(可用計算機並四捨五入小數點後第一位) (建國中學學資)

本題無數位影音服務，
請同學詳實練習並善用輔導資源



4. 5.8%