

主題 1 常用記號

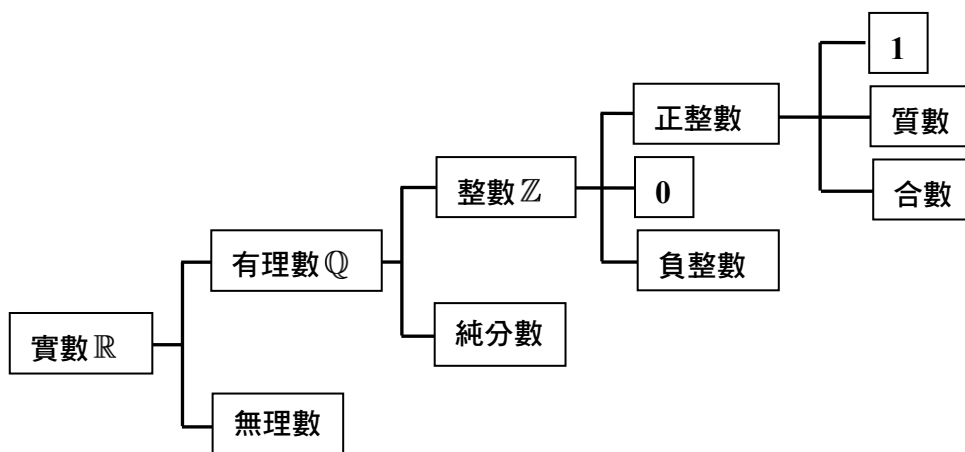
RWWF



1. 數系符號

(1) 實數結構：

實數內的組成與分類如下表所示，在之後的單元有更詳細的介紹。



(2) 整數集合的符號：

- ① 所有**整數 (integer)** 形成的集合，用_____表示。
- ② 所有**正整數 (positive integer)** 形成的集合，用_____表示。
- ③ 所有**負整數 (negative integer)** 形成的集合，用_____表示。
- ④ 所有**自然數 (natural number)** 形成的集合，用_____表示。

【說明】

在不同的領域中，自然數的定義可能會不相同，故在數學上會將兩個集合的符號作出區別。而定義中最主要的差別在於**有沒有包含 0 這個數字**。在高中課綱規定中，我們將自然數與正整數這兩者視為相同。

(3) 實數集合的符號：

- ① 所有實數 (real number) 形成的集合，用_____表示。
- ② 所有正實數 (positive number) 形成的集合，用_____表示。
- ③ 所有負實數 (negative number) 形成的集合，用_____表示。
- ④ 所有有理數 (rational number) 形成的集合，用_____表示。
- ⑤ 所有正有理數 (positive rational number) 形成的集合，用_____表示。

2. 邏輯符號

(1) 屬於的符號：

記號「 $\in$ 」代表_____。

- ① 當我們要表達「 x 是一個實數」時，可以用_____表示。
- ② 當我們要表達「 a 與 b 都是整數」時，可以用_____表示。

(2) 全稱符號：

記號「 $\forall$ 」代表_____。

【說例】

「對於任意正整數 x ，皆大於 0。」可表為：_____。

3. 極值符號

(1) 最大值符號：

「函數 $y = -(x-2)^2 + 5$ 的最大值 (maximum) 為 5」可記為_____。

(2) 最小值符號：

「函數 $y = 3(x-2)^2 + 7$ 的最小值 (minimum) 為 7」可記為_____。

主題 2 有理數

SBHY

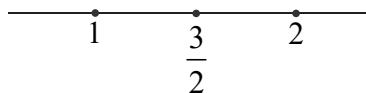


【觀念一】何謂有理數：凡是數可以寫成_____型式且 $p, q \in \mathbb{Z}, p \neq 0$ ，這樣的數稱為**有理數**，有理數集以_____表示。

《說明》分數： $\frac{1}{3}$ ，整數： $5 = \frac{5}{1}$ ，循環小數： $0.\overline{31} = \frac{31}{99}$ 皆為有理數

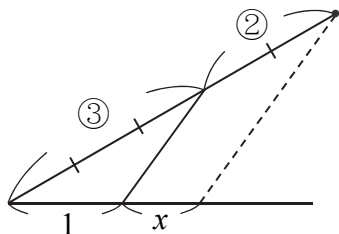
【觀念二】兩個有理數相加、相減、相乘、相除(分母 $\neq 0$)，其結果亦為_____，此種現象，稱為有理數對加法、減法、乘法、除法具有_____性。

【觀念三】在數線上有理數所對應的點稱為**有理點**。



【觀念四】利用尺規作圖作出 $\frac{2}{3}$ (已知單位長1)

方法 令 $x = \frac{2}{3} \Rightarrow \frac{x}{1} = \frac{2}{3} \Rightarrow \frac{3}{2} = \frac{1}{x} \rightarrow$ 放在右分母

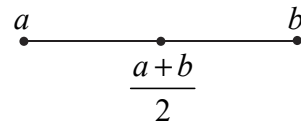


【觀念五】有理數的稠密性

$\Rightarrow$ _____

《說明》1° 二有理數 a, b ($a < b$)，找一數 $x = \frac{a+b}{2}$

2° $x = \frac{a+b}{2} \in \mathbb{Q}$ (封閉性)



3° $b - \frac{a+b}{2} = \frac{b-a}{2} > 0 \quad \therefore b > \frac{a+b}{2}$

4° $a - \frac{a+b}{2} = \frac{a-b}{2} < 0 \quad \therefore a < \frac{a+b}{2}$

綜合3° 4°知： $a < \frac{a+b}{2} < b$

【觀念六】自然數(正整數)與整數有 _____ 性。

(1) 自然數的分散性： $a, b \in \mathbb{N}$ ，若 $a \neq b$ ，則 _____。

(2) 整數的分散性： $a, b \in \mathbb{Z}$ ，若 $a \neq b$ ，則 _____。

(3) 其中 $|a-b|$ 數線上幾何意義表示：

_____。


例 1. (能力指標：真假分數法則)

a, b, x, y 為正數且 $a > b, x > y$

(1) 比較 $\frac{a}{b}, \frac{a+x}{b+x}, \frac{a+y}{b+y}$ 大小

(2) 比較 $\frac{b}{a}, \frac{b+x}{a+x}, \frac{b+y}{a+y}$ 大小

解：(1) 假分數法則： $\frac{2}{1} > \frac{3}{2} > \frac{4}{3} > \frac{5}{4} \Rightarrow$

$$\therefore \frac{a}{b} > \frac{a+y}{b+y} > \frac{a+x}{b+x}$$

證：1° $\frac{a}{b} - \frac{a+y}{b+y} = \frac{a(b+y) - b(a+y)}{b(b+y)} = \frac{(a-b)y}{b(b+y)} > 0 \Rightarrow \frac{a}{b} > \frac{a+y}{b+y}$

$$\begin{aligned} 2^\circ \frac{a+y}{b+y} - \frac{a+x}{b+x} &= \frac{(a+y)(b+x) - (a+x)(b+y)}{(b+y)(b+x)} = \frac{ax+by-ay-bx}{(b+y)(b+x)} \\ &= \frac{(a-b)(x-y)}{(b+y)(b+x)} > 0 \Rightarrow \frac{a+y}{b+y} > \frac{a+x}{b+x} \end{aligned}$$

由1°, 2° 知 $\frac{a}{b} > \frac{a+y}{b+y} > \frac{a+x}{b+x}$

(2) 真分數法則： $\frac{1}{2} < \frac{2}{3} < \frac{3}{4} < \frac{4}{5} \Rightarrow$

$$\therefore \frac{b}{a} < \frac{b+y}{a+y} < \frac{b+x}{a+x}$$

證：1° $\frac{b}{a} - \frac{b+y}{a+y} = \frac{b(a+y) - a(b+y)}{a(a+y)} = \frac{(b-a)y}{a(a+y)} < 0 \Rightarrow \frac{b}{a} < \frac{b+y}{a+y}$

$$\begin{aligned} 2^\circ \frac{b+y}{a+y} - \frac{b+x}{a+x} &= \frac{(b+y)(a+x) - (a+y)(b+x)}{(a+y)(a+x)} = \frac{bx+ay-ax-by}{(a+y)(a+x)} \\ &= \frac{(b-a)(x-y)}{(a+y)(a+x)} < 0 \Rightarrow \frac{b+y}{a+y} < \frac{b+x}{a+x} \end{aligned}$$

由1°, 2° 知 $\frac{b}{a} < \frac{b+y}{a+y} < \frac{b+x}{a+x}$

例 2. (能力指標：循環小數)

將下列循環小數化為分數：

- (1) $0.\overline{7}$ (2) $0.\overline{73}$ (3) $0.4\overline{56}$ (4) $0.\overline{9}$ (5) $1.0\overline{25}$

解：



例 3. (能力指標：循環小數)

請選出正確的選項：

- (1) $0.\overline{35} + 0.\overline{65} = 1$ (2) $0.\overline{35} > 0.354$
(3) $0.\overline{34} = 0.34\overline{3}$ (4) $\frac{169}{325}$ 化成小數後是有限小數
(5) $\frac{3}{7}$ 化成小數後是循環小數，小數點後第 100 位數字是 5

解：



例 4. (能力指標：四捨五入)

有一個**既約分數**(最簡分數)的分子與分母相差7，將其化為小數並四捨五入至小數點後第一位得0.5，求這個分數是多少？

解：



例 5. (能力指標：有限小數)

$a < 100, a \in \mathbb{N}$ ，求 a 的最大值使 $\frac{105}{a}$ 為有限小數。

解：





回家作業



1. 設 a, b 皆為正整數，若 $\frac{b}{a}$ 介於 $\frac{3}{24}$ 與 $\frac{2}{17}$ 之間，試求 a 的最小值。



2. 試判斷下列哪些分數可化為有限小數？

(A) $\frac{12345}{180}$ (B) $\frac{513678}{275}$ (C) $\frac{325}{52}$ (D) $\frac{909}{108}$ (E) $\frac{975}{525}$ 。

3. 設 a 為 1 至 9 的正整數，且 $\frac{13}{90} < 0.1\overline{a2} < \frac{15}{90}$ ，則 a 的值為何？



1. 25 2. (B)(C) 3. $a = 5$ 或 6



回家作業



4. 若 $5.\overline{23} + 0.5\overline{23} = \frac{k}{990}$ 則 k 為 _____。

5. 試分別以手算及計算機操作，說明 $\frac{1}{17}$ 是否為循環小數？並求小數點後第 112 位數字。
(北一女中學資)

本題無數位影音服務，
請同學詳實練習並善用輔導資源



4. 5698 5. 7



回家作業



6. (105 數乙試題)

考慮有理數 $\frac{n}{m}$ ，其中 m 、 n 為正整數且 $1 \leq mn \leq 8$ 。則這樣的數值

(例如 $\frac{1}{2}$ 與 $\frac{2}{4}$ 同值，只算一個)共有幾個？

- (1) 14 個 (2) 15 個 (3) 16 個 (4) 17 個 (5) 18 個



6. (4)

數位[📶]延伸閱讀



1. (能力指標：連分數)

正整數 a, b, c, d 滿足 $a + \frac{1}{b + \frac{1}{c + \frac{1}{d}}} = \frac{37}{13}$,

求 $a - b + c - d$ 之值？

解：



2. (能力指標：整數分散性)

設 $a, b, c \in \mathbb{Z}$, 若 $|a+1| + 3|b+2| + 4|c+3| = 3$, 則數對 (a, b, c) 有 _____ 組解。

解：



主題 3 無理數



【觀念一】何謂無理數：凡是實數不可以寫成 _____ 型式且 $p, q \in \mathbb{Z}$, $p \neq 0$ ，這樣的數稱為**無理數**。

《說明》 $\sqrt{2}, \sqrt[3]{3}, \sqrt{7}, \pi, \dots$ 皆為無理數。

【觀念二】無理數可看成：不循環的無限小數。

【觀念三】無理數的性質：

$$a, b, c, d \in \mathbb{Q}, a + b\sqrt{2} = c + d\sqrt{2} \Leftrightarrow a = c \text{ 且 } b = d$$

《說明》(1) 若 $a = c$ 且 $b = d$ 則 $a + b\sqrt{2} = c + d\sqrt{2}$

(2) 若 $a + b\sqrt{2} = c + d\sqrt{2}$

$$\text{設 } b \neq d \Rightarrow (b - d)\sqrt{2} = c - a \Rightarrow \sqrt{2} = \frac{c - a}{b - d}$$

$$(\text{矛盾} \quad \because \sqrt{2} \notin \mathbb{Q}, \frac{c - a}{b - d} \in \mathbb{Q})$$

$\therefore$ 假設錯誤 $\therefore b = d$ ，代回原式得 $a = c$

【觀念四】無理數雙根號運算

$$(1) \sqrt{a + b + 2\sqrt{ab}} = \underline{\hspace{2cm}} \quad (a, b > 0)$$

$$(2) \sqrt{a + b - 2\sqrt{ab}} = \underline{\hspace{2cm}} \quad (a > b > 0)$$

$$\begin{aligned} \text{《說明》} \sqrt{a + b + 2\sqrt{ab}} &= \sqrt{(\sqrt{a})^2 + (\sqrt{b})^2 + 2\sqrt{a}\sqrt{b}} \\ &= \sqrt{(\sqrt{a} + \sqrt{b})^2} = \sqrt{a} + \sqrt{b} \end{aligned}$$

$$\text{同理 } \sqrt{a + b - 2\sqrt{ab}} = \sqrt{a} - \sqrt{b}$$

[立即練習]

(1) $\sqrt{5+2\sqrt{6}} =$

(2) $\sqrt{6-2\sqrt{5}} =$

(3) $\sqrt{4-2\sqrt{3}} =$

(4) $\sqrt{17+12\sqrt{2}} =$

(5) $\sqrt{2-\sqrt{3}} =$

【觀念五】(一) 尺規作圖的三要素

(1) 無刻度直尺 (2) 圓規 (3) 有限步驟

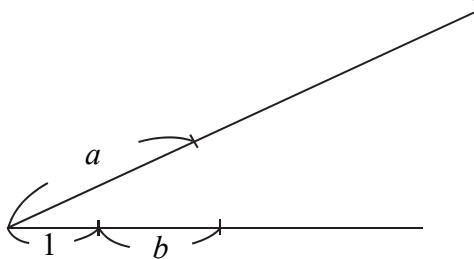
(二) 尺規數運算

(1) 加 (2) 減 (3) 乘 (4) 除 (5) 開平方根

《說明》 $\overbrace{\hspace{2cm}}^a$ $\overbrace{\hspace{1cm}}^b$ $\overbrace{\hspace{1cm}}^1$

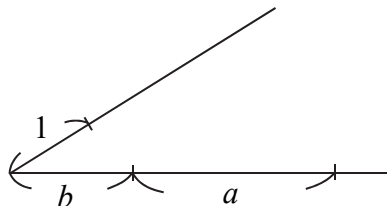
(3) 作 $a \times b$

$$\text{令 } x = ab \Rightarrow \frac{x}{a} = \frac{b}{1} \Rightarrow \frac{1}{b} = \frac{a}{x} \rightarrow \text{放在右分母}$$

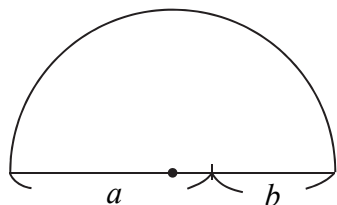


(4) 作 $\frac{a}{b}$

$$\text{令 } x = \frac{a}{b} \Rightarrow \frac{x}{1} = \frac{a}{b} \Rightarrow \frac{b}{a} = \frac{1}{x} \rightarrow \text{放在右分母}$$

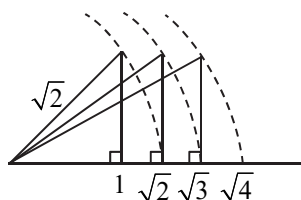


(5) 作 $\sqrt{ab}$

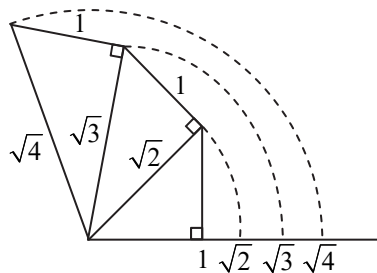


【觀念六】在數線作出 $\sqrt{a}$ 無理點

法 1



法 2



例 1. (能力指標：尺規作圖)

給定單位長度 1，下列何者可用尺規作圖？

- (A) $\sqrt{2+\sqrt{2}}$ (B) $\frac{\sqrt{3+\sqrt{2}}}{\sqrt{7}+1}$ (C) $\frac{\sqrt[3]{3}}{\sqrt{7}+1}$ (D) $\sqrt{\sqrt{3+\sqrt{7}}}$ (E) $\sqrt[3]{3+\sqrt[3]{7}}$

解：



例 2. (能力指標：無理數性質)

a, b 為有理數且滿足 $4a + 3\sqrt{5} + b = 2a\sqrt{5} + 1 - 2b\sqrt{5}$ ，求 a, b ？

解：原式可整理： $(4a + b) + 3\sqrt{5} = 1 + (2a - 2b)\sqrt{5}$

$\Rightarrow \left\{ \right.$



例 3. (能力指標：無理數性質)

$x^2 + ax + b = 0$, $a, b \in \mathbb{Q}$ ，若 $1 + \sqrt{2}$ 為其一根，求 a, b 及另一根？

解：1° $\because 1 + \sqrt{2}$ 為一根 $\Rightarrow (1 + \sqrt{2})^2 + a(1 + \sqrt{2}) + b = 0$

$$\Rightarrow (a + b + 3) + (a + 2)\sqrt{2} = 0$$

$\Rightarrow$



例 4. (能力指標：雙根號)

若 $\sqrt{11+6\sqrt{2}}$ 的整數部分為 a ，小數部分為 b ，

求 $\frac{1}{b} - \frac{7}{a+b} = \underline{\hspace{2cm}}$ 。

解： 1° $\sqrt{11+6\sqrt{2}} = \sqrt{11+2\sqrt{18}} = \sqrt{9} + \sqrt{2} = 3 + \sqrt{2}$

整數部分為 $a = \underline{\hspace{2cm}}$ ，小數部分為 $b = \underline{\hspace{2cm}}$

2° $\frac{1}{b} - \frac{7}{a+b} = \underline{\hspace{2cm}}$



例 5. (能力指標：雙根號)

$x, y \in \mathbb{Q}$ ，若 $x\sqrt{3-2\sqrt{2}} + y\sqrt{17-12\sqrt{2}} = \sqrt{43-30\sqrt{2}}$ ，求 x 與 y 。

解：



例 6. (能力指標：小數範圍)

正實數 a 的小數部分是 b ，若已知 $a^2 + b^2 = 38$ ，求 a 與 b 之值。

解：



例 7. (能力指標：有理數無理數性質)

下列敘述何者正確？

- (A) 若 a^2 與 a^6 都是有理數，則 a 是有理數。
- (B) 若 a^5 與 a^7 都是有理數，則 a 是有理數。
- (C) 已知 a, b 皆為有理數且 x, y 皆為無理數，若 $a + x = b + y$ ，
則 $a = b$ 且 $x = y$ 。
- (D) 兩個無理數相加的結果仍然是無理數。
- (E) 一個有理數與一個無理數之積必為無理數

解：





回家作業



1. 設正數 a 之小數部分為 b ，且 $a^2 + 2b^2 = 15$ ，求 $a + 2b$ 。



2. 下列何者為有理數？

(A) $\sqrt{0.4}$ (B) $\sqrt{0.08 \times 0.72}$ (C) $\sqrt{2+\sqrt{3}} - \sqrt{2-\sqrt{3}}$ (D) $\frac{2}{3}\pi$ 。

3. 設正數 a 的小數部分是 $b(b \neq 0)$ 且 $a + b^2$ 為整數，試求 b 為多少？



1. $3\sqrt{3}$ 2. (A)(B) 3. $b = \frac{\sqrt{5}-1}{2}$



回家作業



4. 若 a 是有理數， b 是無理數，則下列何者必為無理數？

- (A) $a+b$ (B) $a-b$ (C) ab (D) $\frac{a}{b}$ (E) a^2+b^2 。

5. 已知 a 為正有理數，且 $M = a\sqrt{19-8\sqrt{3}} + \frac{\sqrt{21-3\sqrt{48}}}{2a}$ 是有理數，則 M 為 _____。

6. 已知單位長，下列何者可以尺規作圖得知長度？請選出來。

- (1) $\frac{\sqrt{5}+1}{2}$ (2) $\sqrt{2+\sqrt{3}} - \sqrt{2-\sqrt{3}}$ (3) π (4) $\sqrt{0.4}$ (5) $\frac{\sqrt[3]{108}}{\sqrt[3]{4}}$ 。



4. (A)(B) 5. $\frac{5}{2}$ 6. (1)(2)(4)(5)



回家作業



7. 化簡 $\sqrt{4-\sqrt{15}} + \sqrt{4+\sqrt{15}} =$ _____。

簡 答

7. $\sqrt{10}$

數位[📶]延伸閱讀



1. (能力指標：無理數)

設 k 為一整數。已知 $\frac{k}{3} < \sqrt{31} < \frac{k+1}{3}$ ，則 $k =$ _____。

解：

MGZW



2. (能力指標：雙根號)

n 為正整數，且 $\frac{n}{2} < \sqrt{3+\sqrt{5}} + \sqrt{3-\sqrt{5}} < \frac{n+1}{2}$ ，則 n 為 _____。

解：

CCCH



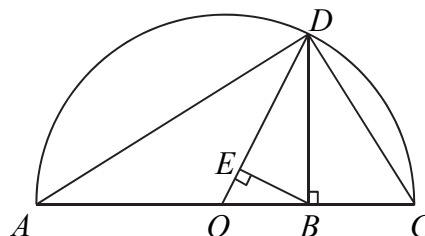
3. (能力指標：有理數)

圓心為 O 的半圓，如圖， $\overline{BD} \perp \overline{AC}$, $\overline{BE} \perp \overline{OD}$ ，若 $\overline{AB}$, $\overline{BC}$ 線段長均為有理數，則下列哪些線段的長度必為有理數？



- (A) $\overline{AD}$ (B) $\overline{BO}$ (C) $\overline{DE}$ (D) $\overline{BE}$ (E) $\overline{EO}$

解：



數位 延伸閱讀回家作業



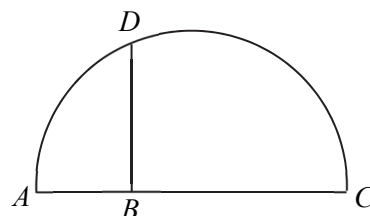
1. 平面上有共線三相異點 A 、 B 、 C ， B 介於 A 、 C 之間，

$\overline{AB} = 3 + 2\sqrt{3}$ 、 $\overline{BC} = -9 + 14\sqrt{3}$ ，若以 $\overline{AC}$ 為直徑作一

半圓，過 B 作 $\overline{AC}$ 垂直線交半圓於 D ， $\overline{BD}$ 的長度可化

簡為 $a + b\sqrt{3}$ (其中 a 、 b 都為正整數)，則數對

$(a, b) = \underline{\hspace{2cm}}$ 。



簡答

1. $(3, 4)$

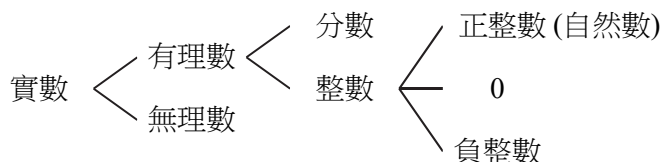
主題 4 實數

KBQS



【觀念一】何謂實數

有理數集與無理數集的聯集為實數集，以 _____ 表示。



【觀念二】實數的運算性質

- (1) 結合律： $(a+b)+c=a+(b+c)$ ， $(ab)c=a(bc)$
- (2) 交換律： $a+b=b+a$ ， $ab=ba$
- (3) 分配律： $a(b+c)=ab+ac$
- (4) 消去律：若 $a+c=b+c$ ，則 $a=b$
若 $ac=bc$ 則 $a=b$ ($c \neq 0$)

【觀念三】實數的次序性質

- (1) 三一律： $a < b$ ， $a = b$ ， $a > b$ 三者中恰一式成立
- (2) 遞移律：若 $a < b$ ， $b < c$ ，則 $a < c$
- (3) 加法律：若 $a < b$ ，則 $a+c < b+c$
- (4) 乘法律：若 $a < b$ 且 $c > 0$ ，則 $ac < bc$
若 $a < b$ 且 $c < 0$ ，則 $ac > bc$

【觀念四】實數性質

- (1) 若 $a \in \mathbb{R}$ ，則 $a^2 \geq 0$
- (2) 若 $a, b \in \mathbb{R}$ ，則 $a^2 + b^2 \geq 0$
- (3) 若 $a, b \in \mathbb{R}$ ， $a^2 + b^2 = 0$ 則 $a = b = 0$
- (4) 若 $a, b \in \mathbb{R}$ ， $a^2 + b^2 \leq 0$ 則知 $a^2 + b^2 = 0$ ，則 $a = b = 0$

【觀念五】實數的封閉性

實數對加法、減法、乘法、除法（分母 $\neq 0$ ），其結果仍為實數，
這個性質稱為實數對於加、減、乘、除法具有**封閉性**。

【觀念六】實數的稠密性：_____

《說明》 $a, b \in \mathbb{R}, a < b$ ，取 $x = \frac{a+b}{2}$

(1) $x \in \mathbb{R}$

(2) $a - x = a - \frac{a+b}{2} = \frac{a-b}{2} < 0 \Rightarrow a < x$

(3) $x - b = \frac{a+b}{2} - b = \frac{a-b}{2} < 0 \Rightarrow x < b$

由(2)(3)知 $a < x < b$

例 1. (能力指標：實數性質)

$x, y \in \mathbb{R}, x^2 + y^2 - 2x - 4y + 5 = 0$ ，求 x, y ？

解：原式 $\Rightarrow$



例 2. (能力指標：實數性質)

$$x, y, z \in \mathbb{R}, x^2 + 2y^2 + 3z^2 - 2x - 8y + 6z + 12 = 0, \text{ 求 } x, y, z ?$$

解：原式 $\Rightarrow$





回家作業



1. 試問下列各敘述何者為假？

- (1) 兩無理數的和與積都是無理數
- (2) 有理數與無理數的和與積都是無理數
- (3) 兩實數的和與差都是有理數時，這兩數也必定是有理數
- (4) 兩實數的和與積都是有理數時，這兩數也必定是有理數。

EHBY



2. 試問下列各敘述何者為真？

- (1) $\sqrt{2}$ 與 $\sqrt{3}$ 之間有無窮多個有理數
- (2) 2 與 3 之間有無窮多個無理數
- (3) 若 a 為一實數，且 a^3 與 a^5 都是有理數，則 a^{100} 是有理數
- (4) 若 a 為一實數，且 a^4 與 a^6 都是有理數，則 a 是有理數
- (5) 已知 a, b 皆為有理數且 x, y 皆為無理數，若 $a + x = b + y$ ，則 $a = b$ 且 $x = y$

3. 設 a, b, c, d 均為整數，若 $a^2 + b^2 + c^2 + d^2 + 3 \leq 2a + 2b + 2c + 2d$ ，求四數積 $abcd$ 之值。

簡 答

1. (1)(2)(4) 2. (1)(2)(3) 3. 0 或 1 或 2



回家作業



4. 已知 x, y, z, u 皆為實數且 $x^2 + y^2 + z^2 + u^2 + 1 = x + y + z + u$ ，求 x, y, z, u 之值。

5. 已知 x, y 皆為有理數且 a, b 皆為無理數，試問下列各敘述哪些為真？

- (1) $\frac{a+x}{3}$ 為無理數 (2) $\frac{a}{x} + \frac{b}{y}$ 為無理數 (3) $|a| + |b|$ 為無理數
(4) ax 為無理數 (5) 若 $x + ya = 2 + 3a$ ，則 $x = 2, y = 3$ 。



4. $x = y = z = u = \frac{1}{2}$

5. (1)(5)



回家作業



6. 下列各敘述哪些為真？請選出來：

- (1) 若 a 是質數，則 $\sqrt{a}$ 是無理數
- (2) 若 a, b 皆為無理數，則 $a+b, a-b$ 之中至少有一個無理數
- (3) 若 $a-b$ 為有理數且 ab 為無理數，則 $a+b$ 為有理數
- (4) 若 $a+b, b+c, c+a$ 為有理數，則 a, b, c 皆為有理數
- (5) 存在 a, b 為無理數，使得 ab 為無理數且 $\frac{a}{b}$ 為有理數。



6. (1)(2)(4)(5)

數位 延伸閱讀



1. (能力指標：二元配方法)

$x, y \in \mathbb{R}$, $5x^2 - 4xy + y^2 - 6x + 2y + 2 = 0$, 求 x, y ?

解：觀察 x^2, y^2 係數， y^2 係數為 1，對 y 配方比較方便

$$\text{原式} \Rightarrow y^2 + (2 - 4x)y + (5x^2 - 6x + 2) = 0$$

$\Rightarrow$



2. (能力指標：封閉性)

$S = \{1, 0, -1\}$ ，問 S 對：

(1) 加法 (2) 乘法 是否具有封閉性？

解：



數位[📶]延伸閱讀回家作業



1. 設 x, y 皆為整數，且 $x^2 - 2xy + 2y^2 + 4x - 6y + 4 = 0$ ，求 $y - x$ 的最大值。



簡答

1. 3

2025^年
[單一年度]

陳立教育

唯有陳立絕不混榜亂真 ★ 只有最好才能成就更好

姓名	就讀高中	錄取校系	姓名	就讀高中	錄取校系	姓名	就讀高中	錄取校系
朱○辰	建國中學	臺大 醫學系	徐○彤	復旦高中	臺大 化學工程學系	許○鈞	成功高中	臺大 動物科學技術學系
吳○璵	延平中學	臺大 電機工程學系	許○	政大附中	臺大 化學系	鄭○嘉	中山女中	臺大 外國語文學系
吳○諭	台南一中	臺大 電機工程學系	林○萱	北一女中	臺大 化學系	蘇○帆	松山高中	臺大 外國語文學系
林○羽	建國中學	臺大 電機工程學系	劉○滢	中山女中	臺大 化學系	陳○允	北一女中	臺大 中國文學系
李○	建國中學	臺大 電機工程學系	薛○豪	板橋高中	臺大 化學系	鄭○	曉明女中	臺大 中國文學系
錢○澤	建國中學	臺大 法律學系	戴○文	建國中學	臺大 機械工程學系	林○緯	松山高中	臺大 日本語文學系
彭○榆	台中女中	臺大 法律學系	詹○宇	建國中學	臺大 機械工程學系	汪○瑜	中山女中	臺大 人類學系
謝○臻	中山女中	臺大 法律學系	陳○廷	衛道中學	臺大 物理學系	江○穎	板橋高中	臺大 政治學系
吳○靜	中山女中	臺大 法律學系	李○婕	北一女中	臺大 工商管理學系	塗○茵	中山女中	臺大 哲學系
廖○程	海山高中	臺大 法律學系	林○珊	北一女中	臺大 公共衛生學系	張○榆	中壢高中	臺大 哲學系
陳○新	師大附中	臺大 財務金融學系	劉○凱	內湖高中	臺大 生化科技學系	徐○喬	市立大同	臺大 歷史學系
吳○諾	北一女中	臺大 財務金融學系	劉○睿	南山高中	臺大 生化科技學系	朱○昱	板橋高中	臺大 歷史學系
申○任	建國中學	臺大 財務金融學系	李○紘	松山高中	臺大 生命科學系	薛○潔	民德國中	臺大 歷史學系
陳○昂	建國中學	臺大 財務金融學系	丁○	建國中學	臺大 生物產業傳播暨發展	蔡○芯	北一女中	臺大 心理學系
陳○臻	板橋高中	臺大 財務金融學系	馬○安	政大附中	臺大 生物產業傳播暨發展	鍾○閱	師大附中	臺大 數學系
陳○煒	衛道中學	臺大 財務金融學系	陳○瑜	中山女中	臺大 生物產業傳播暨發展	鄭○佑	台中二中	臺大 數學系
張○宜	建興國中	臺大 財務金融學系	洪○盈	中山女中	臺大 生物產業傳播暨發展	曾○升	台中一中	臺大 數學系
林○霆	成功高中	臺大 國際企業學系	邵○恩	市立大同	臺大 生物產業傳播暨發展	蔡○宸	市立大同	臺大 園藝暨景觀學系
游○翔	海山高中	臺大 國際企業學系	傅○愛	成淵高中	臺大 生物產業傳播暨發展	楊○侑	松山高中	臺大 園藝暨景觀學系
黃○珪	薇閣高中	臺大 國際企業學系	岑○融	建國中學	臺大 生物機電工程學系	劉○圓	北一女中	臺大 會計學系
蔡○恩	建國中學	臺大 國際企業學系	許○豪	和平高中	臺大 生物環境系統工程	張○勻	北一女中	臺大 會計學系
劉○豪	台中一中	臺大 國際企業學系	蔡○宇	建國中學	臺大 生物環境系統工程	陳○安	市立大同	臺大 會計學系
黃○躍	建國中學	臺大 資訊工程學系	謝○騏	建國中學	臺大 地理環境資源學系	李○晴	師大附中	臺大 會計學系
黃○綸	成功高中	臺大 資訊工程學系	劉○洋	建國中學	臺大 地質科學系	陳○瑄	北一女中	臺大 會計學系
祝○棣	建國中學	臺大 資訊工程學系	黃○熊	松山高中	臺大 地質科學系	盧○君	北一女中	臺大 會計學系
莊○儒	北一女中	臺大 電子工程學系	徐○鈞	台南一中	臺大 地質科學系	郭○倫	師大附中	臺大 經濟學系
楊○彬	師大附中	臺大 土木工程學系	洪○鈞	台南一中	臺大 工程科學及海洋工程	王○澤	師大附中	臺大 經濟學系
鍾○珪	中山女高	臺大 土木工程學系	蔡○緯	建國中學	臺大 材料科學與工程學系	張○誌	建國中學	臺大 經濟學系
邱○榆	中壢高中	臺大 土木工程學系	魏○恩	南山高中	臺大 材料科學與工程學系	陳○瑋	成功高中	臺大 經濟學系
賴○澄	建國中學	臺大 化學工程學系	侯○憲	建國中學	臺大 昆蟲學系	楊○暉	台中一中	臺大 經濟學系
林○翰	建國中學	臺大 化學工程學系	李○億	台中二中	臺大 昆蟲學系	賴○安	建國中學	臺大 資訊管理學系

陳立既出 誰與爭鋒 ★ 各類榜首 盡在陳立

頂尖大學風雲榜

臺大、清大、陽交大、成大、政大 ★ Part 1

姓名	就讀高中	錄取校系	姓名	就讀高中	錄取校系	姓名	就讀高中	錄取校系
陳○祐	建國中學	臺大 資訊管理學系	吳○呈	建國中學	清大 原子科學院	李○瑩	台南女中	清大 藝術學院
陳○安	百齡高中	臺大 資訊管理學系	蕭○家	中壢高中	清大 材料科學工程學系	蔡○蓁	華盛頓中學	清大 藝術學院
張○豐	恆毅中學	臺大 農業經濟學系	游○宸	成功高中	清大 材料科學工程學系	林○佑	台中一中	清大 旭日招生丙組
黃○嘉	海山高中	臺大 農業經濟學系	劉○均	私立復興	清大 資訊工程學系	陳○芹	北一女中	陽交大 牙醫學系
林○宣	建國中學	臺大 農藝學系	許○佑	板橋高中	清大 生命科學系	任○佑	興大附中	陽交大 中醫學系
魏○叡	海山高中	臺大 農藝學系	王○真	台南女中	清大 生命科學系	蔡○陽	建國中學	陽交大 電機工程學系
鄭○呈	師大附中	臺大 森林環境暨資源	張○洋	武陵高中	清大 生醫工程與環境科學	李○澄	南山高中	陽交大 電機工程學系
黃○綸	政大附中	臺大 植物病理與微生物	莊○勛	建國中學	清大 生醫工程與環境科學	潘○寧	建國中學	陽交大 電機工程學系
陳○融	北一女中	臺大 植物病理與微生物	謝○宇	華江高中	清大 生醫工程與環境科學	葉○恩	建國中學	陽交大 資訊工程學系
江○音	海山高中	臺大 圖書資訊學系	黃○翰	師大附中	清大 數學系	董○辰	建國中學	陽交大 資訊工程學系
古○廷	建國中學	臺大 醫學工程學系	陳○宏	板橋高中	清大 經濟學系	莊○銓	新民高中	陽交大 資訊工程學系
楊○語	中山女高	臺大 醫學檢驗暨生物技術	段○宸	海山高中	清大 經濟學系	梁○益	武陵高中	陽交大 資訊工程學系
莊○縝	台中女中	臺大 醫學檢驗暨生物技術	林○媛	忠明高中	清大 經濟學系	陳○羽	台南女中	陽交大 資訊工程學系
魏○渲	北一女中	臺大 醫學檢驗暨生物技術	田○裕	北一女中	清大 經濟學系	郭○佑	成功高中	陽交大 機械工程學系
王○寧	東山中學	臺大 獸醫學系	丁○昕	北一女中	清大 經濟學系	葉○邦	成功高中	陽交大 機械工程學系
王○文	建國中學	臺大 獸醫學系	劉○旺	市立大同	清大 計量財務金融學系	林○丞	成功高中	陽交大 機械工程學系
王○廉	建國中學	臺大 藥學系	許○叡	北一女中	清大 中國文學系	關○嫻	裕德中學	陽交大 機械工程學系
鄭○媛	北一女中	臺大 藥學系	包○瑄	中和高中	清大 中國文學系	黃○郡	建國中學	陽交大 機械工程學系
楊○宇	南山中學	臺大 藥學系	詹○婷	華僑高中	清大 中國文學系	李○宥	中壢高中	陽交大 機械工程學系
田○鉉	台南一中	臺大 護理學系	趙○靜	聖心女中	清大 英語教學系	洪○泰	後甲國中	陽交大 機械工程學系
黃○瑜	台中一中	清大 電機工程學系	李○嫻	師大附中	清大 教育心理與諮商	林○程	後甲國中	陽交大 機械工程學系
林 ○	成功高中	清大 電機資訊學院	陳○棋	中壢高中	清大 教育心理與諮商	卓○辰	平鎮高中	陽交大 電子物理學系
陳○叡	興國國中	清大 電機資訊學院	林○成	北大高中	清大 教育與學習科技	李○澤	成功高中	陽交大 電子物理學系
鄭○安	中山女中	清大 工業工程與工程管理	吳○諱	板橋高中	清大 教育與學習科技	歐○騫	台南一中	陽交大 半導體工程學系
施○信	民德國中	清大 工學院	何○萱	政大附中	清大 教育與學習科技	林○美	南科實中	陽交大 土木工程學系
賴○廷	南山高中	清大 化學工程學系	曾○瑀	中壢高中	清大 教育與學習科技	李○澤	後甲國中	陽交大 材料科學與工程
陳○睿	復興國中	清大 化學工程學系	方○文	中和高中	清大 幼兒教育學系	張○馨	松山高中	陽交大 工業工程與管理
孫○好	新竹女中	清大 化學系	鄭○妍	北一女中	清大 人文社會學院	張○恩	平鎮高中	陽交大 工業工程與管理
蔡○宇	台南一中	清大 化學系	陳○璟	北大高中	清大 人文社會學院	 因為有你 陳立才能更好！		
王○維	南山高中	清大 化學系	林○穎	北一女中	清大 人文社會學院			
何○璿	中山女高	清大 化學系	莊○榛	政大附中	清大 藝術學院			

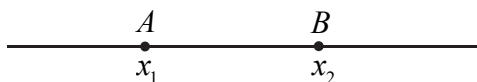
全國最大 ★ 最專業的連鎖 K12 教育集團

主題 5 數線

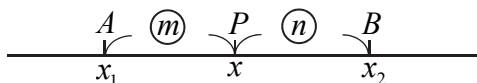


【觀念一】全部實數(有理數和無理數)和數線上的點形成一對一的對應

【觀念二】數線上二點間距離： $A(x_1)$, $B(x_2)$, $d(A, B) =$

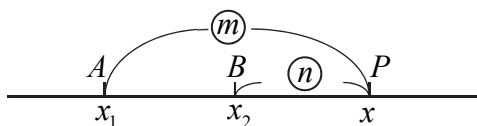


【觀念三】數線上內分點公式： $x = \frac{mx_2 + nx_1}{m + n}$



《說明》 $\frac{m}{n} = \frac{x - x_1}{x_2 - x} \Rightarrow mx_2 - mx = nx - nx_1 \Rightarrow x = \frac{mx_2 + nx_1}{m + n}$

【觀念四】數線上外分點公式： $x = \frac{mx_2 - nx_1}{m - n}$



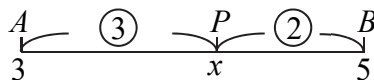
《說明》 $\frac{m}{n} = \frac{x - x_1}{x - x_2} \Rightarrow mx - mx_2 = nx - nx_1 \Rightarrow x = \frac{mx_2 - nx_1}{m - n}$

例 1. (能力指標：內外分點公式)

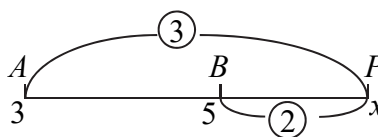
$A(3), B(5)$ ， P 在數線上，若 $\frac{AP}{BP} = \frac{3}{2}$ ，求 P 坐標？



解： 1° $x =$



2° $x =$



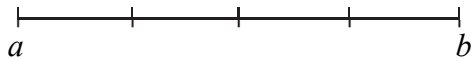
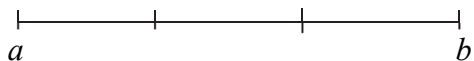
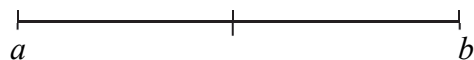
例 2. (能力指標：分點位置比大小)

設 $b > a > 0$ ，試比較 $a, b, \frac{a+b}{2}, \frac{a+2b}{3}, \frac{3a+b}{4}, \frac{2a+3b}{5}$



的大小關係？

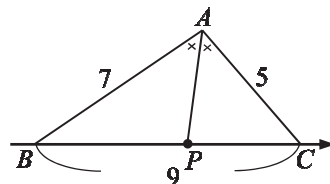
解：



例 3. (北一女中學資)

如右下圖， $\triangle ABC$ 的邊長分別為 $\overline{AB} = 7$ 、 $\overline{AC} = 5$ 、 $\overline{BC} = 9$ ，將 BC 邊貼在數線上，使得 B 為原點， $\angle A$ 的角平分線交數線於 P 點， $\angle A$ 的外角平分線交數線於 Q 點，試問 P 點、 Q 點的坐標為何？

解：





回家作業



1. 數線上三點 $A(2)$, $B(-5)$, $P(x)$, 已知 $\overline{AP}:\overline{BP}=3:4$, 求 x 之值。



2. 設 $A(-6,0)$ 、 $B(4,0)$ 、 $P(99,2010)$, 若點 C 在 x 軸上, 且 $\triangle PAC$ 的面積為 $\triangle PBC$ 面積的 4 倍, 求 C 的坐標為 _____。

3. 若 $r < s$, 令 $a = \frac{2r+3s}{5}$, $b = \frac{2r+5s}{7}$, $c = \frac{2r+7s}{9}$, $d = \frac{13r-2s}{11}$,
 $e = \frac{15s-2r}{13}$, 則 a, b, c, d, e 之大小關係為 _____。

4. 試比較下列數字大小：

$$a = \frac{2\sqrt{2}+\sqrt{3}}{3}, b = \frac{3\sqrt{2}+2\sqrt{3}}{5}, c = \frac{\sqrt{2}+\sqrt{3}}{2}, d = \frac{\sqrt{18}+\sqrt{3}}{4}。$$

簡 答

1. $x = -1$ 或 $x = 23$ 2. $C(\frac{22}{3}, 0)$ 或 $C(2, 0)$ 3. $d < a < b < c < e$
4. $d < a < b < c$

數位 延伸閱讀



1. (能力指標：無理數性質)

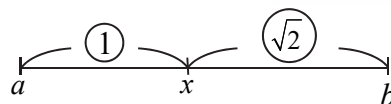
兩個不相等的有理數之間至少存在一個無理數，說明之。

解：舉例如右圖



$$1^\circ a, b \in \mathbb{Q}, a < b$$

$$\text{取內分點 } x = \frac{b + \sqrt{2}a}{1 + \sqrt{2}}$$



$$2^\circ \text{ 設 } x \in \mathbb{Q}, x = \frac{b + \sqrt{2}a}{1 + \sqrt{2}}$$

$$\Rightarrow x + \sqrt{2}x = b + \sqrt{2}a \Rightarrow \sqrt{2} = \frac{b-x}{x-a}$$

$$(\text{矛盾 } \because \sqrt{2} \notin \mathbb{Q}, \frac{b-x}{x-a} \in \mathbb{Q})$$

$$\therefore \text{ 假設錯誤 } \therefore x \notin \mathbb{Q}, \text{ 即 } \frac{b + \sqrt{2}a}{1 + \sqrt{2}} \notin \mathbb{Q}$$

$$3^\circ a - x = a - \frac{b + \sqrt{2}a}{1 + \sqrt{2}} = \frac{a-b}{1 + \sqrt{2}} < 0 \Rightarrow a < x$$

$$4^\circ x - b = \frac{b + \sqrt{2}a}{1 + \sqrt{2}} - b = \frac{\sqrt{2}(a-b)}{1 + \sqrt{2}} < 0 \Rightarrow x < b$$

由 $3^\circ, 4^\circ$ 知 $a < x < b$

主題 6 絕對值

CLQQ



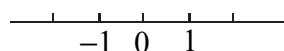
【觀念一】 $|x| = \begin{cases} (x \geq 0) \\ (x < 0) \end{cases}$

【觀念二】絕對值的幾何意義：

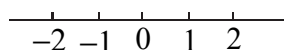
- (1) $|x|$ 表示： x 到原點的距離
- (2) $|x_1 - x_2|$ 表示： x_1 到 x_2 的距離

【觀念三】在數線上指出下列絕對值不等式及等式的解

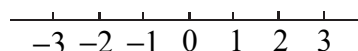
(1) $|x| = 1 \Rightarrow$



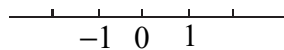
(2) $|x| < 2 \Rightarrow$



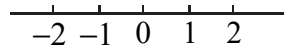
(3) $|x| > 3 \Rightarrow$



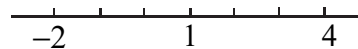
(4) $|x| \leq 1 \Rightarrow$



(5) $|x| \geq 2 \Rightarrow$



(6) $|x - 1| \leq 3 \Rightarrow$



【觀念四】絕對值不等式的結論

(1) $|x| \leq a \ (a > 0) \Rightarrow$

(2) $|x| < a \ (a > 0) \Rightarrow$

(3) $|x| \geq a \ (a > 0) \Rightarrow$

(4) $|x| > a \ (a > 0) \Rightarrow$

【觀念五】數線不等式

$$(1) \left| x - \frac{M+m}{2} \right| \leq \frac{M-m}{2} \Rightarrow \frac{m-M}{2} \leq x - \frac{M+m}{2} \leq \frac{M-m}{2} \Rightarrow m \leq x \leq M$$

$$(2) \left| x - \frac{M+m}{2} \right| \geq \frac{M-m}{2} \Rightarrow x - \frac{M+m}{2} \geq \frac{M-m}{2} \text{ 或 } x - \frac{M+m}{2} \leq \frac{m-M}{2} \\ \Rightarrow x \geq M \text{ 或 } x \leq m$$

$$(3) m \leq x \leq M \Rightarrow \left| x - \frac{M+m}{2} \right| \leq \frac{M-m}{2}$$

$$(4) x \geq M \text{ 或 } x \leq m \Rightarrow \left| x - \frac{M+m}{2} \right| \geq \frac{M-m}{2}$$

【觀念六】絕對值不等式： $\left| |a| - |b| \right| \leq |a+b| \leq |a| + |b|$

$$\text{【觀念七】} (1) |a+b| = |a| + |b| \Leftrightarrow \quad (\text{同號性質})$$

$$(2) |a-b| = |a| + |b| \Leftrightarrow \quad (\text{異號性質})$$

例 1. (能力指標：絕對值不等式)

$|ax+1| \leq b$ 之解為 $-1 \leq x \leq 5$ ，求 a, b 之值？

解： **法 1** 由 $|ax+1| \leq b \Rightarrow -b \leq ax+1 \leq b \Rightarrow -b-1 \leq ax \leq b-1$

$$\textcircled{1} a > 0, \frac{-b-1}{a} \leq x \leq \frac{b-1}{a}$$

$$\textcircled{2} a < 0, \frac{b-1}{a} \leq x \leq \frac{-b-1}{a}$$

法 2 由 $-1 \leq x \leq 5 \Rightarrow$



例 2. (能力指標：絕對值不等式)

解不等式： $3 < |2x - 1| < 5$ 。

$$\text{解：} 1^\circ \begin{cases} 2x - 1 \geq 0 \\ 3 < 2x - 1 < 5 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x \geq \frac{1}{2} \\ 2 < x < 3 \end{cases}$$

$$2^\circ \begin{cases} 2x - 1 < 0 \\ 3 < -(2x - 1) < 5 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x < \frac{1}{2} \\ 2 < x < 3 \end{cases}$$

TFNJ



例 3. (能力指標：絕對值方程)

$|x - 2| + |x - 1| = 6$ ，求 $x = ?$

解：

$$\begin{array}{c} \text{③} \qquad \text{②} \qquad \text{①} \\ \hline \qquad 1 \qquad 2 \end{array}$$

$$\text{①} \begin{cases} x \geq 2 \\ x - 2 + x - 1 = 6 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x \geq 2 \\ x = \frac{9}{2} \end{cases} \Rightarrow x = \frac{9}{2}$$

$$\text{②} \begin{cases} 1 \leq x < 2 \end{cases}$$

$$\text{③} \begin{cases} x < 1 \end{cases}$$

由①, ②, ③知

AGHB



例 4. (成功高中學資)

一筆直的路段設有水廠 A 與電廠 B 各一座，其坐標為 $A(-2)$ 、 $B(4)$ ，為了回饋沿路居民，水電的基本費計算方式為：「住戶到電廠距離的 3 倍加上該住戶到水廠的距離和為該用戶的水電基本費。」則該路段基本費不超過 22 元的區域範圍為_____。(今設路段住戶 P 坐標 x 即求 x 範圍)

解：



回家作業



1. 設 a, b 是不為 0 的實數，試問何者使 $ab < 0$ 恆成立？

(1) $|a| + |b| = |a+b|$

(2) $|a| - |b| = |a+b|$

(3) $|a| - |b| = |a-b|$

(4) $|a-5| + |b-5| = |a-b|$ 。



2. 設 x, y 為實數，且 $|x-2| \leq 3, |y+1| \leq 2$ ，

則 $|2x-11| + |y+5| + |2y-3| + \sqrt{x^2+6x+9} + \sqrt{(x+y+12)^2} = \underline{\hspace{2cm}}$ 。

3. 若解下列不等式，則何者 x 的範圍在數線上所佔的長度為 8？

(A) $|x| \leq 8$

(B) $|x| \geq -8$

(C) $|x-1| \leq 4$

(D) $|2x-1| \leq 2$

(E) $3 \leq |x+1| \leq 11$ 。



1. (2) 2. 34 3. (C)



回家作業



4. 設 p, q 皆為特定實數，若 $|px+1| \geq q$ 之解為 $x \geq 7$ 或 $x \leq -1$ ，則實數對 $(p, q) = \underline{\hspace{2cm}}$ 。

5. 方程式 $|x+1| + |2x-3| = 4$ 的實數解為 $\underline{\hspace{2cm}}$ 。

6. 解不等式 $\begin{cases} |x-1| \geq 3 \\ |2x+3| < 5 \end{cases}$ 。



4. $(\frac{-1}{3}, \frac{4}{3})$ 5. 0 或 2 6. $-4 < x \leq -2$



回家作業



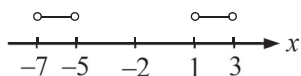
7. (1) 某產品背後包裝重量的標示如右圖所示： (北一女中學資)

若此產品重量為 x g，試以絕對值符號表示重量 x 的範圍。

容量： 30 ± 3 g

產地：台灣宜蘭

- (2) 請利用一條絕對值不等式表示以下的數線區間。



本題無數位影音服務，
請同學詳實練習並善用輔導資源

8. 試求不等式 $4 < |2 - 3x| \leq 16$ 之解為_____。

本題無數位影音服務，
請同學詳實練習並善用輔導資源

簡答

7. (1) $|x - 30| \leq 3$ (2) $3 < |x + 2| < 5$ 8. $-\frac{14}{3} \leq x \leq -\frac{3}{2}$ 或 $2 < x \leq 6$



回家作業



9. (103 學測試題)

請問滿足絕對值不等式 $|4x - 12| \leq 2x$ 的實數 x 所形成的區間，
其長度為下列哪一個選項？

- (1) 1 (2) 2 (3) 3 (4) 4 (5) 6 。



9. (4)

數位 延伸閱讀



1. (能力指標：絕對值性質)

(1) $a, b \in \mathbb{R}$ ，證明 $|a| + |b| \geq |a + b|$ 。

(2) 利用(1)結果證明： $|a - b| \geq |a| - |b|$ 。

解：(1) 有關絕對值證明一律採平方法

$$\begin{aligned} (|a| + |b|)^2 - (|a + b|)^2 &= a^2 + b^2 + 2|ab| - (a + b)^2 \\ &= a^2 + b^2 + 2|ab| - a^2 - b^2 - 2ab \\ &= 2(|ab| - ab) \geq 0 \end{aligned}$$

$$\therefore (|a| + |b|)^2 \geq (|a + b|)^2 \Rightarrow |a| + |b| \geq |a + b|$$

(2) $\because |a| + |b| \geq |a + b|$

$$\therefore |a - b| + |b| \geq |a - b + b| \Rightarrow |a - b| \geq |a| - |b|$$



2. (能力指標：性質循環應用)

(1) $|a| < 1, |b| < 1$ ，證明 $\left| \frac{a+b}{1+ab} \right| < 1$ 。

(2) 利用(1)的結果及 $|c| < 1$ ，證明 $\left| \frac{a+b+c+abc}{1+ab+bc+ca} \right| < 1$ 。

解：(1) 有關絕對值證明題一律採平方法

$$\begin{aligned} \left(\left| \frac{a+b}{1+ab} \right| \right)^2 - 1 &= \frac{(a+b)^2}{(1+ab)^2} - 1 \\ &= \frac{a^2 + b^2 + 2ab - 1 - 2ab - a^2b^2}{(1+ab)^2} \\ &= \frac{-(a^2 - 1)(b^2 - 1)}{(1+ab)^2} < 0 \quad \begin{cases} \because |a| < 1 \quad \therefore a^2 < 1 \\ \because |b| < 1 \quad \therefore b^2 < 1 \end{cases} \end{aligned}$$

$$\therefore \left| \frac{a+b}{1+ab} \right|^2 < 1 \Rightarrow \left| \frac{a+b}{1+ab} \right| < 1$$

(2) 由(1)的結果知 $\left| \frac{a+b}{1+ab} \right| < 1$ 且 $|c| < 1$

$\Rightarrow$



3. (能力指標：性質循環應用)

(1) $|a| < 1, |b| < 1$ ，證明 $ab + 1 > a + b$ 。

(2) 由(1)結果， $|c| < 1$ ，證明 $abc + 2 > a + b + c$ 。

解：

TLPV



4. (能力指標：絕對值不等式)

證明： $\frac{|a+b|}{1+|a+b|} \leq \frac{|a|}{1+|a|} + \frac{|b|}{1+|b|}$ 。

解：

IHC

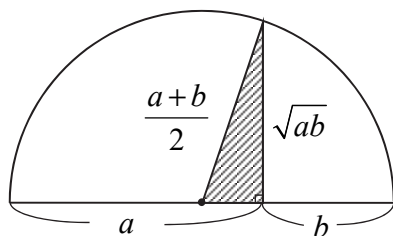


主題 8 算幾不等式 $A \geq G$



【觀念一】 $a \geq 0, b \geq 0$ ，算術平均 $A = \frac{a+b}{2}$ ，幾何平均 $G = \sqrt{ab}$

【觀念二】



$$\frac{a+b}{2} \geq \sqrt{ab}$$

《說明》 $\frac{a+b}{2} - \sqrt{ab} = \frac{a+b-2\sqrt{ab}}{2} = \frac{(\sqrt{a}-\sqrt{b})^2}{2} \geq 0$

$\therefore \frac{a+b}{2} \geq \sqrt{ab}$ 等號成立時： $a=b$

例 1. (能力指標： $A \geq G$)

- (1) $x > 0, y > 0, x+y=16$ ，求 xy 的最大值？
- (2) $x > 0, y > 0, xy=6$ ，求 $2x+3y$ 的最小值？

解：



例 2. (成功高中學資)

已知 a, b 是實數且 $a^2 + 4b^2 = 12$ ，求 ab 的範圍。

解：

例 3. (能力指標：A ≥ G)

$a, b > 0, \frac{1}{a} + \frac{2}{b} = 1$ ，求 $a \times b$ 的最小值？

解：



例 4. (能力指標：A ≥ G)

$a > -1$ ，求 $a + \frac{4}{a+1}$ 最小值？

解：



例 5. (能力指標：A≥G 應用)

小立想利用 21 公尺長的鐵絲網在屋後的空地上圍出一塊矩形的菜圃，將菜圃靠在屋後，則只須圍三邊且為方便進出，三邊都留下 1 公尺的出入口，若小立想圍成面積最大的菜圃，則最大面積為 M 平方公尺，長邊為 k 公尺，求數對 $(M, k) =$ _____。



解：



回家作業



1. 兩正數 a, b 滿足 $a^2 + b^2 = 4$ ，試求 $(a+b)^2$ 之最大值。

UUWR



2. 設 $x \in \mathbb{R}$ ，試求 $y = 4x^2 + 2x + \frac{18}{2x^2 + x + 1}$ 的最小值。



1. 8 2. 10



回家作業



3. 欲使用鐵絲在河岸圍一矩形土地(沿河岸的一邊不圍)，使其面積為 200 平方公尺，試問最少需要使用 _____ 公尺的鐵絲。

4. 設 x, y 皆為正數，試求 $(x + \frac{1}{y})(y + \frac{1}{x})$ 的最小值。



3. 40 4. 4

數位 延伸閱讀



1. (能力指標：A≥G)

$x, y, z > 0, x + y + z = 6$ ，求 xy^2z^3 最大值？

解：

ZDBU



2. (能力指標：A≥G)

$x, y, z > 0, xy^2z^3 = 64$ ，求 $3x + 2y + z$ 最小值？

解：

FNNP

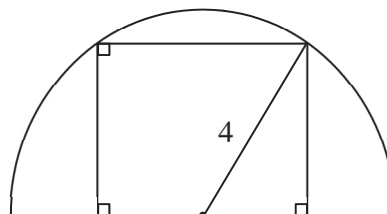


3. (能力指標：A≥G 應用)

如圖，半徑為 4 的半圓形場地，在其中要圍出一個最大的矩形花圃，試求其最大面積。



解：



數位 延伸閱讀回家作業



1. 若已知長方體體積 27cm^3 ，試求其表面積最小值。



2. 設 $a, b, c > 0$ 且 $a + b + c = 6$ ，試回答下列各問題：

(1) 求 abc 之最大值。 (2) 求 a^2bc 之最大值。 (3) 求 ab^2c^3 之最大值。



1. 54cm^2 2. (1) 8 (2) $\frac{81}{4}$ (3) 108

陳立數學~62~絕對智慧
尊重著作權所有・盜翻印法律追究

主題 9 實數範圍與區間

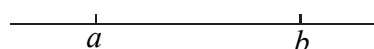


【觀念】實數區間

(1) 開區間 $(a, b) \Rightarrow a < x < b$



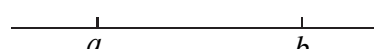
(2) 閉區間 $[a, b] \Rightarrow a \leq x \leq b$



(3) 半開區間 $(a, b] \Rightarrow a < x \leq b$



$[a, b) \Rightarrow a \leq x < b$



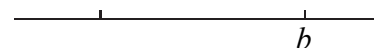
(4) 無限區間 $(a, \infty) \Rightarrow x > a$



$[a, \infty) \Rightarrow x \geq a$



$(-\infty, b) \Rightarrow x < b$



$(-\infty, b] \Rightarrow x \leq b$



$(-\infty, \infty) \Rightarrow x \in \mathbb{R}$



例 1. (能力指標：不等式重組)

$|2x-7| \leq 3, |y-1| \leq 2$ ，求下列各範圍？

(1) $3x-2y$ 的範圍

解：原式 $\Rightarrow \begin{cases} -3 \leq 2x-7 \leq 3 \\ -2 \leq y-1 \leq 2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 2 \leq x \leq 5 \\ -1 \leq y \leq 3 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 6 \leq 3x \leq 15 \\ -6 \leq -2y \leq 2 \end{cases} \Rightarrow$

(2) xy 的範圍

解： $\begin{cases} 2 \leq x \leq 5 \\ -1 \leq y \leq 3 \end{cases} \Rightarrow$ 最大，最小值乘積結果可為 $-2, 6, -5, 15$
 $\Rightarrow$



(3) $x^2 + y^2$ 的範圍

解： $\begin{cases} 2 \leq x \leq 5 \\ -1 \leq y \leq 3 \end{cases} \Rightarrow \quad \Rightarrow$

(4) $xy + x - y + 1$ 的範圍

解： 原式 $= (x-1)(y+1) + 2$

$$\begin{cases} 2 \leq x \leq 5 \\ -1 \leq y \leq 3 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 1 \leq x-1 \leq 4 \\ 0 \leq y+1 \leq 4 \end{cases}$$

$\Rightarrow$ 最大，最小乘積結果可為 0, 4, 16

$\Rightarrow$

(5) $\frac{y}{x}$ 的範圍

解：

(6) $\frac{x}{y}$ 的範圍

解： $1^\circ \begin{cases} 2 \leq x \leq 5 \\ -1 \leq y \leq 3 \end{cases} \xrightarrow{y=0} \text{計算易出錯}$

$$2^\circ \frac{-1}{2} \leq \frac{y}{x} \leq \frac{3}{2} \xrightarrow{\text{倒數}} \begin{array}{c} -2 \quad -\infty \quad x \quad +\infty \quad \frac{2}{3} \\ \hline \frac{-1}{2} \quad 0^+ \quad \frac{3}{2} \end{array}$$

$$\Rightarrow \frac{x}{y} \geq \frac{2}{3} \text{ 或 } \frac{x}{y} \leq -2$$



回家作業



1. 設 $-2 \leq x \leq 5$, $3 \leq y \leq 8$, 試求下列各式之範圍。

(1) xy

(2) $\frac{x}{y}$



2. x, y 皆為實數，且滿足 $|x-2| \leq 3$ 且 $|y+7| \leq 4$ ，則下列敘述何者正確？
請選出來。

(A) $8 \leq x-y \leq 10$

(B) $11 \leq xy \leq 15$

(C) $-\frac{5}{3} \leq \frac{x}{y} \leq \frac{1}{3}$

(D) $1 \leq x^2 \leq 25$

(E) $0 \leq y^2 \leq 121$ 。

3. 若 $x > y$, $m > n$ 但 $xy \neq 0$ ，試在以下選出正確的選項：

(A) $x-m > y-n$

(B) $x-n > y-m$

(C) $xm > yn$

(D) $x^2 > y^2$

(E) $\frac{1}{x} < \frac{1}{y}$ 。



1.(1) $-16 \leq xy \leq 40$ (2) $-\frac{2}{3} \leq \frac{x}{y} \leq \frac{5}{3}$

2. (C)(E)

3. (B)



回家作業



4. 若 a, b, c, d 皆為實數且 $a > b, c > d$ ，則下列何者正確？

(A) $ac > bd$

(B) $a + c > b + d$

(C) $\frac{1}{a} < \frac{1}{b}$

(D) 若 $a^2 < b^2$ ，則 $|a| < |b|$

(E) 若 x 為實數，則 $a + x > b + x$ 。

5. 設 $x, y \in \mathbb{R}$ 且 $-3 \leq x \leq 1, 2 \leq y \leq 8$ ，則 $xy - 3x + 2y + 1$ 之範圍為 _____。



4. (B)(D)(E) 5. $2 \leq xy - 3x + 2y + 1 \leq 22$

數位 延伸閱讀



1. (能力指標：不等式線性重組)

$f(x) = ax + b$, $0 < f(1) < 3$, $1 < f(2) < 2$, 求 $f(3)$ 的範圍?

解：
$$\begin{cases} 0 < f(1) < 3 \\ 1 < f(2) < 2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 0 < a + b < 3 & (\text{希望乘上 } k) \\ 1 < 2a + b < 2 & (\text{希望乘上 } m) \end{cases}$$

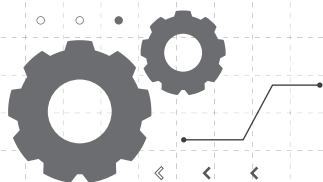
可得 $(k + 2m)a + (k + m)b = 3a + b$

$$\text{令 } \begin{cases} k + 2m = 3 \\ k + m = 1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} k = \\ m = \end{cases}$$

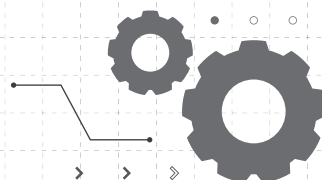
$$\therefore \begin{cases} 0 < a + b < 3 \\ 1 < 2a + b < 2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \end{cases}$$



心得欄



心得欄





式的運算

主題 10 乘法公式



型一 平方公式

【觀念一】和的平方公式： $(a+b)^2 = a^2 + 2ab + b^2 = (a-b)^2 + 4ab$

【觀念二】差的平方公式： $(a-b)^2 = a^2 - 2ab + b^2 = (a+b)^2 - 4ab$

【觀念三】平方差公式： $(a+b)(a-b) = a^2 - b^2$

【觀念四】三項和的平方公式： $(a+b+c)^2 = a^2 + b^2 + c^2 + 2(ab+bc+ca)$

例 1. (能力指標：平方差)

$$\frac{3^2}{3^2-1} \times \frac{4^2}{4^2-1} \times \frac{5^2}{5^2-1} \times \cdots \times \frac{32^2}{32^2-1} = ?$$

解：



例 2. (能力指標：平方差)

$$7 \times 9 \times (8^2 + 1) \times (8^4 + 1) \times (8^8 + 1) = 2^n - 1, \text{ 求 } n = ?$$

解：



例 3. (能力指標：完全平方式)

$$\text{求 } \sqrt{95 \times 99 \times 101 \times 105 + 144} = ?$$

解：



例 4. (能力指標：倒數完全平方式)

若 $0 < x < 1$ ，化簡 $\sqrt{x^2 + \frac{1}{x^2} + 2} - \sqrt{x^2 + \frac{1}{x^2} - 2} = ?$

解：





回家作業



1. 設 x, y 是兩實數，且 $x > y$ 。若 $x + y = 2$, $x^2 + y^2 = 5$,

則 $\frac{1}{x} - \frac{1}{y} =$ _____。



2. 已知 $7 \times 9 \times (8^2 + 1) \times (8^4 + 1) \times (8^8 + 1) = 4^n - 1$ ，求 n 。

3. 設 $x = \frac{1^2}{1} + \frac{2^2}{3} + \frac{3^2}{5} + \frac{4^2}{7} + \cdots + \frac{49^2}{97} + \frac{50^2}{99}$, $y = \frac{1^2}{3} + \frac{2^2}{5} + \frac{3^2}{7} + \frac{4^2}{9} + \cdots + \frac{49^2}{99} + \frac{50^2}{101}$ 。

求 $x - y$ 之值。



1. $2\sqrt{6}$ 2. 24 3. $\frac{2550}{101}$



回家作業



4. 已知 a, b, c 為實數，且 $a+b+c=0$, $a^2+b^2+c^2=1$ ，求 $a^4+b^4+c^4$ 之值。

5. 化簡 $\sqrt{1999 \times 2000 \times 2001 \times 2002 + 1}$ 。

6. 若 n 為正整數，已知 $(1-\frac{1}{2^2})(1-\frac{1}{3^2})(1-\frac{1}{4^2})\cdots(1-\frac{1}{n^2})=\frac{501}{1000}$ ，試求 n 之值。



4. $\frac{1}{2}$ 5. 4001999 6. 500



回家作業



7. 設 $x = \frac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{\sqrt{6}+\sqrt{2}}$ ，試求下列各小題：

(1) $x + \frac{1}{x}$

(2) $x^2 + \frac{1}{x^2}$

(3) $x^3 + \frac{1}{x^3}$

本題無數位影音服務，
請同學詳實練習並善用輔導資源



7. (1) 4 (2) 14 (3) 52

數位 延伸閱讀



1. (能力指標：平方差)

JZXT



$$f(x) = (1+x)(1+x^4)(1+x^{16})(1+x^{64})\cdots, \text{ 若 } f\left(\frac{3}{8}\right) \cdot f(a) = \frac{8}{5},$$

求 $a = ?$

$$\text{解：} 1^\circ \begin{cases} f(x) = (1+x)(1+x^4)(1+x^{16})(1+x^{64})\cdots \\ f(x^2) = (1+x^2)(1+x^8)(1+x^{32})(1+x^{128})\cdots \end{cases}$$

$$\begin{aligned} \Rightarrow f(x) f(x^2) &= (1+x)(1+x^2)(1+x^4)(1+x^8)(1+x^{16})(1+x^{32})\cdots \\ &= \frac{(1-x)(1+x)(1+x^2)(1+x^4)(1+x^8)\cdots}{1-x} = \frac{1-x^\infty}{1-x} \end{aligned}$$

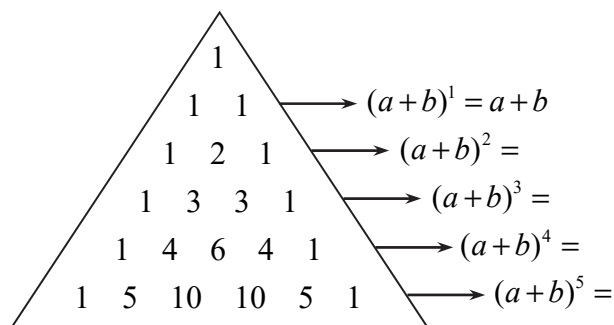
$$2^\circ f\left(\frac{3}{8}\right) f\left(\frac{9}{64}\right) = \frac{1 - \left(\frac{3}{8}\right)^\infty}{1 - \frac{3}{8}} = \frac{1}{\frac{5}{8}} = \frac{8}{5}$$

$$\Rightarrow f\left(\frac{3}{8}\right) f\left(\frac{9}{64}\right) = f\left(\frac{3}{8}\right) f(a)$$

$$\Rightarrow f(a) = f\left(\frac{9}{64}\right) \Rightarrow a = \frac{9}{64}$$

型二 高次公式(I)

【觀念一】巴斯卡三角形



【觀念二】基本公式

$$(1) (x+y)^2 = x^2 + 2xy + y^2$$

$$(2) (x+y)^3 = x^3 + 3x^2y + 3xy^2 + y^3$$

$$(3) (x-y)^3 =$$

$$(4) (x+y)^4 = x^4 + 4x^3y + 6x^2y^2 + 4xy^3 + y^4$$

$$(5) (x-y)^4 = x^4 - 4x^3y + 6x^2y^2 - 4xy^3 + y^4$$

$$(6) (x+y)^5 = x^5 + 5x^4y + 10x^3y^2 + 10x^2y^3 + 5xy^4 + y^5$$

$$(7) (x-y)^5 = x^5 - 5x^4y + 10x^3y^2 - 10x^2y^3 + 5xy^4 - y^5$$

【觀念三】和的立方公式： $(a+b)^3 = a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3$

$$= a^3 + b^3 + 3ab(a+b)$$

【觀念四】差的立方公式： $(a-b)^3 = a^3 - 3a^2b + 3ab^2 - b^3$

$$= a^3 - b^3 - 3ab(a-b)$$

【觀念五】立方和公式： $a^3 + b^3 = (a+b)^3 - 3ab(a+b) = (a+b)(a^2 - ab + b^2)$

$$\text{重要應用：} x^3 + 1 =$$

【觀念六】立方差公式： $a^3 - b^3 = (a-b)^3 + 3ab(a-b) = (a-b)(a^2 + ab + b^2)$

$$\text{重要應用：} x^3 - 1 =$$

【觀念七】 (1) $x^4 + x^2 + 1 = (x^2 + 1)^2 - x^2 = (x^2 + x + 1)(x^2 - x + 1)$

(2) $a^4 + a^2b^2 + b^4 = (a^2 + b^2)^2 - (ab)^2 = (a^2 + ab + b^2)(a^2 - ab + b^2)$

例 1. (能力指標：配方)

若已知 $a + b = 5$, $ab = 3$, 試求：

(1) $a^2 + b^2$ (2) $(a - b)^2$ (3) $a^3 + b^3$ (4) $a^4 + b^4$ (5) $a^5 + b^5$

解：



例 2. (能力指標：倒數配方)

若已知 $x + \frac{1}{x} = 3$ ，試求：

(1) $x^2 + \frac{1}{x^2}$ (2) $x^3 + \frac{1}{x^3}$ (3) $x^4 + \frac{1}{x^4}$ (4) $x^5 + \frac{1}{x^5}$

解：

UUH



例 3. (能力指標： $x^4 + x^2 + 1$ 分解)

化簡：(1) $(a+1)(a-1)(a^2+a+1)(a^2-a+1)$

(2) $(a+1)(a-1)(a^4+a^2+1)$

解：

ZVBD





回家作業



1. 設 $a^2 = 5$ ，則 $(a-1)(a+1)(a^2-a+1)(a^2+a+1)$ 之值為 _____。



2. 設 a, b 為實數，且 $a+b=1$ ， $a^2+b^2=3$ ，試求 $a^3+2a^2b+2ab^2+b^3$ 之值。

3. 設實數 x, y 滿足 $x+2y=3$ ， $x^3+8y^3=9$ ，則 $x^2+4y^2=$ _____。

4. 利用乘法公式 $(x+y)^4$ 與 $(x-y)^4$ 的展開式求 $(\sqrt{11}+\sqrt{7})^4$ 的整數部分。



1. 124 2. 2 3. 5 4. 1263



型三 高次公式(II)

【觀念一】 $a^2 + b^2 + c^2 - ab - bc - ca = \frac{1}{2}[(a-b)^2 + (b-c)^2 + (c-a)^2]$



【觀念二】三項立方公式：

$$(1) \quad a^3 + b^3 + c^3 - 3abc = (a+b+c)(a^2 + b^2 + c^2 - ab - bc - ac)$$

《證明》 $a^3 + b^3 + c^3 - 3abc = (a+b)^3 - 3ab(a+b) + c^3 - 3abc$

$$= (a+b)^3 + c^3 - 3ab(a+b+c)$$

$$= (a+b+c)^3 - 3(a+b)c(a+b+c) - 3ab(a+b+c)$$

$$= (a+b+c)[(a+b+c)^2 - 3(ab+bc+ca)]$$

$$= (a+b+c)(a^2 + b^2 + c^2 - ab - bc - ca)$$

$$(2) \quad \text{若 } a+b+c=0 \text{ 則 } a^3 + b^3 + c^3 = 3abc$$

$$(3) \quad a^3 + b^3 + c^3 - 3abc = (a+b+c)(a^2 + b^2 + c^2 - ab - bc - ca)$$

$$= (a+b+c) \frac{1}{2} [(a-b)^2 + (b-c)^2 + (c-a)^2]$$

$$\because (a-b)^2 + (b-c)^2 + (c-a)^2 \geq 0,$$

$$a^3 + b^3 + c^3 - 3abc \text{ 與 } a+b+c \text{ 同號}$$

【觀念三】高次公式：

$$a^n - b^n = (a-b)(a^{n-1} + a^{n-2}b + \cdots + ab^{n-2} + b^{n-1})$$

$$a^n + b^n = (a+b)(a^{n-1} - a^{n-2}b + \cdots - ab^{n-2} + b^{n-1}) \quad (\text{若 } n \text{ 為奇數})$$

重要應用：(1) $x^2 - 1 =$

$$x^3 - 1 =$$

$$x^4 - 1 =$$

$$x^5 - 1 =$$

$$(2) \quad x^3 + 1 =$$

$$x^5 + 1 =$$

1. (能力指標：配方)

$$x, y \in \mathbb{R}, x^2 + xy + y^2 + x - y + 1 = 0, \text{ 求 } x, y = ?$$

解：



2. (能力指標： $a^3 + b^3 + c^3 - 3abc$ 的應用)

$$\text{若已知 } a + b + c = 5, ab + bc + ac = 3, \text{ 試求： } a^3 + b^3 + c^3 - 3abc = ?$$

解：



3. (能力指標： $a^3+b^3+c^3-3abc$ 的應用)

a, b, c 為三角形三邊長且滿足 $a^3+b^3+c^3=3abc$ ，證明此三角形為正三角形。

證：



4. (能力指標： $a^3+b^3+c^3-3abc$ 的應用)

試求 $(2^5+3)^3+(8-2^5)^3-11^3=?$

解：



5. (能力指標： $a^3 + b^3 + c^3 - 3abc$ 的應用)

化簡 $(2x+3)^3 + (3x-4)^3 + (1-5x)^3$ 。

解：



6. (能力指標： $a^3 + b^3 + c^3 = 3abc$ 的應用)

試因式分解 $(3a-2b)^3 - (5c-2b)^3 - (3a-5c)^3$

解：



數位 延伸閱讀回家作業



1. 已知 $x = \sqrt{7} + \sqrt{5} - \sqrt{2}$, $y = \sqrt{7} - \sqrt{5} + \sqrt{2}$, $z = -\sqrt{7} + \sqrt{5} + \sqrt{2}$,

試回答下列問題：

(1) $x^2 + y^2 + z^2 + xy + yz + zx =$ _____ 。

(2) $x^3 + y^3 + z^3 - 3xyz =$ _____ 。



2. 設 a, b, c 為三角形三邊長且 $8^a + 8^b + 8^c = 3 \cdot 2^{a+b+c}$, 證明三角形為正三角形。

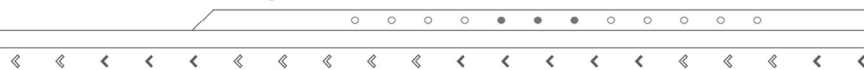
3. 因式分解 $a^3 + b^3 - c^3 + 3abc$ 。

簡 答

1. (1) 28 (2) $4(2\sqrt{2} + 5\sqrt{5} + 7\sqrt{7} - 3\sqrt{70})$ 2. 見詳解

3. $(a+b-c)(a^2+b^2+c^2-ab+bc+ca)$

主題 11 因式分解



型一 分組提出公因式

例 1. 試因式分解下列各式：(1) $ab(1-c^2)-c(a^2-b^2)$

$$(2) 9+3(x^2+x+1)+x^2(x+1)$$

解：



BMYN

例 2. 因式分解 $1-a^3+b^3-a^3b^3=?$

解：



XVTH

型二 十字交乘法

例 1. 試因式分解下列各式：(1) $a^2b^2x^2 + 3ab^2x - 4b^2$

(2) $5x^3y - 25x^2y^2 + 30xy^3$

(3) $x^2 - 2bx - (a^2 - b^2)$

解：



例 2. 因式分解(1) $(x^2 + 2x + 4)(x^2 + 2x - 6) + 21$

(2) $(x^2 + 3x + 2)(x^2 + 7x + 12) - 3$

解：



型三 拆項與補項

例 1. 試因式分解下列各式：(1) $x^4 + x^3 + 2x^2 + x + 1$

(2) $x^4 + 4$

(3) $9x^4 + 5x^2 + 1$

解：



例 2. (1) 因式分解 $n^4 - 6n^2 + 25$

(2) $n \in \mathbb{Z}$ ，若 $n^4 - 6n^2 + 25$ 為一質數，求 n 與此質數。

解：



型四 強迫分解

- 例 1.** 因式分解：(1) $xy + 3x - 2y - 6$
(2) $xy + 5x + 4y + 20$
(3) $x^2y^2 - x^2 - y^2 + 1$

解：



型五 配合整數解

例 1. 設 $x \in \mathbb{N}$ 且 $\sqrt{x^2 + 71} \in \mathbb{N}$ ，試解 $x = ?$

解：



例 2. 設 $x, y \in \mathbb{Z}$ 且 $\frac{5}{x} + \frac{4}{y} = 3$ ，試解數對 $(x, y) = ?$

解：



例 3. (能力指標：平方差)

已知**直角**三角形的三邊長皆為整數，且有一股的長度是 20，
求這樣的直角三角形有幾個？

解：





回家作業



1. 下列何者為 $xy - 8 + 4x - 2y$ 的因式？

- (A) $x+2$ (B) $x-2$ (C) $x-4$ (D) $x-8$ 。

AZPV



2. 下列哪一個式子是 $\frac{a^3}{8} - b^3$ 的因式？

- (A) $a^2 - 2ab + 4b^2$ (B) $a^2 + 2ab + 4b^2$ (C) $2a + b$ (D) $a + 2b$ 。

3. 因式分解 $4x^2y^2 + 2xy - x^2 - y^2$ 。



1. (B) 2. (B) 3. $(2xy + x - y)(2xy - x + y)$



回家作業



4. 下列何者正確？

(A) $(a-b)(a^2-ab+b^2)=a^3+b^3$

(B) $(a+b)(a^2-ab+b^2)=a^3-b^3$

(C) $(a^2+ab+b^2)(a^2-ab+b^2)=a^4-a^2b^2+b^4$

(D) $(a+b)(a-b)(a^2+b^2)=a^4-b^4$ 。

5. 試因式分解 $ab(1-c^2)-c(a^2-b^2)$ 。

6. 在 240 與 250 之間恰有一個正整數可以整除 $2^{24}-1$ ，則此數為_____。



4. (D) 5. $(a+bc)(b-ac)$ 6. 241



回家作業



7. 求 $x^2 - 4y^2 = 1$ 之整數解。

8. 下列何者不是 $x^5 - 3x^3 - 4x$ 的因式？

- (A) $x-2$ (B) $x+2$ (C) x^3+x (D) $x-1$ 。

9. 計算 $\frac{(10^4+64)(18^4+64)(26^4+64)(34^4+64)(42^4+64)}{(6^4+64)(14^4+64)(22^4+64)(30^4+64)(38^4+64)}$ 之值。

[提示：利用 x^4+64 的因式分解]



7. (1, 0) 或 (-1, 0) 8. (D) 9. 97



回家作業



10. 因式分解 $a^4 + 4b^4$ 。

11. 因式分解 $(a^2 - 1)(b^2 - 1) - 4ab$ 。

12. 有三個質數，其積為其和的 19 倍，求此三質數和。



10. $(a^2 + 2ab + 2b^2)(a^2 - 2ab + 2b^2)$ 11. $(ab + a + b - 1)(ab - a - b - 1)$ 12. 33



回家作業



13. 因式分解 $(x+1)(x+3)(x+5)(x+7)+15$ 。(分成 4 個一次因式)

14. 解 $(x+1)(2x+1)(3x-1)(4x-1)+6x^4=0$ 。

15. 已知 x 和 $\sqrt{x^2-9x-1}$ 皆為整數，試求 x 之值。



13. $(x+2)(x+6)(x+4-\sqrt{6})(x+4+\sqrt{6})$ 14. $x = \frac{-1 \pm \sqrt{6}}{5}$ 或 $\frac{-1 \pm \sqrt{7}}{6}$

15. $x = 26$ or 10 or -17 or -1



回家作業



16. 因式分解 $(ab-1)^2 + (a+b)(ab+1) + 5ab$ 。

17. 因式分解 $(xy+1)(x+1)(y+1) + xy$ 。



16. $(ab+1+a)(ab+1+b)$ 17. $(xy+1+x)(xy+1+y)$

陳立數學~95~絕對智慧
尊重著作權所有・盜翻印法律追究

數位[📶]延伸閱讀



型六 雙十字交乘法

1. 因式分解 $x^2 + xy - 6y^2 - 3x + 11y - 4$

解：



2. 因式分解 $3x^2 - 8xy - 3y^2 - 10x - 10y - 8$

解：



3. 因式分解 $2x^2 - xy - 6y^2 + 5x + 11y - 3$

解：



主題 12 平方根



【觀念一】平方根定義：設 a, x 均為實數，

- (1) 若 $x^2 = a \geq 0$ ，則 x 叫做 a 的平方根，以 $x = \pm\sqrt{a}$ 表示
- (2) 每一個正數均有兩個平方根，且互為相反數
- (3) 0 只有一個平方根，即 0 本身

【觀念二】平方根性質：設 a, b 均為實數，則

- (1) $\sqrt{a^2} = |a|$
- (2) $\sqrt{(a-b)^2} = |a-b|$

【觀念三】平方根運算：

- (1) 同次根式，可以乘除。

例 $\sqrt{3} \times \sqrt{5} = \sqrt{3 \times 5} = \sqrt{15}$

- (2) 同類根式，可以加減。

例 $2\sqrt{3} + 5\sqrt{3} = (2+5)\sqrt{3} = 7\sqrt{3}$

例 1. (能力指標：平方根)

設 -2 為 $2x - y$ 的平方根，且 $x - 2y + 10$ 的平方根為 3 ，

求 $\sqrt{x - y} = ?$

- (A) -1 (B) 1 (C) $-\sqrt{3}$ (D) $\sqrt{5}$

解：



例 2. (101 學測試題)

$\sqrt{\frac{1}{5^2} + \frac{1}{4^2}} + 1$ 等於下列哪一個選項？

- (1) 1.01 (2) 1.05 (3) 1.1 (4) 1.15 (5) 1.21

解：





回家作業



1. 已知 $\sqrt{2} \approx 1.414$, $\sqrt{3} \approx 1.732$ ，若 $x = \frac{9\sqrt{3} + 7\sqrt{12} - 5\sqrt{48}}{(1 + \sqrt{2})(\sqrt{12} - \sqrt{6})}$ ，

則下列何者為真？

- (A) $0 < x < 1$ (B) $1 < x < 2$ (C) $2 < x < 3$ (D) $3 < x < 4$ 。

FHPL



2. 設 $x = \frac{\sqrt{5}-1}{2}$ ，試求下列各式的值：

(1) $\frac{1}{x} - 1$ (2) $x^2 + x - 1$



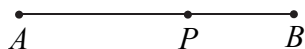
1. (C) 2. (1) $\frac{\sqrt{5}-1}{2}$ (2) 0



回家作業



3. 義大利畫家達文西把一線段分成兩段不相等的線段，使得較長的一段與較短的一段之比等於全段與較長一段之比，而這種比值稱為黃金比例，常用 φ 表示：



$$\varphi = \frac{\overline{AP}}{\overline{BP}} = \frac{\overline{AB}}{\overline{AP}} = \frac{\sqrt{5}+1}{2}, \text{ 試求 } \overline{BP} = \alpha \overline{AB} \text{ 時的 } \alpha \text{ 值。}$$



3. $\frac{3-\sqrt{5}}{2}$



【觀念一】立方根定義：設 a, x 均為實數，
若 $x^3 = a$ ，則 x 叫做 a 的立方根，
其中實立方根以 $x = \sqrt[3]{a}$ 表示



【觀念二】立方根性質：設 a, b 均為實數，則

$$(1) \sqrt[3]{a^3} = a \qquad (2) \sqrt[3]{(a-b)^3} = a-b$$

【觀念三】立方根運算：

(1) 同次根式，可以乘除。

例 $\sqrt[3]{3} \times \sqrt[3]{5} = \sqrt[3]{3 \times 5} = \sqrt[3]{15}$

(2) 同類根式，可以加減。

例 $2\sqrt[3]{3} + 5\sqrt[3]{3} = (2+5)\sqrt[3]{3} = 7\sqrt[3]{3}$

1. (能力指標：方根運算)

設 a, b 為實數，且 $a+b < 0$ ， $ab > 0$ ，則 $\sqrt[3]{-a^3} \cdot \sqrt{b^2} = ?$

- (A) $-ab$ (B) $\pm ab$ (C) ab (D) $-|ab|$

解：



2. (能力指標：根式化簡)

將 $6\sqrt[3]{4} + \sqrt[3]{-32} + 2\sqrt[3]{108}$ 化為最簡根式得其值為_____。

解：



3. (能力指標：根式化簡)

化簡 $\sqrt[3]{2} \cdot (5\sqrt[3]{-32} + 2\sqrt[3]{108}) + \sqrt{(\sqrt{3} - 2)^2} =$

(A) $-10 + \sqrt{3}$ (B) $-10 - \sqrt{3}$ (C) $-6 - \sqrt{3}$ (D) $-6 + \sqrt{3}$

解：



2025^年
[單一年度]

陳立教育

唯有陳立絕不混榜亂真 ★ 只有最好才能成就更好

姓名	就讀高中	錄取校系	姓名	就讀高中	錄取校系	姓名	就讀高中	錄取校系
劉○昀	港明中學	陽交大 工業工程與管理	林○悅	松山高中	成大 資訊工程學系	李○澤	家齊高中	成大 水利及海洋工程
林○泓	松山高中	陽交大 醫學生物技術暨檢驗	賴○泰	成功高中	成大 資源工程學系	張○凱	松山高中	成大 地球科學系
羅○宸	師大附中	陽交大 醫學生物技術暨檢驗	陳○瑀	南山中學	成大 資源工程學系	孫○絜	台中女中	成大 地球科學系
陳○昕	興大附中	陽交大 醫學生物技術暨檢驗	張○蓉	六和高中	成大 資源工程學系	謝○庭	台南一中	成大 地球科學系
盧○安	華江高中	陽交大 生物科技學系	許○洋	港明中學	成大 資源工程學系	蘇○熙	師大附中	成大 化學系
楊○叡	西松高中	陽交大 生物科技學系	李○軒	成功高中	成大 化學工程學系	黃○巧	中山女中	成大 化學系
莫○翔	西松高中	陽交大 生物醫學工程	王○程	成功高中	成大 化學工程學系	林○宇	南科國中	成大 化學系
林○旭	建國中學	陽交大 生物醫學工程	黃○皓	明道中學	成大 化學工程學系	黃○元	後甲國中	成大 化學系
胡○瑜	復興國中	陽交大 生物醫學工程	楊○惠	中壢高中	成大 化學工程學系	孫○涵	北大高中	成大 化學系
余○茵	北大高中	陽交大 生物醫學影像暨放射	曾○軒	武陵高中	成大 化學工程學系	彭○淇	內壢高中	成大 化學系
黃○洋	師大附中	陽交大 理學院	李○鉉	台南一中	成大 化學工程學系	黃○宸	台南女中	成大 化學系
郭○愷	成功高中	陽交大 理學院	廖○豪	忠孝國中	成大 化學工程學系	林○彤	大直高中	成大 材料科學及工程
王○婕	後甲國中	陽交大 管理科學系	黃○宏	忠孝國中	成大 化學工程學系	李○捷	復旦高中	成大 材料科學及工程
楊○幼	台南女中	陽交大 管理科學系	陳○羽	北一女中	成大 機械工程學系	劉○含	中山女中	成大 系統及船舶機電工程
劉○鴻	恆毅中學	陽交大 應用數學系	李○宏	中和高中	成大 機械工程學系	鄭○堯	板橋高中	成大 航空太空工程學系
林○任	台南二中	陽交大 應用數學系	陳○雅	北一女中	成大 機械工程學系	呂○祐	武陵高中	成大 航空太空工程學系
林○萱	華僑高中	陽交大 傳播與科技學系	歐○安	衛道中學	成大 機械工程學系	陳○宇	台南一中	成大 航空太空工程學系
施○喆	內壢高中	陽交大 傳播與科技學系	李○晴	武陵高中	成大 機械工程學系	陳○鈞	薇閣高中	成大 物理學系
易○榆	東莞台校	陽交大 傳播與科技學系	吳○晨	北一女中	成大 光電科學與工程學系	蔡○佑	和平高中	成大 物理學系
吳○諾	曉明女中	陽交大 人文社會學系	田○瑋	新民高中	成大 光電科學與工程學系	周○力	中和高中	成大 物理學系
劉○賢	建國中學	陽交大 藥學系	陳○嫣	中山女中	成大 土木工程學系	曾○瑩	中山女高	成大 物理治療學系
何○晴	北一女中	陽交大 藥學系	林○承	南山中學	成大 土木工程學系	施○均	後甲國中	成大 物理治療學系
邱○惟	板橋高中	陽交大 藥學系	簡○紋	興大附中	成大 土木工程學系	郭○岑	台南女中	成大 測量及空間資訊
曾○駿	建國中學	陽交大 藥學系	張○熙	台南一中	成大 土木工程學系	陳○文	市立大同	成大 法律學系
顏○甦	台南女中	陽交大 護理學系	林○軒	台中二中	成大 環境工程學系	林○恆	師大附中	成大 數學系
邢○亞	中山女中	陽交大 護理學系	歐○騫	建興國中	成大 工程科學系	廖○捷	台中一中	成大 數學系
周○瑋	北一女中	成大 牙醫學系	邱○庭	德光中學	成大 工業與資訊管理學系	陳○安	中山女中	成大 都市計劃學系
黃○甯	台南女中	成大 電機工程學系	陳○羽	德光中學	成大 工業與資訊管理學系	蕭○東	師大附中	成大 會計學系
沈○翔	永康國中	成大 電機工程學系	黃○霖	東山中學	成大 水利及海洋工程學系	李○喬	台南女中	成大 會計學系
林○程	松山高中	成大 電機工程學系	許○維	興大附中	成大 水利及海洋工程學系	張○元	安南國中	成大 經濟學系
周○廷	師大附中	成大 資訊工程學系	許○瑜	文華高中	成大 水利及海洋工程學系	鄭○恩	成功高中	成大 企業管理學系

陳立既出 誰與爭鋒 ★ 各類榜首 盡在陳立

頂尖大學風雲榜

臺大、清大、陽交大、成大、政大 ★ Part 2

姓名	就讀高中	錄取校系	姓名	就讀高中	錄取校系	姓名	就讀高中	錄取校系
歐○霖	板橋高中	成大 企業管理學系	黃○睿	建國中學	政大 會計學系	劉○寧	北一女中	政大 傳播學院
郭○恩	武陵高中	成大 成星招生丁組	張○瑜	板橋高中	政大 會計學系	陳○安	中山女中	政大 傳播學院
張○睿	師大附中	成大 生物醫學工程學系	江○安	北一女中	政大 會計學系	許○瑄	中崙高中	政大 傳播學院
王○	武陵高中	成大 職能治療學系	郭○銘	文華高中	政大 會計學系	昌○寧	中山女高	政大 傳播學院
沈○霓	中山女高	成大 醫學檢驗生物技術	高○磐	海山高中	政大 經濟學系	林○亨	新民高中	政大 傳播學院
鄭○晴	台南二中	成大 護理學系	楊○惟	市立大同	政大 經濟學系	劉○安	華盛頓中學	政大 傳播學院
謝○錫	慈濟國中	成大 護理學系	王○嫻	北一女中	政大 經濟學系	李○綾	中壢高中	政大 傳播學院
紀○甫	板橋高中	成大 歷史學系	孫○瑞	中和高中	政大 經濟學系	黃○勳	復興國中	政大 傳播學院
黃○清	平鎮高中	成大 歷史學系	王○潔	板橋高中	政大 經濟學系	陳○璋	建國中學	政大 應用數學系
許○晴	台中女中	成大 心理學系	郭○恩	延平中學	政大 經濟學系	侯○恩	華江高中	政大 應用數學系
李○芸	恆毅中學	成大 中文系	施○澤	薇閣高中	政大 經濟學系	曾○諒	復旦高中	政大 應用數學系
童○尊	華江高中	成大 台灣文學系	沈○儀	平鎮高中	政大 統計學系	陳○安	建興國中	政大 應用數學系
許○涵	明倫高中	成大 外國語文學系	蔡○祥	建國中學	政大 資訊科學系	黃○庭	北一女中	政大 公共行政學系
黃○華	中正高中	成大 外國語文學系	連○丞	大直高中	政大 資訊科學系	李○慧	和平高中	政大 教育學系
郭○汝	板橋高中	成大 外國語文學系	魏○浩	長榮中學	政大 資訊科學系	劉○臻	板橋高中	政大 外交學系
張○瑀	台中女中	成大 外國語文學系	陳○廣	板橋高中	政大 風險管理與保險	賴○安	板橋高中	政大 外交學系
俞○軒	建國中學	政大 法律學系	陳○澤	中和高中	政大 風險管理與保險	陳○宣	台南女中	政大 外交學系
林○婷	薇閣高中	政大 法律學系	林○紘	市立大同	政大 企業管理學系	羅○均	新竹女中	政大 心理學系
陳○灝	建國中學	政大 法律學系	彭○鴻	海山高中	政大 企業管理學系	王○桓	成功高中	政大 心理學系
孫○霖	成功高中	政大 法律學系	陳○榛	北一女中	政大 企業管理學系	陳○靜	中山女中	政大 中國文學系
劉○誠	台中一中	政大 法律學系	劉○嘉	中壢高中	政大 企業管理學系	吳○霆	師大附中	政大 英國語文學系
陳○妘	新莊高中	政大 社會學系	楊○安	曉明女中	政大 企業管理學系	林○潔	北一女中	政大 英國語文學系
吳○恩	台南一中	政大 金融學系	林○欣	北一女中	政大 資訊管理學系	鄭○筠	景美女中	政大 日本語文學系
許○菱	中山女中	政大 金融學系	徐○雙	中山女中	政大 資訊管理學系	許○	彰藝高中	政大 日本語文學系
黃○綺	台中女中	政大 金融學系	黃○妍	板橋高中	政大 資訊管理學系	黃○容	中和高中	政大 韓國語文學系
黃○紘	松山高中	政大 財政學系	王○悠	成淵高中	政大 地政學系	余○讓	板橋高中	政大 土耳其語文學系
張○暄	中和高中	政大 財政學系	林○宇	松山高中	政大 地政學系	陳○婷	北一女中	政大 阿拉伯語文學系
林○捷	政大附中	政大 財務管理學系	紀○芸	薇閣高中	政大 地政學系	林○如	永春高中	政大 阿拉伯語文學系
廖○綸	北一女中	政大 國際經營與貿易	謝○柔	台中女中	政大 地政學系	林○彤	永春高中	政大 阿拉伯語文學系
蔡○瑟	崇明國中	政大 國際經營與貿易	鄭○仁	成功高中	政大 傳播學院	陳○驊	南港高中	政大 斯拉夫語文學系
李○嫻	板橋高中	政大 會計學系	嚴○濤	中山女中	政大 傳播學院	陳○智	台中二中	政大 東南亞語文學系

全國最大 ★ 最專業的連鎖 K12 教育集團

DKFH



【觀念四】 分母有理化 $\frac{1}{\sqrt{a}-\sqrt{b}} = \frac{1}{\sqrt{a}-\sqrt{b}} \times \frac{\sqrt{a}+\sqrt{b}}{\sqrt{a}+\sqrt{b}} = \frac{\sqrt{a}+\sqrt{b}}{a-b}$



YQPJ

解：

例 2. (能力指標：有理化)

試有理化：(1) $\frac{\sqrt{6}+\sqrt{5}}{\sqrt{5}+\sqrt{3}}$ (2) $\frac{1}{1+\sqrt{2}+\sqrt{3}}$

解：



例 3. (師大附中)

若 $p = \sqrt{10} - 3$ ， $q = 3 - 2\sqrt{2}$ ， $r = 2\sqrt{2} - \sqrt{7}$ ，則 p, q, r 三數之大小順序為 _____。

解：

例 4. (能力指標：有理化)

化簡 $\frac{1}{\sqrt{2}+1} + \frac{1}{\sqrt{3}+\sqrt{2}} + \cdots + \frac{1}{\sqrt{100}+\sqrt{99}} = ?$

解：





回家作業



1. 滿足 $\sqrt{90x}$ 為正整數且 $1 \leq x \leq 100$ 的正整數 x 之值有_____個。



2. 化簡 $\frac{1}{2-\sqrt{3}} - \frac{5\sqrt{2}}{1+\sqrt{6}} + \frac{1}{\sqrt{3}+\sqrt{2}} =$ _____。

3. $(\frac{1}{\sqrt{2}+\sqrt{3}} + \frac{2}{\sqrt{5}+\sqrt{3}} + \frac{3}{2\sqrt{2}+\sqrt{5}})^2$ 經化簡後可得結果為_____。



1. 3 2. 2 3. 2



回家作業



4. 若 $x = \sqrt{7} + \sqrt{6}$, $y = \sqrt{6} - \sqrt{7}$, 則 $2x^2 + 3xy + 2y^2 =$ _____。

5. 若 $\frac{1}{\sqrt{4-\sqrt{14}}} = \frac{\sqrt{b+c\sqrt{14}}}{a}$, 求 $a+b+c$ 之值, 其中 a, b, c 為最小正整數解。

6. 實數 a 滿足 $|1996-a| + \sqrt{a-1997} = a$, 則 $a-1996^2$ 之值為_____。



4. 49 5. 12 6. 1997



回家作業



7. $a = \sqrt{5} + \sqrt{7} + \sqrt{11}$, $b = \sqrt{2} + \sqrt{7} + \sqrt{14}$, $c = \sqrt{2} + \sqrt{10} + \sqrt{11}$, 則 a, b, c 的大小關係為何?
- (A) $a > b > c$ (B) $a > c > b$ (C) $b > c > a$
(D) $c > b > a$ (E) $c > a > b$ 。

8. 化簡 $\frac{12}{\sqrt{2} + \sqrt{3} + \sqrt{5}} = \underline{\hspace{2cm}}$ 。(分母不可含方根)

9. 試化簡 $\frac{1}{1+\sqrt{3}} + \frac{1}{\sqrt{3}+\sqrt{5}} + \frac{1}{\sqrt{5}+\sqrt{7}} + \cdots + \frac{1}{\sqrt{23}+\sqrt{25}} = \underline{\hspace{2cm}}$ 。



7. (B) 8. $2\sqrt{3} + 3\sqrt{2} - \sqrt{30}$ 9. 2



回家作業



10. 請選出選項當中最大者：

- (1) $10-3\sqrt{11}$ (2) $51-10\sqrt{26}$ (3) $3\sqrt{11}-10$
(4) $10\sqrt{26}-51$ (5) $\sqrt{401}-20$ 。

11. 已知 $x = \frac{\sqrt{3}}{2}$ ，則 $\frac{1-x}{1-\sqrt{1-x}} + \frac{1+x}{1+\sqrt{1+x}}$ 之值為 _____。

12. 化簡 $\sqrt{(5+2\sqrt{6})^3} + \sqrt{(5-2\sqrt{6})^3}$ 可得下列選項中的哪個值？請選出來。

- (1) $13\sqrt{2}$ (2) $17\sqrt{3}$ (3) $17\sqrt{5}$ (4) $18\sqrt{3}$ (5) $18\sqrt{2}$ 。



10. (1) 11. 1 12. (4)



回家作業



13. 比較下列各數中，何者最小？

(1) $\sqrt{400} + \sqrt{400}$

(2) $\sqrt{401} + \sqrt{399}$

(3) $\sqrt{402} + \sqrt{398}$

(4) $\sqrt{403} + \sqrt{397}$ 。

14. 已知 $x = \frac{\sqrt{5} + \sqrt{3}}{\sqrt{5} - \sqrt{3}}$ ，則 $x^3 - \frac{1}{x^3} =$ _____ 。



13. (4) 14. $126\sqrt{15}$



回家作業



15. (103 學測試題)

關於下列不等式，請選出正確的選項。

(1) $\sqrt{13} > 3.5$ (2) $\sqrt{13} < 3.6$ (3) $\sqrt{13} - \sqrt{3} > \sqrt{10}$

(4) $\sqrt{13} + \sqrt{3} > \sqrt{16}$ (5) $\frac{1}{\sqrt{13} - \sqrt{3}} > 0.6$



15. (1)(4)



型二 三次根式

【觀念一】原理： $(x+y)(x^2-xy+y^2)=x^3+y^3$

$$(x-y)(x^2+xy+y^2)=x^3-y^3$$



【觀念二】立方根式分母有理化

$$\begin{aligned}\frac{1}{\sqrt[3]{a}+\sqrt[3]{b}} &= \frac{1}{\sqrt[3]{a}+\sqrt[3]{b}} \times \frac{\sqrt[3]{a^2}-\sqrt[3]{ab}+\sqrt[3]{b^2}}{\sqrt[3]{a^2}-\sqrt[3]{ab}+\sqrt[3]{b^2}} \\ &= \frac{\sqrt[3]{a^2}-\sqrt[3]{ab}+\sqrt[3]{b^2}}{a+b}\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\frac{1}{\sqrt[3]{a}-\sqrt[3]{b}} &= \frac{1}{\sqrt[3]{a}-\sqrt[3]{b}} \times \frac{\sqrt[3]{a^2}+\sqrt[3]{ab}+\sqrt[3]{b^2}}{\sqrt[3]{a^2}+\sqrt[3]{ab}+\sqrt[3]{b^2}} \\ &= \frac{\sqrt[3]{a^2}+\sqrt[3]{ab}+\sqrt[3]{b^2}}{a-b}\end{aligned}$$

1. (能力指標：三次根式有理化)

試有理化：(1) $\frac{1}{\sqrt[3]{12}}$ (2) $\sqrt[3]{\frac{2}{3}}$ (3) $\frac{5}{2-\sqrt[3]{3}}$ (4) $\frac{5}{1+\sqrt[3]{2}+\sqrt[3]{4}}$



解：

2. (能力指標：三次方根方程組)

解聯立方程式 $\begin{cases} x - y = 29 \\ \sqrt[3]{x-1} - \sqrt[3]{y+2} = 2 \end{cases}$ 得 y 之值為 _____。

解：



3. (能力指標：三次方根化簡)

試證： $\sqrt[3]{20+14\sqrt{2}} + \sqrt[3]{20-14\sqrt{2}} = 4$ 。

解：



4. (能力指標：有理化)

化簡 $\frac{\sqrt{35} + \sqrt{21} + 5 + \sqrt{15}}{\sqrt{7} + 2\sqrt{5} + \sqrt{3}}$

解：



數位[📶]延伸閱讀回家作業



1. 試將 $\frac{6}{\sqrt[3]{4}-1}$ 之分母有理化。



1. $2(2\sqrt[3]{2} + \sqrt[3]{4} + 1)$

主題 14 數與式綜合題型



《 《 < < < 《 《 《 《 《 < < < < 《 《 《 < <

例 1. (能力指標：配方法)

設實數 $x = n + r$ ，是由整數 n ，以及正的小數部分 r 組成。

若其中 $n^2 + 2nr + r^2 - 8n - 8r + 13 = 0$ ，且 $0 < r < \frac{1}{2}$ ，則 $n =$ _____。

解：



例 2. (103 數乙試題)

三個相異實數 a 、 b 、 c 滿足 $b = \frac{4}{5}a + \frac{1}{5}c$ ，如果將 a 、 b 、 c 標示

在數線上，則

- (1) b 在 a 與 c 之間
- (2) $c > b$
- (3) 若 $d = \frac{4}{3}a - \frac{1}{3}c$ ，則 d 在 a 與 b 之間
- (4) a 到 c 的距離是 a 到 b 的距離的 5 倍
- (5) 如果 $|b| = \frac{4}{5}|a| + \frac{1}{5}|c|$ ，則 $a \cdot b \cdot c > 0$

解：



例 3. (能力指標：分點性質)

設 P, Q, R 皆為大於 10 之實數且滿足 $\sqrt{6}|P+7|=\sqrt{7}|P-10|$,
 $\sqrt{7}|Q+7|=\sqrt{8}|Q-10|$, $\sqrt{5}|R+7|=\sqrt{6}|R-10|$, 試比較
 P, Q, R 之大小： _____ 。



解：

例 4. (能力指標：實數性質)

已知 a, b, c 為正實數，且 $a+\frac{4}{b}=7, b+\frac{9}{c}=5, c+\frac{25}{a}=8$,
試求 a, b, c 之值。



解：

例 5. (能力指標：循環小數)

ALXG



下列有關循環小數的敘述中，哪些是正確的？

- (1) $0.\overline{34} = 0.34\overline{3}$ (2) $0.5\overline{9} = 0.6$ (3) $0.\overline{2} + 0.\overline{8} > 0.\overline{7} + 0.\overline{3}$
(4) $0.\overline{4} + 0.\overline{6} = 1$ (5) $0.\overline{8} + 0.\overline{3} = 1.\overline{1}$

解：

例 6. (能力指標：A ≥ G)

GKYP



已知圓周率為 π 。若 $|x - 6| \leq 2$ ，則 $\frac{x^2 - 2\pi x + 2\pi^2}{x - \pi}$ 的最小值
為 _____。

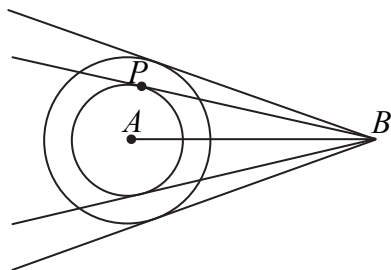
解：

例 7. (能力指標：A ≥ G 應用)

平面上兩點， A 、 B 之距離為 9，以 A 為圓心作一半徑為 r 的圓 A ，過 B 作圓 A 的切線，切點(之一)為 P 。當 r 變動時，三角形 PAB 的面積最大值為 _____。



解：



例 8. (能力指標：絕對值不等式)

滿足不等式 $1 \leq ||2x+3|-6| < 9$ 的整數 x 共有 _____ 個。



解：

例 9. (能力指標：絕對值不等式)

不等式 $||3x-7|-0.12|<1$ 的解範圍在實數線上的總長度為_____。

解：



例 10. (105 學測試題)

下列各方程式中，請選出有實數解的選項。

(1) $|x|+|x-5|=1$

(2) $|x|+|x-5|=6$

(3) $|x|-|x-5|=1$

(4) $|x|-|x-5|=6$

(5) $|x|-|x-5|=-1$

解：



例 11. (能力指標：無理數化簡)

YNDF



給定 $a = \frac{1+\sqrt{5}}{2}$ ，若 $a^3 = ma + n$ ，其中 m, n 為正整數，則數對

$(m, n) = \underline{\hspace{2cm}}$ 。

解：

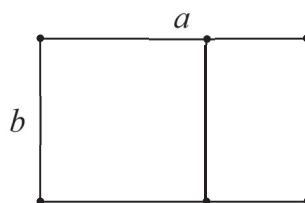
例 12. (建國中學學資)

將長寬各為 $a, b (a > b)$ 的矩形截去邊長為 b 的正方形後，剩下長寬為 b 、

$a - b$ 的小矩形。當大矩形與小矩形相似，即 $\frac{a}{b} = \frac{b}{a - b}$ 成立時，稱這樣的

長寬比例 $\frac{a}{b}$ 為黃金比例，並以符號 ϕ 表示。試求：

- (1) 黃金比例 ϕ 的值。
- (2) 用計算機求 ϕ 的近似值至小數點後第三位。



解：

數與式綜合題型解析

1.【答】：2

【解】：1° $n^2 + 2nr + r^2 - 8n - 8r + 13 = 0 \Rightarrow (n+r)^2 - 8(n+r) + 13 = 0$

$$\Rightarrow (n+r-4)^2 = 3 \Rightarrow n+r-4 = \pm\sqrt{3}$$

2° 若 $n + \frac{r}{\text{正小數}} - 4 = \sqrt{3} = 1 + \frac{(\sqrt{3}-1)}{\text{正小數}} \Rightarrow$ 不合 ($\because 0 < r < \frac{1}{2}$)

3° 若 $n + \frac{r}{\text{正小數}} - 4 = -\sqrt{3} = -2 + \frac{(2-\sqrt{3})}{\text{正小數}}$

$$\Rightarrow n-4 = -2 \Rightarrow n = 2$$

2.【答】：(1)(4)

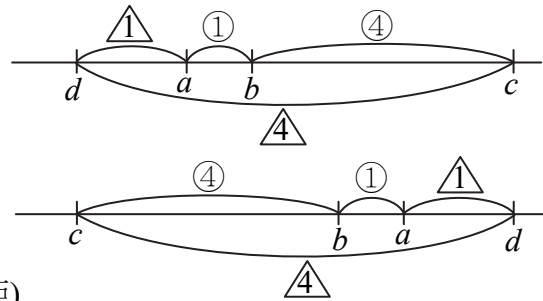
【解】：(1) 正確

(2) 錯誤 可能 $c > b$ 或 $c < b$

(3) 錯誤 d 在 a, b 之外

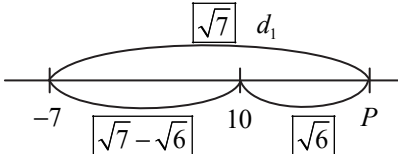
(4) 正確 a 到 c 距 = 5 (a 到 b 距)

(5) 錯誤 $|b| = \frac{a}{5}|a| + \frac{1}{5}|c| \begin{cases} a > 0, b > 0, c > 0 \Rightarrow b = \frac{4}{5}a + \frac{1}{5}c \Rightarrow \boxed{abc > 0} \\ a < 0, b < 0, c < 0 \Rightarrow -b = -\frac{4}{5}a - \frac{1}{5}c \Rightarrow \frac{4}{5}a + \frac{1}{5}c \Rightarrow \boxed{abc < 0} \end{cases}$

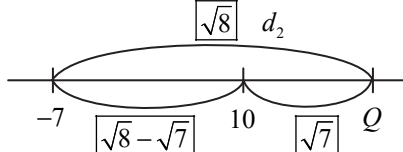


3.【答】： $R < P < Q$

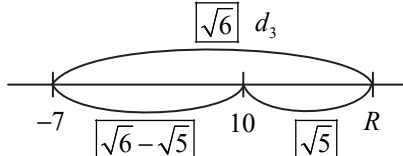
【解】： $1^\circ \sqrt{6}(P+7) = \sqrt{7}(P-10) \Rightarrow (\sqrt{7}-\sqrt{6})P = \sqrt{7} \times 10 + \sqrt{6} \times 7$

$$\Rightarrow P = \frac{\sqrt{7} \times 10 - \sqrt{6}(-7)}{\sqrt{7} - \sqrt{6}} \Rightarrow$$


$2^\circ \sqrt{7}(Q+7) = \sqrt{8}(Q-10) \Rightarrow (\sqrt{8}-\sqrt{7})Q = \sqrt{8} \times 10 + \sqrt{7} \times 7$

$$\Rightarrow Q = \frac{\sqrt{8} \times 10 - \sqrt{7}(-7)}{\sqrt{8} - \sqrt{7}} \Rightarrow$$


$3^\circ \sqrt{5}(R+7) = \sqrt{6}(R-10) \Rightarrow (\sqrt{6}-\sqrt{5})R = \sqrt{6} \times 10 + \sqrt{5} \times 7$

$$\Rightarrow R = \frac{\sqrt{6} \times 10 - \sqrt{5}(-7)}{\sqrt{6} - \sqrt{5}} \Rightarrow$$


$$4^\circ d_1 = 17 \times \frac{\sqrt{7}}{\sqrt{7} - \sqrt{6}} = 17 \times \sqrt{7}(\sqrt{7} + \sqrt{6}) = 17 \times (7 + \sqrt{42}) \doteq 17 \times (13. \sim)$$

$$d_2 = 17 \times \frac{\sqrt{8}}{\sqrt{8} - \sqrt{7}} = 17 \times \sqrt{8}(\sqrt{8} + \sqrt{7}) = 17 \times (8 + \sqrt{56}) \doteq 17 \times (15. \sim)$$

$$d_3 = 17 \times \frac{\sqrt{6}}{\sqrt{6} - \sqrt{5}} = 17 \times \sqrt{6}(\sqrt{6} + \sqrt{5}) = 17 \times (6 + \sqrt{30}) \doteq 17 \times (11. \sim)$$

$$\Rightarrow R < P < Q$$

4.【答】： $a=5, b=2, c=3$

$$\text{【解】：} 1^\circ \begin{cases} a + \frac{4}{b} = 7 \\ b + \frac{a}{c} = 5 \\ c + \frac{25}{a} = 8 \end{cases} \Rightarrow (a + \frac{25}{a}) + (b + \frac{4}{b}) + (c + \frac{a}{c}) = 20$$

$$2^\circ \text{利用配方法: } (\sqrt{a} - \frac{5}{\sqrt{a}})^2 + (\sqrt{b} - \frac{2}{\sqrt{b}})^2 + (\sqrt{c} - \frac{3}{\sqrt{c}})^2 = 0$$

$$\Rightarrow \sqrt{a} = \frac{5}{\sqrt{a}} \text{ 且 } \sqrt{b} = \frac{2}{\sqrt{b}} \text{ 且 } \sqrt{c} = \frac{3}{\sqrt{c}} \Rightarrow \begin{cases} a=5 \\ b=2 \\ c=3 \end{cases}$$

5.【答】：(1)(2)

$$\text{【解】：(1) 正確 } 0.\overline{34} = \frac{34}{99}$$

$$0.3\overline{43} = \frac{343-3}{990} = \frac{340}{990} = \frac{34}{99}$$

$$0.\overline{34} = 0.\overline{343434} \dots = 0.3\overline{43}$$

$$(2) \text{ 正確 } 0.5\overline{9} = \frac{59-5}{90} = \frac{6}{10} = 0.6$$

$$(3) \text{ 錯誤 } 0.\overline{2} + 0.\overline{8} = \frac{2}{9} + \frac{8}{9} = \frac{10}{9}$$

$$0.\overline{7} + 0.\overline{3} = \frac{7}{9} + \frac{3}{9} = \frac{10}{9}$$

$$(4) \text{ 錯誤 } 0.\overline{4} + 0.\overline{6} = \frac{4}{9} + \frac{6}{9} = \frac{10}{9} \neq 1$$

$$(5) \text{ 錯誤 } 0.\overline{8} + 0.\overline{3} = \frac{8}{9} + \frac{3}{9} = \frac{11}{9}$$

$$1.\overline{1} = \frac{11-1}{9} = \frac{10}{9}$$

6.【答】： 2π

【解】： $1^\circ |x-6| \leq 2 \Rightarrow -2 \leq x-6 \leq 2 \Rightarrow 4 \leq x \leq 8 \Rightarrow x-\pi > 0$

$$2^\circ \frac{x^2 - 2\pi x + 2\pi^2}{x - \pi} = \frac{(x - \pi)^2 + \pi^2}{x - \pi}$$

$$= (x - \pi) + \left(\frac{\pi^2}{x - \pi}\right) \geq 2\sqrt{(x - \pi)\left(\frac{\pi^2}{x - \pi}\right)} = 2\pi$$

3° 最小值 $= 2\pi$

$$\text{當等號成立時：} x - \pi = \frac{\pi^2}{x - \pi}$$

$$\Rightarrow (x - \pi)^2 = \pi^2 \Rightarrow x - \pi = \pi$$

$$\Rightarrow x = 2\pi$$

7.【答】： $\frac{81}{4}$

【解】： $1^\circ \Delta PAB$ 面積 $= \frac{1}{2}r\sqrt{81-r^2} = \frac{1}{2}\sqrt{r^2(81-r^2)}$

$$2^\circ \frac{r^2 + (81-r^2)}{2} \geq \sqrt{r^2(81-r^2)} \Rightarrow \frac{81}{2} \geq \sqrt{r^2(81-r^2)}$$

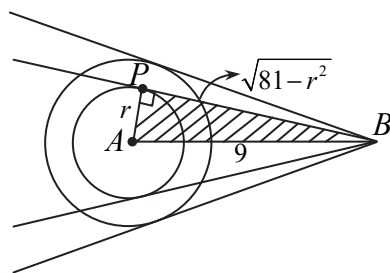
$$\Rightarrow \frac{81}{4} \geq \frac{1}{2}\sqrt{r^2(81-r^2)}$$

3° 取 ΔPAB 面積最大值 $= \frac{81}{4}$

$$\text{此時等號成立} \Rightarrow r^2 = 81 - r^2$$

$$\Rightarrow 2r^2 = 81$$

$$\Rightarrow \sqrt{2}r = 9 \Rightarrow r = \frac{9}{\sqrt{2}}$$



8.【答】： 14

【解】： $1^\circ 1 \leq ||2x+3|-6| < 9 \Rightarrow 1 \leq |2x+3|-6 < 9 \text{ 或 } -9 < |2x+3|-6 \leq -1$

$$\Rightarrow 7 \leq |2x+3| < 15 \text{ 或 } -3 < |2x+3| \leq 5$$

$$\Rightarrow 7 \leq |2x+3| < 15 \text{ 或 } |2x+3| \leq 5$$

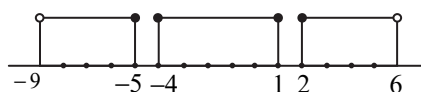
$$\Rightarrow 7 \leq 2x+3 < 15 \text{ 或 } -15 < 2x+3 \leq -7 \text{ 或 } -5 \leq 2x+3 \leq 5$$

$$\Rightarrow 2 \leq x < 6 \text{ 或 } -9 < x \leq -5 \text{ 或 } -4 \leq x \leq 1$$

2° 整數個數 $= -5 - (-9) + 1 - (-4) + 1 + 6 - 2$

$$= 4 + 6 + 4$$

$$= 14$$



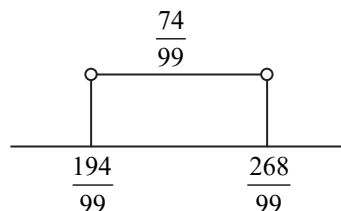
9.【答】： $\frac{74}{99}$

【解】： $1^\circ ||3x-7|-0.1\bar{2}|<1 \Rightarrow -1<|3x-7|-\frac{12}{99}<1 \Rightarrow \frac{-29}{33}<|3x-7|<\frac{37}{33}$

$$\Rightarrow |3x-7|<\frac{37}{33} \Rightarrow -\frac{37}{33}<3x-7<\frac{37}{33}$$

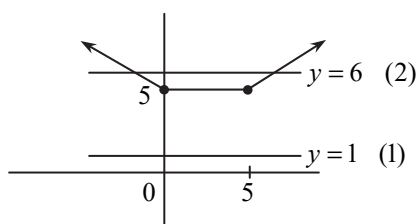
$$\Rightarrow \frac{194}{33}<3x<\frac{268}{33} \Rightarrow \frac{194}{99}<x<\frac{268}{99}$$

$$2^\circ \text{總長度} = \frac{268}{99} - \frac{194}{99} = \frac{74}{99}$$

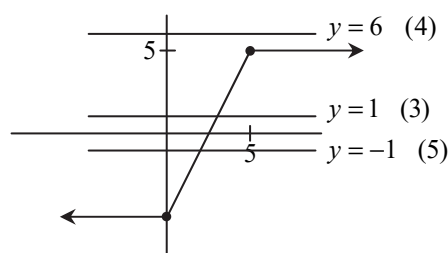


10.【答】： $(2)(3)(5)$

【解】： $1^\circ y=|x|+|x-5| \Rightarrow \begin{array}{c|c|c|c|c} x & 0 & 5 & 6 & -1 \\ \hline y & 5 & 5 & 7 & 7 \end{array}$



$$2^\circ y=|x|-|x-5| \Rightarrow \begin{array}{c|c|c|c} x & 0 & 5 \\ \hline y & -5 & 5 \end{array}$$



故選 (2)(3)(5)

11.【答】： $(2,1)$

【解】： $a^3 = \left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^3 = \frac{1+3\sqrt{5}+3\times 5+5\sqrt{5}}{8} = \frac{16+8\sqrt{5}}{8}$

$$= 2 + \sqrt{15} = 2 + (2a-1) = 1 + 2a$$

$$\therefore (m, n) = (2, 1)$$

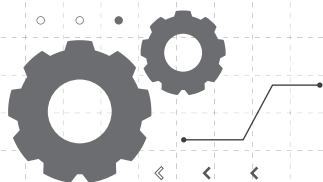
12.【答】： $(1) \frac{1+\sqrt{5}}{2}$ (2) 1.618

【解】： $(1) \frac{a}{b} = \frac{b}{a-b} \Rightarrow b^2 - ab \Rightarrow a^2 - ab - b^2 = 0 \Rightarrow \left(\frac{a}{b}\right)^2 - \left(\frac{a}{b}\right) - 1 = 0$

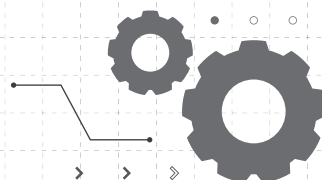
$$\Rightarrow \frac{a}{b} = \frac{1 \pm \sqrt{5}}{2} (\text{負不合}) \Rightarrow \frac{a}{b} = \frac{1 + \sqrt{5}}{2}$$

(2) 略

心得欄



心得欄





指數

主題 15 指數定義及基本運算



【觀念一】正整數指數的定義

設 $a \in \mathbb{R}$, $n \in \mathbb{N}$, 則 $a^n = a \times a \times a \times \cdots \times a$ (自乘 n 次)

a^n 唸作 a 的 n 次方, 其中 a 叫做**底數**(base number),

n 叫做**指數**(exponent), a^n 稱為**指數式**, 其結果稱為**冪**(power)。

【觀念二】零指數

(1) $a \in \mathbb{R}$, $a \neq 0$

定義: $a^0 = 1$

(2) 注意: 0^0 是**無意義**

【觀念三】負整數指數

$a \in \mathbb{R}$ 且 $a \neq 0$, $n \in \mathbb{N}$, 則 $a^{-n} = \frac{1}{a^n}$

【觀念四】有理數指數(分數指數)

(1) $a > 0$, $n \in \mathbb{N}$

定義: $a^{\frac{1}{n}} = \sqrt[n]{a}$

(2) $a > 0$, $n \in \mathbb{N}$, $m \in \mathbb{Z}$

定義: $a^{\frac{m}{n}} = (\sqrt[n]{a})^m = \sqrt[n]{a^m}$

【觀念五】實數指數運算 ($a > 0, b > 0, x, y \in \mathbb{R}$)

(1) $a^x \cdot a^y =$

(2) $\frac{a^x}{a^y} =$

(3) $(a^x)^y =$

(4) $(ab)^x =$

(5) $(\frac{a}{b})^x =$

【觀念六】重要性質 ($a > 0, x \in \mathbb{R}$)

(1) $a^x > 0$ 恆成立

(2) $a^x + a^{-x} \geq 2\sqrt{a^x \cdot a^{-x}} = 2\sqrt{a^0} = 2 \quad \therefore a^x + a^{-x} \geq 2$

(3) $a^{2x} + a^{-2x} = (a^x)^2 + (a^{-x})^2 =$

(4) $a^{3x} + a^{-3x} = (a^x)^3 + (a^{-x})^3 =$

(5) $(a^x + a^{-x})^2 = (a^x - a^{-x})^2 + 4$

(6) $(\frac{a^x + a^{-x}}{2})^2 = (\frac{a^x - a^{-x}}{2})^2 + 1$

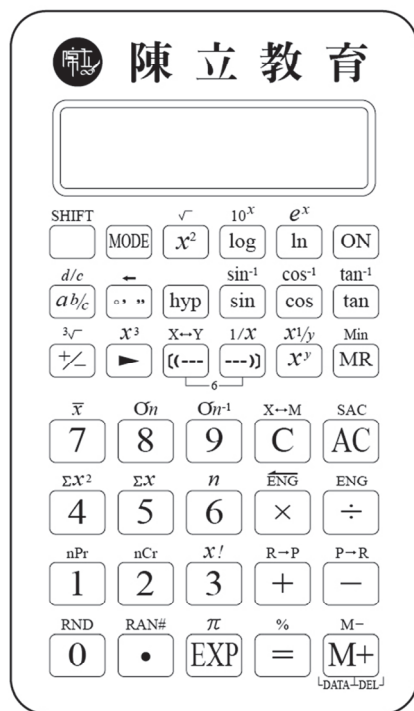
[立即練習] (1) $100^x + 100^{-x} = (10^2)^x + (10^2)^{-x} = (10^x)^2 + (10^{-x})^2$

=

(2) $9^x + 9^{-x} = (3^2)^x + (3^2)^{-x} = (3^x)^2 + (3^{-x})^2$

=

【觀念七】計算機指數求值



(1) $1.01^{365} \Rightarrow$ $\Rightarrow$ $\Rightarrow$ $\Rightarrow$

(2) $(0.99)^{365} \Rightarrow$ $\Rightarrow$ $\Rightarrow$ $\Rightarrow$

(3) $5^{0.5} \Rightarrow$ $\Rightarrow$ $\Rightarrow$ $\Rightarrow$

例 1. (能力指標：指數運算)

化簡下列各式：

(1) $[a^3 \cdot (a^{-2})^4]^{-1} =$

(2) $\sqrt[3]{\frac{\sqrt{a}}{\sqrt[5]{a^4}}} =$

(3) $(2 + \sqrt{3})^8 (2 - \sqrt{3})^{10} =$

(4) $729^{-\frac{1}{3}} + 32^{\frac{3}{5}} + \left(\frac{1}{27}\right)^{-\frac{1}{3}} =$

RSPT



例 2. (能力指標：指數關係式)

$8^x = 9^y = 6^z$ ，若 $\frac{2}{x} + \frac{3}{y} = \frac{k}{z}$ ，求 $k = ?$

解：

ASGW



例 3. (能力指標：指數關係式)

$$(2.5)^x = (0.025)^y = 1000, \text{ 求 } \frac{1}{x} - \frac{1}{y} = ?$$

解：



例 4. (能力指標：指數立方和)

$$\text{設 } a^{2x} = \sqrt{2} + 1, \text{ 求 } \frac{a^{3x} + a^{-3x}}{a^x + a^{-x}} = \underline{\hspace{2cm}}。$$

解：



例 5. (能力指標：指數倒數運算)

$$a > 0 \text{ 且 } a^{\frac{1}{2}} + a^{-\frac{1}{2}} = 3$$

求：(1) $a + a^{-1} = ?$

(2) $a^2 + a^{-2} = ?$

(3) $a^{\frac{3}{2}} + a^{-\frac{3}{2}} = ?$

(4) $a^{\frac{1}{4}} + a^{-\frac{1}{4}} = ?$

解：(1)

(2)

(3)

(4)



例 6. (能力指標：指數立方和)

已知 $a > 0, a^{2x} + a^{-2x} = 14$ ，求：(1) $a^x + a^{-x} = ?$ (2) $a^x = ?$

解：(1)

(2)



例 7. (能力指標：指數應用)

假設某個國家 40 年後，人口將**增加為**目前的 2 倍，問 10 年後人口是目前的幾倍？(相同時間成長倍數相同)

解：



例 8. (能力指標：指數應用)

在某一項新試驗中，細菌數一日後**增加 a 倍**，且知三日後細菌數為 200000， $4\frac{1}{2}$ 日後細菌為 1600000，試計算

(1) $a =$ _____

(2) 5 日後細菌數

(3) $\frac{3}{2}$ 日後細菌數

(4) 當細菌數到達 800000 時所需日數

解： (1)

(2)

(3)

(4)



例 9. (台南一中)

放射性物質的半衰期 T 定義：每經過時間 T ，該物質的質量會衰退成原來的一半。

設一個鉛製容器中有兩種放射性物質 A, B ，開始記錄時容器中物質 A 的質量是物質 B 質量一半，而經過 120 小時後， A, B 的質量相同。

已知物質 A 的半衰期為 8 小時，則物質 B 的半衰期 = _____ 小時

解：



回家作業



1. 若 $10^{2y} = 25$ ，試求 10^{-y} 之值為何？



2. 設 a, b 為正數，且滿足 $(a^{\frac{1}{4}} - b^{\frac{1}{4}})(a^{\frac{1}{4}} + b^{\frac{1}{4}})(a^{\frac{1}{2}} + b^{\frac{1}{2}}) = 2$ ， $ab^{-\frac{1}{8}} = \sqrt{b^3} \sqrt[4]{b} \sqrt[8]{b}$ ，
試求 a, b 之值。

3. 設 $\sqrt[3]{16} = \sqrt[3]{2^{3y-5}}$ 且 $3^{5x+6y} = 81^{xy}$ ，求 x, y 之值。



1. $\frac{1}{5}$ 2. $(a, b) = (4, 2)$ 3. $(x, y) = (2, 5)$



回家作業



4. 假設 $2^{0.6} = 1.516$, $2^{0.03} = 1.021$, 試求 $2^{0.63}$ 與 $2^{-0.37}$ 之值。(四捨五入至三位小數)。

5. 設 a 為一正數且滿足 $a + a^{-1} = 7$, 試求 $a^{\frac{1}{2}} + a^{-\frac{1}{2}}$ 與 $a^{\frac{1}{4}} + a^{-\frac{1}{4}}$ 之值。

6. $a > 0$, 設 $a^{2x} = 5 - 2\sqrt{6}$, 求下列各式的值：

(1) a^{-x} (2) $\frac{a^{3x} + a^{-3x}}{a^x + a^{-x}}$



4. 1.548, 0.774 5. 3 與 $\sqrt{5}$ 6. (1) $\sqrt{3} + \sqrt{2}$ (2) 9

陳立數學~137~絕對智慧
尊重著作權所有・盜翻印法律追究



回家作業



7. 依據實驗，某種細菌原有的數目為 N ，經過 x 天後細菌的數目變成 $N \cdot a^x$ 。

已知 2 天後，5 天後細菌的數目依序為 $3 \cdot 10^6$ ， $(2.4) \cdot 10^7$ ，試求：

(1) 7 天後細菌的數目。

(2) 細菌數目由原有的 N 變成 $(3.84) \cdot 10^8$ ，需要多少天？

8. 設 x, y, z 為實數，且 $2^x = 3^y = 6^z$ ，試求 $yz + zx - xy$ 之值。

9. 設 $abc \neq 0$ ，且 $2^a = 5^b = 10^c$ ，試證： $\frac{1}{a} + \frac{1}{b} = \frac{1}{c}$ 。



7. (1) 9.6×10^7 (2) 9 8. 0 9. 見詳解



回家作業



10. (87 聯考自然組試題)

假設平均每人每日產生的垃圾量，相當於長、寬、高各為 20 公分的正立方體。設我們的人口以二千一百萬計，而暫時把一日的總垃圾全堆積在一操場上，為長 100 公尺寬 20 公尺的長方體垃圾山。若一層樓之高以 3 公尺計，則此垃圾山約有多少層樓高？

- (A) 不到 8 層樓高 (B) 8 層樓至 16 層樓之間
(C) 16 層樓至 24 層樓之間 (D) 24 層樓至 32 層樓之間
(E) 超過 32 層樓高

11. (105 學測試題)

放射性物質的半衰期 T 定義為每經過時間 T ，該物質的質量會衰退成原來的一半。鉛製容器中有兩種放射性物質 A 、 B ，開始紀錄時容器中物質 A 的質量為物質 B 的兩倍，而 120 小時後兩種物質的質量相同。已知物質 A 的半衰期為 7.5 小時，請問物質 B 的半衰期為幾小時？

- (1) 8 小時 (2) 10 小時 (3) 12 小時 (4) 15 小時 (5) 20 小時



10. (D) 11. (1)



回家作業



12. (106 學測試題)

某個手機程式，每次點擊螢幕上的數 a 後，螢幕上的數會變成 a^2 。當一開始時螢幕上的數 b 為正且連續點擊螢幕三次後，螢幕上的數接近 81^3 。試問實數 b 最接近下列哪一個選項？

- (1) 1.7 (2) 3 (3) 5.2 (4) 9 (5) 81



12. (3)

數位 延伸閱讀



1. (能力指標：指數倒數運算)

XBYI



$n \in \mathbb{N}$, $x = \frac{1}{2}(5^{\frac{1}{n}} + 5^{-\frac{1}{n}})$, 試求 $(x + \sqrt{x^2 - 1})^n$ 之值。

解：

$$\text{常識：(1) } (a^x + a^{-x})^2 = (a^x - a^{-x})^2 + 4$$

$$(2) \left(\frac{a^x + a^{-x}}{2}\right)^2 = \left(\frac{a^x - a^{-x}}{2}\right)^2 + 1$$

$$1^\circ x = \frac{5^{\frac{1}{n}} + 5^{-\frac{1}{n}}}{2} \Rightarrow x^2 = \left(\frac{5^{\frac{1}{n}} + 5^{-\frac{1}{n}}}{2}\right)^2 = \left(\frac{5^{\frac{1}{n}} - 5^{-\frac{1}{n}}}{2}\right)^2 + 1$$

$$\therefore x^2 - 1 = \left(\frac{5^{\frac{1}{n}} - 5^{-\frac{1}{n}}}{2}\right)^2$$

$$\begin{aligned} 2^\circ (x + \sqrt{x^2 - 1})^n &= \left[\frac{5^{\frac{1}{n}} + 5^{-\frac{1}{n}}}{2} + \sqrt{\left(\frac{5^{\frac{1}{n}} - 5^{-\frac{1}{n}}}{2}\right)^2}\right]^n \\ &= \left(\frac{5^{\frac{1}{n}} + 5^{-\frac{1}{n}}}{2} + \left|\frac{5^{\frac{1}{n}} - 5^{-\frac{1}{n}}}{2}\right|\right)^n \quad \left(\because \frac{1}{n} > -\frac{1}{n} \therefore 5^{\frac{1}{n}} > 5^{-\frac{1}{n}}\right) \\ &= \left(\frac{5^{\frac{1}{n}} + 5^{-\frac{1}{n}}}{2} + \frac{5^{\frac{1}{n}} - 5^{-\frac{1}{n}}}{2}\right)^n = (5^{\frac{1}{n}})^n = 5 \end{aligned}$$

2. (能力指標：特殊運算)

KFZS



已知 $f(x) = \frac{4^x}{4^x + 2}$, 求 $f\left(\frac{1}{101}\right) + f\left(\frac{2}{101}\right) + \cdots + f\left(\frac{100}{101}\right)$ 之值。

解：

主題 16 指數比較大小

SFPR



【觀念一】若 $a, x, y \in \mathbb{R}$, $a > 1$, $x > y$, 則

【觀念二】若 $a, x, y \in \mathbb{R}$, $0 < a < 1$, $x > y$, 則

《說明》(1) $3^5 > 3^4$

$$(2) \left(\frac{1}{3}\right)^5 < \left(\frac{1}{3}\right)^4$$

【觀念三】一般比較大小的方法：

① _____

② _____

例 1. (能力指標：同底數比較大小)

下列哪一個數值最小？

(A) $(0.9)^{-3.5}$ (B) $(0.9)^{-2.5}$ (C) $(0.9)^{-1.5}$

(D) $(0.9)^{-\sqrt{3}}$ (E) $(0.9)^{-\sqrt{5}}$

解：

YKIP



例 2. (102 學測試題)

YFQB



令 $a = 2.6^{10} - 2.6^9$, $b = 2.6^{11} - 2.6^{10}$, $c = \frac{2.6^{11} - 2.6^9}{2}$ 。請選出

正確的大小關係。

- (1) $a > b > c$ (2) $a > c > b$ (3) $b > a > c$
(4) $b > c > a$ (5) $c > b > a$

解：

例 3. (能力指標：同指數比較大小)

VXUK



比較 $a = \sqrt{3}$, $b = \sqrt[3]{4}$, $c = \sqrt[4]{5}$ 之大小。

解： 本題採用方法為

例 4. (能力指標：指數比較大小)

$x > 0, y > 0, z > 0$ ，若 $2^x = 3^y = 5^z$ ，比較 $2x, 3y, 5z$ 之大小。

解：





回家作業



1. 比較 $a = \left(\frac{1}{3}\right)^{0.4}$, $b = \frac{1}{\sqrt[6]{9}}$, $c = \sqrt[5]{\frac{1}{27}}$, $d = 9^{-\frac{1}{4}}$ 的大小。



2. 比較下列各數的大小： $a = \left(\frac{1}{2}\right)^{\frac{1}{2}}$, $b = \left(\frac{1}{3}\right)^{\frac{1}{3}}$, $c = \left(\frac{1}{5}\right)^{\frac{1}{5}}$



1. $c < d < a < b$ 2. $c > a > b$



回家作業



3. (93 學測試題)

下列選項中的數，何者最大？[其中 $n! = n \times (n-1) \times \cdots \times 2 \times 1$]

- (1) 100^{10} (2) 10^{100} (3) 50^{50} (4) $50!$ (5) $\frac{100!}{50!}$



3. (2)

主題 17 科學記號

YWDP



【觀念一】科學記號

- (1) 將一個數值寫成 $a \times 10^n$ 的型式
- (2) 其中 $1 \leq a < 10$
- (3) n 為整數
- (4) 我們稱 $a \times 10^n$ 是這個數值的科學記號

【觀念二】科學記號的性質

- (1) 設 $x = a \times 10^n$ ， n 為非負整數，則 x 的整數位數 = 位

《說明》 $x = 14732 = 1.4732 \times 10^4 \Rightarrow x$ 整數位數 = $4 + 1$

- (2) 設 $x = a \times 10^{-n}$ ， n 為正整數，則 x 是純小數，小數點往右

第 位開始不為 0

《說明》 $x = 0.0007124 = 7.124 \times 10^{-4} \Rightarrow x$ 為純小數，小數點

往右第 位開始不為 0

【觀念三】科學記號比較大小

- (1) 先比指數 (10^n 或 10^{-n})
- (2) 再比 a ($1 \leq a < 10$)

【觀念四】科學記號運算

- (1) 加減運算：先使 n 相同，再整理 a 成科學記號
- (2) 乘除運算： a 與 10^n 分別計算，再整理成科學記號

例 1. (能力指標：科學記號)

將下列各數化為科學記號

(1) $4936587 =$

(2) $3987.12 =$

(3) $0.003456 =$

(4) $0.0074325 \times 10^{-5} =$

(5) $7.5 \text{ 億} =$

(6) $400 \text{ 億分之一} =$

(7) $\frac{36}{1000} =$

(8) $\frac{1}{25} =$



例 2. (能力指標：科學記號應用)

完成下列各小題

(1) 求 $2^7 \times 3^2 \times 4^3 \times 5^6 \times 125^2$ 為 _____ 位數

解：



(2) 將 0.15981×10^{-10} 乘開，則小數點後第 _____ 位開始不為 0

解：

(3) 將 567×10^{-8} 寫成科學記號則其小數點後第七位數為 _____

解：

例 3. (能力指標：科學記號比較大小)

(1) $a = 330000000$, $b = 2^9 \times 3^2 \times 5^7$, $c = 0.44 \times 10^9$,

大小關係為_____。

解：



(2) $x = 0.000064$, $y = 720 \times 10^{-7}$, $z = \frac{1}{80000}$, 大小關係為_____

解：

例 4. (能力指標：科學記號加減運算)

完成下列各題：

(1) $9.63 \times 10^{-6} + 5.48 \times 10^{-6} =$ _____

解：

(2) $3.1 \times 10^4 + 7.72 \times 10^6 =$ _____

解：

(3) $6.54 \times 10^{-6} - 9.74 \times 10^{-7} =$ _____

解：

(4) $8.5 \times 10^{-9} + 2 \times 10^{-7} =$ _____

解：



例 5. (能力指標：科學記號乘除運算)

完成下列各題：

(1) $4 \times 10^3 \times 8 \times 10^6 =$ _____

解：

(2) $5 \times 10^{12} \times 4 \times 10^{-3} =$ _____

解：

(3) $8 \times 10^{-3} \times 9 \times 10^{-11} =$ _____

解：

(4) $(3 \times 10^8) \div (4 \times 10^{11}) =$ _____

解：



例 6. (能力指標：科學記號應用)

完成下列各題：(以科學記號表示)



- (1) 一個電子所帶的電量約為 1.6×10^{-19} 庫侖，則 7 莫耳電子所帶的電量約為 _____ 庫侖 (1 莫耳 = 6×10^{23} 個)

解：

- (2) 一個電子所帶的電量約為 1.6×10^{-19} 庫侖，則 8 庫侖大約是 _____ 個電子的帶電量

解：

- (3) 已知一個正常人的身上大約有 500 億個細胞，那麼一個體重 55 千克的人，他的每個細胞的平均重量大約是 _____ 克

解：

例 7. (能力指標：科學記號應用)

YNHP



完成下列各題

- (1) 已知 1 奈米為十億分之一米，小宇以 500 萬倍的電子顯微鏡觀察某種癌細胞，並發現這種癌細胞在螢幕上的長度為 7 公分，則此癌細胞實際的大小為 _____ 奈米

解：

- (2) 地球到太陽的平均距離約為 1.5×10^{11} 公尺，稱為 1 天文單位。若地球到甲星球的距離是 30 億公里，則地球距甲星球是 _____ 個天文單位

解：

例 8. (能力指標：位數判斷)

完成下列各題

(1) $(2 \times 10^{13}) \times (3 \times 10^5)^2 =$ _____，為 _____ 位整數數字



解：

(2) $(2.5 \times 10^{-12}) \times (8 \times 10^8) =$ _____，其小數點後第 _____ 位開始出現不為 0 的數

解：

(3) $(8 \times 10^{30}) \div (2 \times 10^3)^2 =$ _____，為 _____ 位數字

解：

(4) $(8 \times 10^{-7})^2 \div (2 \times 10^2)^3 =$ _____，其小數點後第 _____ 位開始出現不為 0 的數

解：

例 9. (能力指標：科學記號)

若 $\frac{3}{10^7} < x^{10} < \frac{4}{10^7}$ ，則把 x^{30} 表示成科學記號 $a \times 10^{-n}$ ，

則 $n = ?$

解：





回家作業



1. 假設電腦一個字需要 2bytes 的記憶空間，而小宇家中上網下載速度是每秒 $1.152 \times 10^5 \text{bytes}$ ，某天他花了 2 分鐘下載完一篇只有文字的文章，請問這篇文章共約多少個字？



(A) 1728000 個 (B) 3456000 個 (C) 6912000 個 (D) 13824000 個

2. 據物理學家表示，如果將人類的歷史畫成 7 公分的話，那麼整個宇宙的歷史至少超過 1 公里。依此判斷人類歷史至少是宇宙的歷史的 $a \times 10^n$ 倍(此為科學記號)，則 $n = ?$

(A) -6 (B) -5 (C) -4 (D) -3

3. 下列哪一個數值與其他三個不相同？

(A) 6.23×10^6 (B) 623×10^3 (C) 0.623×10^7 (D) 62.3×10^5



1. (C) 2. (B) 3. (B)



回家作業



4. 兩個黑洞若相距甚「近」，會互相吸引成為一個大黑洞，有兩個相距 3000 光年的黑洞，則因相距甚「遠」，會互相環繞對方旋轉而成為所謂的「兩個跳舞的黑洞」；若將 3000 光年以科學記號表示成 $a \times b^n$ 公尺 ($1 \text{ 光年} = 9.46 \times 10^{15} \text{ 公尺}$)，則下列哪個敘述有誤？
- (A) $a = 2.838$ (B) $b = 10$ (C) $n = 18$ (D) 展開後有 16 個 0
5. 5.32×10^{-8} 中，小數點後第九位的數字為何？
- (A) 5 (B) 3 (C) 2 (D) 0
6. 若 $a = 5.72 \times 10^n$ ，其中 n 為整數，且 $0.0001 > a > 0.00001$ ，則 $n = ?$
- (A) 4 (B) -4 (C) 5 (D) -5



4. (C) 5. (B) 6. (D)



回家作業



7. 若 $3.8 \times 10^8 + 4 \times 10^8 - 8 \times 10^{18} \div (4 \times 10^{10}) - 8 \times 10^7 = a \times 10^n$ ，則 $a+n=?$

- (A) 11 (B) 12 (C) 13 (D) 14

8. 若 $10^{-7} < a < 10^{-6}$ ，且 a 可以科學記號表示為 $b \times 10^n$ ，則下列何者正確？

- (A) b 為 a 的 10^6 倍 (B) b 為 a 的 10^7 倍
(C) a 為 b 的 10^6 倍 (D) a 為 b 的 10^7 倍

9. 某生用 500 倍顯微鏡觀察細胞，測得在鏡中細胞的長度為 0.6 毫米，
則細胞的真實大小為 _____ 公分



7. (C) 8. (B) 9. 1.2×10^{-4}

主題 18 有效數字



【觀念一】有效數字

- (1) 定義：從左邊數起，第一個不為 0 的數字
到末位數字是此數的有效數字

《說明》近似數 0.003970 $\Rightarrow$ 有效數字有 _____

- (2) 有效數字愈多位，近似值更精確

《說明》圓周率 $\pi \doteq 3.141 \Rightarrow$ 有效數字 4 位

圓周率 $\pi \doteq 3.14159 \Rightarrow$ 有效數字 6 位

- (3) 有效數字求近似值 $\Rightarrow$ 以最後一位有效數字取值

《說明》保留三個有效數字得 18.1 的近似數

$$\Rightarrow \text{準確數取值範圍：} 18.1 - \frac{0.1}{2} \leq \text{準確數} < 18.1 + \frac{0.1}{2}$$

$$\Rightarrow 18.05 \leq \text{準確數} < 18.15$$

- (4) 科學記號近似值的有效數字計算

《說明 1》 $2.731 \times 10^9 \Rightarrow$ 有效數字為 2,7,3,1

《說明 2》6.57 萬 $= 6.57 \times 10^4 \Rightarrow$ 有效數字為 6,5,7

- (5) 由有效數字推導精確數字的位名

《說明 1》0.0721053 $\xrightarrow[\text{有效數字}]{\text{保留四個}}$ 近似數 0.07211 $\rightarrow$ 精確到十萬分位

《說明 2》2.054370 $\xrightarrow[\text{有效數字}]{\text{保留四個}}$ 近似值 2.054 $\rightarrow$ 精確到千分位

例 1. (能力指標：近似值精確位數與有效數字)

CVVY



完成下列各小題：

- (1) 近似值 1.5 萬精確到 _____ 位，有 _____ 個有效數字，
有效數字為 _____
- (2) 近似值 3.140×10^{-4} 精確到 _____ 位，有 _____ 個有效數字，有效數字
為 _____
- (3) 近似值 0.78 精確到 _____ 位，有 _____ 個有效數字，有效數字
為 _____

解：

例 2. (能力指標：科學記號與有效數字)

ADKJ



某城市有 200 萬個家庭，平均每個家庭每天丟棄一個塑膠袋。
每 1000 個塑膠袋污染 1 平方公尺土地，那麼這城市一年污染
多少土地？(保留二個有效數字)

解：



回家作業



1. 2008 年中國月球探測工程的“嫦娥一號”衛星將發射升空飛向月球，已知地球距離月球表面約為 384000 公里，那麼這個距離用科學記號 (保留 2 個有效數字) 表示應為多少公里？



(A) 3.84×10^4 (B) 3.8×10^5 (C) 3.8×10^6 (D) 38.4×10^4

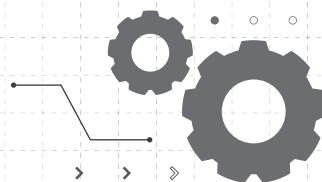
2. (1) 將 3.062 保留一位小數得_____
- (2) 將 7.448 保留整數得_____
- (3) 將 15.267 保留兩位小數得_____。

3. 下列由四捨五入法得到的近似數，各精確到哪一位？各有哪幾個有效數字？
- (1) 132.4 (2) 0.0572 (3) 2.40 萬

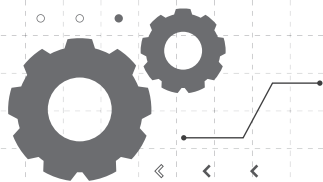
簡 答

1. (B) 2. (1) 3.1 (2) 7 (3) 15.27 3. (1) 十分位，有效數字 1, 3, 2, 4
(2) 萬分位，有效數字 5, 7, 2 (3) 百位，有效數字 2, 4, 0

心得欄



心得欄





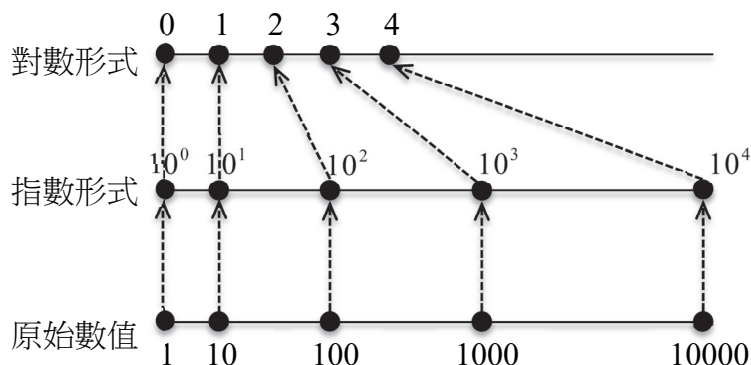
常用對數

主題 19 常用對數



【觀念一】數量級 (Power)

- (1) $10^n \Rightarrow$ *ten to the power of n* ，此處的 n ，可以視為一個數所在的量級。
- (2) 任何數可以用科學記號表示，可以看出數所在的量級。
- (3) 人類對宇宙的數字產生三種形式：原始數值、指數形式與對數形式，我們用以下的圖，來說明：



- (4) 由上圖看出：

$$\log_{10} 1 = \log 1 = 0 \Rightarrow 10^0 = 10^{\log 1} = 1$$

$$\log_{10} 10 = \log 10 = 1 \Rightarrow 10^1 = 10^{\log 10} = 10$$

$$\log_{10} 100 = \log 100 = 2 \Rightarrow 10^2 = 10^{\log 100} = 100$$

$$\log_{10} 1000 = \log 1000 = 3 \Rightarrow 10^3 = 10^{\log 1000} = 1000$$

$$\log_{10} 10000 = \log 10000 = 4 \Rightarrow 10^4 = 10^{\log 10000} = 10000$$

- (5) 原始數值與對數值的關係

$$\textcircled{1} \log(\text{原始數值}) = \text{對數值(數量級 power)}$$

$$\textcircled{2} \text{原始數值} = 10^{\text{對數值}} = 10^{\log(\text{原始數值})} = 10^{\text{數量級}} = 10^{\text{power}}$$

【觀念二】對數定義

- (1) $10^{\log a} = a \Rightarrow 10^x = a \Rightarrow x = \log a$ (稱 a 的常用對數) ,
此為指數型式變成對數型式。

[立即練習]

$$10^x = 2 \Rightarrow x =$$

$$10^y = 3 \Rightarrow y =$$

$$10^m = 7 \Rightarrow m =$$

- (2) $\log a = x \Rightarrow \log_{10} a = x \Rightarrow 10^x = a$, 此為對數型式變成指數型式。

[立即練習]

$$\log a = 2 \Rightarrow a =$$

$$\log 1 =$$

$$\log b = 4 \Rightarrow b =$$

$$\log 100 =$$

$$\log t = -1 \Rightarrow t =$$

$$\log 0.1 =$$

$$\log s = -3 \Rightarrow s =$$

$$\log \frac{1}{1000} =$$

【觀念三】對數值估算

- (1) 已知 $10^x = 2$, 如何估計 x 的值 ?
(2) 我們可以採用指數十分逼近夾擊來估算 , 方法如下 :

步驟一 $10^0 = 1, 10^1 = 10 \Rightarrow 0 < x < 1$



步驟二 $10^{0.3} = 1.995, 10^{0.4} = 2.512 \Rightarrow 0.3 < x < 0.4$



步驟三 $10^{0.30} = 1.995, 10^{0.31} = 2.042 \Rightarrow 0.30 < x < 0.31$



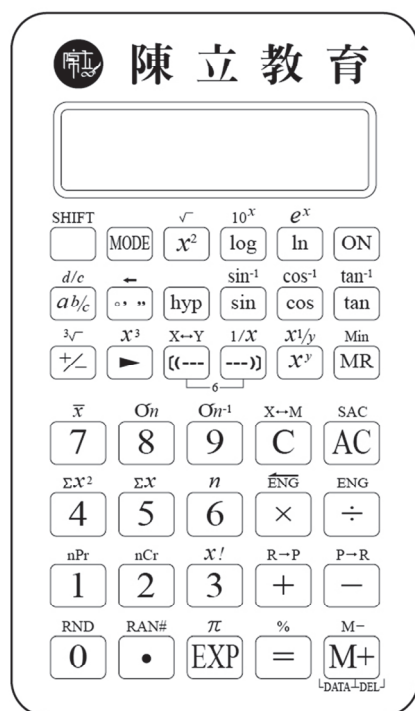
步驟四 $10^{0.301} = 1.999, 10^{0.302} = 2.0045 \Rightarrow 0.301 < x < 0.302$



步驟五 $10^{0.3010} = 1.9999, 10^{0.3011} = 2.003 \Rightarrow 0.3010 < x < 0.3011$

(3) 按此步驟往下進行， x 的左右近似值。越來越接近，最後會得到一個 x 值，此 x 值即為 $x = \log 2$ 。

(4) 計算機



(5) 計算機常用對數求值

$$\log 3: \boxed{3} \Rightarrow \boxed{\log} \Rightarrow \boxed{=}$$

$$\log 4.8: \boxed{4.8} \Rightarrow \boxed{\log} \Rightarrow \boxed{=}$$

$$\log x: \boxed{x} \Rightarrow \boxed{\log} \Rightarrow \boxed{=}$$

【觀念四】常用對數性質

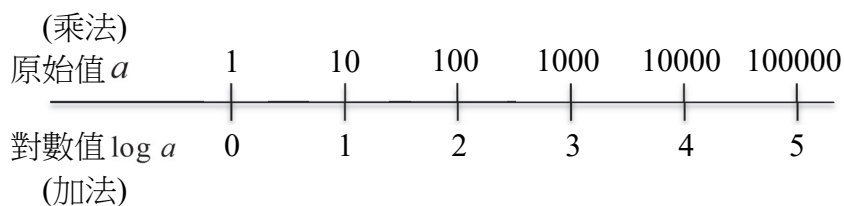
(1) 性質一：常用對數值增加 1 $\Leftrightarrow$ 原始值增為 10 倍。

$$\text{《說明》} \begin{cases} \log M = a \\ \log N = a + 1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} M = 10^a \\ N = 10^{a+1} \end{cases} \Rightarrow N = 10^a \times 10 = M \times 10 = 10M$$

(2) 性質二：常用對數值減少 1 $\Leftrightarrow$ 原始值減為 $\frac{1}{10}$ 倍。

$$\text{《說明》} \begin{cases} \log T = a \\ \log S = a - 1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} T = 10^a \\ S = 10^{a-1} \end{cases} \Rightarrow S = 10^a \times 10^{-1} = T \times \frac{1}{10} = \frac{1}{10}T$$

(3) 圖示：





回家作業



1. $\log 2 + \log 5 = ?$



2. $\log 5 + \log 8 + \log 25 = ?$

3. $\log a = 1.23, \log b = 3.23, \log c = -2.77$

(1) b 是 a 的幾倍？

(2) c 是 a 的幾倍？



1. 1 2. 3 3. (1) 100 (2) $\frac{1}{10000}$



回家作業



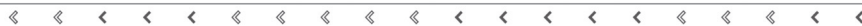
4. 在真實世界中，很多類型的數據通常都遵守「班佛定律：一堆從實際生活得出的數據中首位數字為 a 的比例約為 $\log(1+\frac{1}{a})$ 。」審計部門常會用此定律來檢查帳目是否作假。試問：一堆數據中首位數字為7的比例約為多少百分比？
(可用計算機並四捨五入小數點後第一位) (建國中學學資)

本題無數位影音服務，
請同學詳實練習並善用輔導資源



4. 5.8%

主題 20 指對數綜合題型



例 1. (能力指標：複利)

小沂參加銀行存款，約定以年利率1%的複利，一年為一期計息。

若小沂在今年年初存入 10000 元，則 15 年後可得本利和 _____ 元。

解：



例 2. (能力指標：指數估算)

設 a, b 為實數，若 10^a 是 10^b 的 2018 倍，則 $a - b$ 最接近哪一個整數？

- (1) 0 (2) 1 (3) 2 (4) 3 (5) 4

解：



例 3. (能力指標：指數應用)

SBYN



所謂「1.01 的勤勉法則」是指如果你每天都比前一天進步 0.01，一年以後你將具備有現在的 37.8 倍的能力，此結果是由 1.01^{365} 約等於 37.8 而得到。如果情況相反，你每天都比前一天退步 0.01，請估算你 365 天之後，大約還有現在的多少倍能力，請選出最接近的選項。

- (1) 0.3 (2) 0.2 (3) 0.05 (4) 0.02 (5) 0.001

解：

例 4. (能力指標：指數應用)

BCBV



某一類的傳染病接觸，感染後人便會產生抗體而終身免疫，此類的傳染病的感染率 $I(t)$ 定義為

$$I(t) = \frac{\text{在時間 } t \text{ 時被感染過的人數}}{\text{這城市的總人數}},$$

而且當 $I(t) = \frac{1}{2}$ 的時間 t 是該傳染病的傳播高峰。根據衛生組織的調查研究

建立了一個關於 $I(t)$ 的數學模型： $I(t) = \frac{1}{1 + a \cdot 7^{-bt}}$ 。某種此類的傳染病在

某個城市蔓延，剛開始(即 $t = 0$ 時)，約有 2% 的人口被感染，當 $t = 3$ 週，約有 12.5% 的人口被感染，試回答下列問題：

- (1) 求出 $(a, b) = \underline{\hspace{2cm}}$ 。
- (2) 請問 9 週之後，該城市約有多少比例的人口被感染此傳染病？

解：

例 5. (能力指標：指對數運算)



一個特製的計算機有一個常用對數鍵 $\boxed{\log x}$ 與指數鍵 $\boxed{100^x}$ ，若輸入一個數字後再按 $\boxed{\log x}$ ，計算機螢幕會輸出該數字的對數值，例如：輸入數字 10 後再按 $\boxed{\log x}$ 會得到 1。若輸入一個數字後再按 $\boxed{100^x}$ ，計算機螢幕會輸出該數字的指數值，例如：輸入數字 1 後再按 $\boxed{100^x}$ 會得到 100。

根據以上的說明，若輸入數字 2，再交替按對數鍵 $\boxed{\log x}$ 與指數鍵 $\boxed{100^x}$ 各 3 次，即 $2 \rightarrow \boxed{\log x} \rightarrow \boxed{100^x} \rightarrow \boxed{\log x} \rightarrow \boxed{100^x} \rightarrow \boxed{\log x} \rightarrow \boxed{100^x}$ ，則該特製計算機螢幕輸出的數字最接近下列何者？

- (1) 100 (2) $\sqrt{100}$ (3) 10000 (4) 16 (5) 256

解：

例 6. (能力指標：計算機)



小明利用智慧型手機上的計算機功能操作指數與對數的運算，

當他依序鍵入 3 , x^y , 5 , $=$ 時，結果依序顯示 3 , $3^{\wedge}$, $3^{\wedge}5$, $[243]$ ，表示 $3^5 = 243$ ；當他依序鍵入 $\log$, 3 , $)$, $=$ 時，結果依序顯示 $\log($, $\log(3)$, $\log(3)$, $[0.4771212547197]$ ，表示 $\log 3 \approx 0.4771212547197$ 。

如果小明依序鍵入 8 , x^y , $($, $\log$, 5 , $)$, $\div$, $\log$, 2 , $)$, $)$, $=$ ，那麼最後的結果會顯示_____。

解：

例 7. (能力指標：對數應用)

天空中星星亮度的「視星等」與對數函數有關。天文學家以織女星的亮度為標準，令織女星的亮度為 I_0 ，被觀察的星星的亮度為 I ，



將其星等定義為 $m = -\frac{5}{2} \log \left(\frac{I}{I_0} \right)$ 。在星空中，人類肉眼可見最暗的

星星為 6 等星，而天蠍座的心宿二為 1 等星，求：

- (1) 心宿二的亮度是 6 等星之亮度的多少倍？ _____
- (2) 另一顆恆星 M 的亮度為心宿二的 1000 倍，求恆星 M 的星等？ _____

解：

例 8. (能力指標：對數應用)

健康好喝的蜂蜜檸檬水，網路上盛行的完美比例是：20 ml (毫升) 的蜂蜜，10 ml (毫升) 的檸檬，400 ml (毫升) 的水。



在化學上我們用水溶液氫離子的濃度 $[H^+]$ (莫耳/升) 來定義該水溶液的酸鹼值(pH 值)，其關係為 $pH = -\log[H^+]$ 。

已知蜂蜜的 pH 值約為 4，檸檬的 pH 值約為 2.5，水的 pH 值約為 7，則下列哪些選項正確？

- (1) 甲溶液 pH 值為 4，乙溶液 pH 值為 5，則甲的氫離子濃度是乙的 10 倍
- (2) pH 值 4 的氫離子濃度小於 pH 值 5 的氫離子濃度
- (3) 100 ml 的蜂蜜加上 100 ml 的水，合成的蜂蜜水 pH 值為 5.5
- (4) 100 ml 的蜂蜜加上 400 ml 的水，合成的蜂蜜水 pH 值小於 5
- (5) 網路上的完美比例蜂蜜檸檬水，其 pH 值小於 4

解：

例 9. (成功高中學資)

我們常用 pH 值來表達溶液的酸鹼程度。若以 $[H^+]$ 表示溶液中的氫離子濃度，則 pH 值 $= -\log[H^+]$ 。例如純水在 $25^\circ C$ 時的 $[H^+] = 10^{-7}$ 莫耳/升，因此純水的 pH 值為 $-\log 10^{-7} = 7$ 。今有一杯 pH 值 $= 2.8$ 的檸檬汁、一杯 pH 值 $= 3.8$ 的橘子汁與一杯 pH 值 $= 6.8$ 的牛奶，請問：

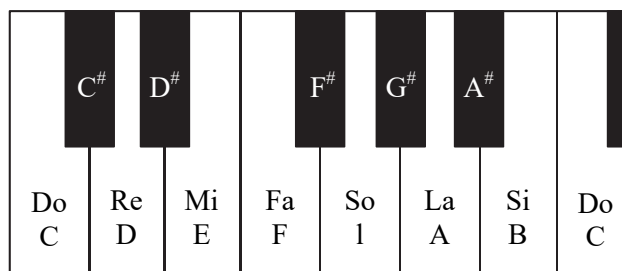
- (1) 檸檬汁的氫離子濃度是橘子汁氫離子濃度的幾倍？
- (2) 牛奶的氫離子濃度是橘子汁氫離子濃度的幾倍？

解：

例 10. (北一女中學資)

- (1) 「十二平均律」是鋼琴音階的依循規則：每一個音的弦長都是前一個音弦長的 $\frac{1}{\sqrt[12]{2}}$ 倍(例如： C 與 $C^\sharp$ ， E 與 F)。設第一個音的弦長為 1，則第 n 個音的弦長為 $\frac{1}{2}$ 時，則 n 的值為何？
- (2) 已知鋼琴音階的頻率與音的弦長成反比，若將鋼琴鍵盤所表現的音階一個「八度」平均分成十二等份，每等分稱為半音，音高八度音指的是頻率乘上二倍，八度音的頻率分為十二等分，即是分為十二項的等比數列。如下圖，已知(最左側的 C)中央 Do 上的 $La(A)$ 發出的頻率為 $440Hz$ ，通常被當作標準音高，則中央 Do 發出的頻率為多少 Hz ？(可用計算機，並四捨五入至整數)

解：



指數與對數綜合題型解析

1.【答】：11609 (元)

$$\begin{aligned}\text{【解】：}1^\circ \text{ 本利和} &= 10000\left(1 + \frac{1}{100}\right)\left(1 + \frac{1}{100}\right) \cdots \left(1 + \frac{1}{100}\right) \\ &= 10000\left(1 + \frac{1}{100}\right)^{15} = 10000(1.01)^{15} \\ &\approx 10000 \times 1.1609 = 11609 \text{ (元)}\end{aligned}$$

2.【答】：(4)

$$\begin{aligned}\text{【解】：}1^\circ 10^a &= 10^b \times 2018 \Rightarrow 10^{a-b} = 2018 \\ &\Rightarrow a - b = \log 2018 \approx 3.3049 \\ &\text{最接近整數 } 3 \\ &\therefore \text{故選 (4)}\end{aligned}$$

3.【答】：(4)

$$\begin{aligned}\text{【解】：}1^\circ \text{ 退步 } 0.01 &\Rightarrow \text{每一天變成 } 0.99 \\ &\therefore (0.99)^{365} = 0.0255 \cdots \\ &\approx 0.02 \\ &\text{故選 (4)}\end{aligned}$$

4.【答】：(1) $(49, \frac{1}{3})$ (2) 87.5%

$$\begin{aligned}\text{【解】：(1) } 1^\circ t = 0 &\Rightarrow I(0) = \frac{1}{1 + a \times 7^0} = \frac{2}{100} \Rightarrow \frac{1}{1 + a} = \frac{1}{50} \\ &\Rightarrow 1 + a = 50 \Rightarrow a = 49 \\ 2^\circ t = 3 &\Rightarrow I(3) = \frac{1}{1 + 49 \times 7^{-3b}} = \frac{12.5}{100} \Rightarrow \frac{1}{1 + 7^{2-3b}} = \frac{1}{8} \\ &\Rightarrow 1 + 7^{2-3b} = 8 \Rightarrow 7^{2-3b} = 7 \Rightarrow 2 - 3b = 1 \Rightarrow b = \frac{1}{3} \\ (2) t = 9 &\Rightarrow I(9) = \frac{1}{1 + 49 \times 7^{\frac{1}{3} \times 9}} = \frac{1}{1 + 7^{-1}} \\ &= \frac{7}{7 + 1} = \frac{7}{8} \times 100\% = 87.5\%\end{aligned}$$

5.【答】：(5)

【解】： $2 \rightarrow 100^{\log 2} \rightarrow \log 4 \rightarrow 100^{\log 4} \rightarrow \log 16 \rightarrow 100^{\log 16}$

$$\begin{array}{ccc} \parallel & \parallel & \parallel \\ (10^{\log 2})^2 & (10^{\log 4})^2 & (10^{\log 16})^2 \\ \parallel & \parallel & \parallel \\ 2^2 = 4 & 4^2 = 16 & 16^2 = 256 \end{array}$$

故選 (5)

6.【答】：125

【解】： 1° 原數 $= 8^{\log 5 + \log 2} = 8^{\frac{\log 5}{\log 2}}$

$$2^\circ \text{ 令 } \begin{cases} \log 5 = m \\ \log 2 = n \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 10^m = 5 \\ 10^n = 2 \rightarrow (10^n)^{\frac{1}{n}} = 2^{\frac{1}{n}} = 10 \end{cases}$$

$$\text{原數} = 8^{\frac{\log 5}{\log 2}} = 8^{\frac{m}{n}} = (2^{\frac{m}{n}})^3 = [(2^{\frac{1}{n}})^m]^3 = (10^m)^3 = 5^3 = 125$$

7.【答】：(1) 100 (2) $-\frac{13}{2}$

$$\begin{aligned} \text{【解】：(1)} \quad \begin{cases} 6 = -\frac{5}{2} \log\left(\frac{I_1}{I_0}\right) \\ 1 = -\frac{5}{2} \log\left(\frac{I_2}{I_0}\right) \end{cases} &\Rightarrow \begin{cases} \frac{I_1}{I_0} = 10^{-\frac{12}{5}} \\ \frac{I_2}{I_0} = 10^{-\frac{2}{5}} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} I_1 = I_0 \times 10^{-\frac{12}{5}} \\ I_2 = I_0 \times 10^{-\frac{2}{5}} \end{cases} \\ &\Rightarrow \frac{I_2}{I_1} = 10^{-\frac{2}{5} + \frac{12}{5}} = 100 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{(2)} \quad \begin{cases} 1 = -\frac{5}{2} \log\left(\frac{I_2}{I_0}\right) \\ k = -\frac{5}{2} \log\left(\frac{I_M}{I_0}\right) \end{cases} &\Rightarrow \begin{cases} I_2 = I_0 \times 10^{-\frac{2}{5}} \\ I_M = I_0 \times 10^{-\frac{2k}{5}} \end{cases} \\ \Rightarrow \frac{I_M}{I_2} = 10^{-\frac{2k}{5} + \frac{2}{5}} = 1000 = 10^3 &\Rightarrow -\frac{2k}{5} + \frac{2}{5} = 3 \\ \Rightarrow \frac{2k}{5} = -\frac{13}{5} &\Rightarrow k = -\frac{13}{2} \end{aligned}$$

8.【答】：(1)(4)

【解】：(1) 正確

$$\begin{cases} 4 = -\log[H_{\text{甲}}^+] \\ 5 = -\log[H_{\text{乙}}^+] \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} H_{\text{甲}}^+ = 10^{-4} \\ H_{\text{乙}}^+ = 10^{-5} \end{cases} \Rightarrow \frac{H_{\text{甲}}^+}{H_{\text{乙}}^+} = \frac{10^{-4}}{10^{-5}} = 10$$

(2) 錯誤

$$\begin{aligned} H_{\text{甲}}^+ &= 10^{-4} \\ H_{\text{乙}}^+ &= 10^{-5} \Rightarrow 10^{-4} > 10^{-5} \end{aligned}$$

(3) 錯誤

$$\begin{array}{|c|} \hline 10^{-4} \\ \hline \end{array} + \begin{array}{|c|} \hline 10^{-7} \\ \hline \end{array} = \begin{array}{|c|} \hline x \\ \hline \end{array}$$
$$100 + 100 = 200$$

蜂蜜 水

$$\Rightarrow 100 \times 10^{-4} + 100 \times 10^{-7} = 200x$$

$$\Rightarrow x = \frac{100(10^{-4} + 10^{-7})}{200} > \sqrt{10^{-4} \times 10^{-7}} = 10^{-5.5}$$

$$\text{又 } 10^{-4} \neq 10^{-7} \Rightarrow pH < 5.5$$

(4) 正確

$$\begin{array}{|c|} \hline 10^{-4} \\ \hline \end{array} + \begin{array}{|c|} \hline 10^{-7} \\ \hline \end{array} = \begin{array}{|c|} \hline y \\ \hline \end{array}$$
$$100 + 400 = 500$$

$$\Rightarrow 100 \times 10^{-4} + 400 \times 10^{-7} = 500y$$

$$\Rightarrow y = \frac{100 \times 10^{-4} + 400 \times 10^{-7}}{500} = \frac{10^{-4} + 4 \times 10^{-7}}{5} = 0.00002008$$

$$\approx 2.008 \times 10^{-5} > 10^{-5} \Rightarrow pH < 5$$

(5) 錯誤

$$\begin{array}{|c|} \hline 10^{-4} \\ \hline \end{array} + \begin{array}{|c|} \hline 10^{-2.5} \\ \hline \end{array} + \begin{array}{|c|} \hline 10^{-7} \\ \hline \end{array} = \begin{array}{|c|} \hline z \\ \hline \end{array}$$
$$20 + 10 + 400 = 430$$

$$\Rightarrow 20 \times 10^{-4} + 10 \times 10^{-2.5} + 400 \times 10^{-7} = 430z$$

$$\Rightarrow z = \frac{2 \times 10^{-3} + 10^{-1.5} + 4 \times 10^{-5}}{430}$$

$$= \frac{2 \times 10^{-3} + \sqrt{10} \times 10^{-2} + 4 \times 10^{-5}}{430} < \frac{2 \times 10^{-3} + 4 \times 10^{-2} + 4 \times 10^{-5}}{430}$$

$$= \frac{0.04204}{430} < \frac{0.043}{430} = 10^{-4}$$

$$\therefore z < 10^{-4} \Rightarrow pH > 4$$

主題 5 特殊方根的處理



1. 分母有理化

(1) 二次根式有理化：

$$\textcircled{1} \sqrt{\frac{b}{a}} = \sqrt{\frac{b}{a} \times \frac{a}{a}} = \frac{\sqrt{ab}}{a} \quad (a > 0, b > 0)$$

$$\textcircled{2} \frac{1}{\sqrt{a} + \sqrt{b}} = \frac{1}{\sqrt{a} + \sqrt{b}} \times \frac{\sqrt{a} - \sqrt{b}}{\sqrt{a} - \sqrt{b}} = \frac{\sqrt{a} - \sqrt{b}}{a - b} \quad (a > 0, b > 0, a \neq b)$$

$$\textcircled{3} \frac{1}{\sqrt{a} - \sqrt{b}} = \frac{1}{\sqrt{a} - \sqrt{b}} \times \frac{\sqrt{a} + \sqrt{b}}{\sqrt{a} + \sqrt{b}} = \frac{\sqrt{a} + \sqrt{b}}{a - b} \quad (a > 0, b > 0, a \neq b)$$



(2) 三次根式有理化：[自行參考]

$$\textcircled{1} \sqrt[3]{\frac{b}{a}} = \sqrt[3]{\frac{b}{a} \times \frac{a^2}{a^2}} = \frac{\sqrt[3]{a^2b}}{a} \quad (a > 0, b > 0)$$

$$\textcircled{2} \frac{1}{\sqrt[3]{a} + \sqrt[3]{b}} = \frac{1}{\sqrt[3]{a} + \sqrt[3]{b}} \times \frac{\sqrt[3]{a^2} - \sqrt[3]{ab} + \sqrt[3]{b^2}}{\sqrt[3]{a^2} - \sqrt[3]{ab} + \sqrt[3]{b^2}} = \frac{\sqrt[3]{a^2} - \sqrt[3]{ab} + \sqrt[3]{b^2}}{a + b} \quad (a > 0, b > 0)$$

$$\textcircled{3} \frac{1}{\sqrt[3]{a} - \sqrt[3]{b}} = \frac{1}{\sqrt[3]{a} - \sqrt[3]{b}} \times \frac{\sqrt[3]{a^2} + \sqrt[3]{ab} + \sqrt[3]{b^2}}{\sqrt[3]{a^2} + \sqrt[3]{ab} + \sqrt[3]{b^2}} = \frac{\sqrt[3]{a^2} + \sqrt[3]{ab} + \sqrt[3]{b^2}}{a - b} \quad (a > 0, b > 0, a \neq b)$$

【說例】

三次根式和與三次根式差的分母有理化可由以下公式達成。

$$(x + y)(x^2 - xy + y^2) = x^3 + y^3, \quad (x - y)(x^2 + xy + y^2) = x^3 - y^3$$

舉例來說：

$$(\sqrt[3]{3} - \sqrt[3]{2})(\quad) =$$

(3) 有理化技巧-交叉相乘：

對分母有理化之前，可先觀察是否易與有理化的結果採取交叉相乘，舉例來說：

由於 $(\sqrt{k+1}-\sqrt{k})(\sqrt{k+1}+\sqrt{k})=1$ ，故 $\frac{1}{\sqrt{k+1}-\sqrt{k}} = \sqrt{k+1}+\sqrt{k}$ ；

由於 $(\sqrt{k+2}+\sqrt{k})(\sqrt{k+2}-\sqrt{k})=2\times 1$ ，故 $\frac{1}{\sqrt{k+2}+\sqrt{k}} = \frac{\sqrt{k+2}-\sqrt{k}}{2}$ 。

【說例】

① $\frac{1}{\sqrt{6}+\sqrt{5}} =$

② $\frac{1}{\sqrt{13}-\sqrt{11}} =$

③ $\frac{1}{\sqrt{17}+\sqrt{15}} =$

3. 子母雙重根式

(1) 子母雙重根式：

① 平方和型： $\sqrt{a+b+2\sqrt{ab}} =$ _____ ($a > 0, b > 0$)

② 平方差型： $\sqrt{a+b-2\sqrt{ab}} =$ _____ ($a > 0, b > 0$)

【說明】

$$\sqrt{a+b+2\sqrt{ab}} = \sqrt{(\sqrt{a})^2 + (\sqrt{b})^2 + 2\sqrt{a}\sqrt{b}} = \sqrt{(\sqrt{a}+\sqrt{b})^2} = \sqrt{a}+\sqrt{b}$$

$$\sqrt{a+b-2\sqrt{ab}} = \sqrt{(\sqrt{a})^2 + (\sqrt{b})^2 - 2\sqrt{a}\sqrt{b}} = \sqrt{(\sqrt{a}-\sqrt{b})^2} = |\sqrt{a}-\sqrt{b}|$$

【說例】

① $\sqrt{5+2\sqrt{6}} =$

② $\sqrt{17-12\sqrt{2}} =$

$$\textcircled{3} \sqrt{14+3\sqrt{20}} =$$

$$\textcircled{4} \sqrt{2+\sqrt{3}} =$$

(2) 共軛子母雙根號：

遇到 $\sqrt{a+\sqrt{b}} \pm \sqrt{a-\sqrt{b}}$ 型題目(其中 $a > b > 0$)，通常會以平方處理之。因為平方會造成 $(a+\sqrt{b})+(a-\sqrt{b})$ 及 $\sqrt{a+\sqrt{b}}\sqrt{a-\sqrt{b}} = \sqrt{a^2-b}$ 較好處理的結構。

【說例】

以下我們來說明 $\sqrt{2+\sqrt{3}} - \sqrt{2-\sqrt{3}}$ 是如何化簡成 $\sqrt{2}$ 的。

⇒ 以下還有幾組數據提供給同學練習：

$$\sqrt{3+\sqrt{5}} - \sqrt{3-\sqrt{5}} = \sqrt{2}, \quad \sqrt{4+\sqrt{15}} - \sqrt{4-\sqrt{15}} = \sqrt{6}, \quad \sqrt{14+6\sqrt{5}} + \sqrt{14-6\sqrt{5}} = 6$$

型一 分母有理化

例 1

試將下列各式之分母有理化：

(1) $\sqrt[3]{\frac{2}{3}}$ (2) $\frac{1}{2-\sqrt[3]{3}}$

解

ZMBY



例 2

試將 $\frac{1}{1+\sqrt{2}+\sqrt{3}}$ 之分母有理化。

解

$$\frac{1}{1+\sqrt{2}+\sqrt{3}}$$

例 3

化簡 $\frac{\sqrt{35} + \sqrt{21} + 5 + \sqrt{15}}{\sqrt{7} + 2\sqrt{5} + \sqrt{3}}$ 。

解

$$\frac{\sqrt{35} + \sqrt{21} + 5 + \sqrt{15}}{\sqrt{7} + 2\sqrt{5} + \sqrt{3}}$$

NSRM



型二 根式基本運算

例 4

化簡 $S = \frac{1}{\sqrt{2}+1} + \frac{1}{\sqrt{3}+\sqrt{2}} + \cdots + \frac{1}{\sqrt{100}+\sqrt{99}}$ 之值。

解 $S = \frac{1}{\sqrt{2}+1} + \frac{1}{\sqrt{3}+\sqrt{2}} + \cdots + \frac{1}{\sqrt{100}+\sqrt{99}}$

IJTH



例 5

已知 $x = \frac{\sqrt{3}-\sqrt{2}}{\sqrt{3}+\sqrt{2}}$, $y = \frac{\sqrt{3}+\sqrt{2}}{\sqrt{3}-\sqrt{2}}$, 求 $\sqrt{3x^2-5xy+3y^2}$ 之值。

解

型三 **$\sqrt{n+1} \pm \sqrt{n}$ 運算****例 6**

試比較下列各數的大小：

(1) $a = \sqrt{19} + \sqrt{21}$, $b = \sqrt{18} + \sqrt{22}$, $c = \sqrt{17} + \sqrt{23}$

(2) $x = \sqrt{20} - \sqrt{19}$, $y = \sqrt{19} - \sqrt{18}$, $z = \sqrt{18} - \sqrt{17}$

解

例 7

求滿足 $\sqrt{n} - \sqrt{n-1} < 0.01$ 之最小正整數 n 。

解

型四 多重根式的處理

例 8

各校重要考題

若 $\sqrt{11+6\sqrt{2}}$ 的整數部分為 a ，小數部分為 b ，則 $\frac{1}{b} - \frac{7}{a+b} =$ _____。

解 1° $\sqrt{11+6\sqrt{2}} = \sqrt{11+2\sqrt{18}} = \sqrt{9} + \sqrt{2} = 3 + \sqrt{2}$

整數部分為 $a =$ _____，小數部分為 $b =$ _____

2° $\frac{1}{b} - \frac{7}{a+b} =$ _____

STHW



例 9

有多少正整數 x 使得 $\sqrt{51-\sqrt{x}}$ 為整數？

解

證明 $\sqrt{1+2\sqrt{1+3\sqrt{1+4\sqrt{1+5\sqrt{1+6\sqrt{1+\cdots}}}}}} = 3$ 。

$$\begin{aligned} \text{證 } 1^\circ \quad 3 &= \sqrt{9} = \sqrt{1+8} = \sqrt{1+2 \cdot 4} = \sqrt{1+2\sqrt{16}} = \sqrt{1+2\sqrt{1+15}} = \sqrt{1+2\sqrt{1+3 \cdot 5}} \\ &= \sqrt{1+2\sqrt{1+3\sqrt{25}}} = \sqrt{1+2\sqrt{1+3\sqrt{1+24}}} = \sqrt{1+2\sqrt{1+3\sqrt{1+4 \cdot 6}}} \\ &= \dots \end{aligned}$$

2° 為了說明是 1° 中的式子是可以繼續拆解下去的，我們必須證明：

$$\sqrt{1+n\sqrt{(n+2)^2}} = \sqrt{1+n\sqrt{1+(n+1)\sqrt{(n+3)^2}}}.$$

$$\begin{aligned} \text{左式} &= \sqrt{1+n\sqrt{(n+2)^2}} = \sqrt{1+n\sqrt{n^2+4n+4}} = \sqrt{1+n\sqrt{1+(n^2+4n+3)}} \\ &= \sqrt{1+n\sqrt{1+(n+1)(n+3)}} = \sqrt{1+n\sqrt{1+(n+1)\sqrt{(n+3)^2}}} = \text{右式} \end{aligned}$$

3° 由 1° 2° 可知原式成立

證明實數 $\sqrt[3]{\sqrt{5}+2} - \sqrt[3]{\sqrt{5}-2}$ 為一個有理數。

$$\begin{aligned} \text{解 } 1^\circ \quad \text{令 } x &= \sqrt[3]{\sqrt{5}+2} - \sqrt[3]{\sqrt{5}-2} \\ \Rightarrow x^3 &= (\sqrt[3]{\sqrt{5}+2})^3 - (\sqrt[3]{\sqrt{5}-2})^3 - 3(\sqrt[3]{\sqrt{5}+2})(\sqrt[3]{\sqrt{5}-2})\underbrace{(\sqrt[3]{\sqrt{5}+2} - \sqrt[3]{\sqrt{5}-2})}_{=x} \\ &= 4 - 3(1)x \Rightarrow x^3 + 3x - 4 = 0 \end{aligned}$$

$$2^\circ \quad x^3 + 3x - 4 = 0 \Rightarrow (x-1)(x^2 + x + 4) = 0 \quad [\text{係數總和為 } 0, \text{ 必有因式 } x-1]$$

$$\because x^2 + x + 4 > 0, \forall x \in \mathbb{R} \quad \therefore x^2 + x + 4 = 0 \text{ 無實根}$$

故 $\sqrt[3]{\sqrt{5}+2} - \sqrt[3]{\sqrt{5}-2} = 1$ 為一個有理數

型五 根式估計

例 12

設 $a = \sqrt{6 + \sqrt{35}}$ ，試回答下列問題：

- (1) 若 a 介在連續整數 k 和 $k+1$ 之間，求 k 。
- (2) 若 $a + \frac{1}{a}$ 介在連續整數 n 和 $n+1$ 之間，求 n 。

解

例 13

求滿足 $\frac{n}{2} < \sqrt{9+\sqrt{50}} < \frac{n+1}{2}$ 的整數 n 值。

解

▣ 【台中一中】

化簡 $\sqrt{8+\sqrt{40+8\sqrt{5}}} + \sqrt{8-\sqrt{40+8\sqrt{5}}} = \underline{\hspace{2cm}}$ 。

答： $\sqrt{10} + \sqrt{2}$

▣ 【挑戰題】

已知方程式 $x + \sqrt{x + \frac{1}{2}} + \sqrt{x + \frac{1}{4}} = 1024$ ，求實數 x 之值。

答：992

主題 15 指數與對數的排序

SFPR



1. 指數函數圖形

函數	$f(x) = a^x, a > 1$	$f(x) = a^x, 0 < a < 1$
圖形說例		
函數增減	遞增： $m > n \Leftrightarrow f(m) > f(n)$	遞減： $m > n \Leftrightarrow f(m) < f(n)$
增減速度	遞增速度 (由左至右) 越來越快	遞減速度 (由左至右) 越來越慢

2. 同底指數式之大小關係

(1) 底數大於 1：

若 $a > 1$ 且 x, y 皆為實數，則「 $x > y \Leftrightarrow a^x > a^y$ 」。

(2) 底數小於 1：

若 $0 < a < 1$ 且 x, y 皆為實數，則「 $x > y \Leftrightarrow a^x < a^y$ 」。

(3) 指數式排序處理方法：

類 型	說 例	處理方法
化同底數	$a = 2^{-3}, b = (\frac{1}{16})^2, c = 32^{-0.6}$	化成同底數 2
化同指數	$a = 8^{11}, b = 3^{22}$	化成同指數 11
化 10 底	$a = 2^{100}, b = 3^{30}$	化成同底數 10
圖形概念	$a = \frac{10^{3.99} + 10^{4.01}}{2}, b = 10^4$	觀察圖形凹凸性

型一**獨立數字比大小****例 1**

下列哪一個數值最小？

(1) $(\frac{1}{4})^{-3.5}$

(2) $(\frac{1}{2})^{-3}$

(3) $\sqrt[3]{128}$

(4) $8^{-\sqrt{3}}$

(5) $16^{\frac{5}{2}}$ 。

解**例 2**

比較 $a = \sqrt{3}$, $b = \sqrt[3]{4}$, $c = \sqrt[4]{5}$ 之大小。

解

VXUK



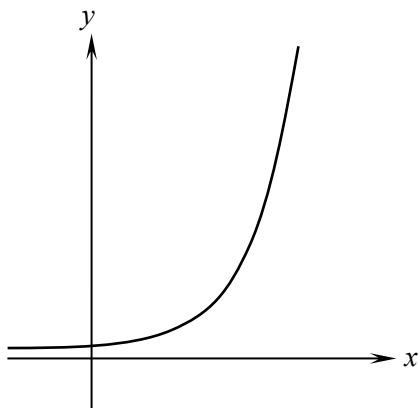
例 3

(1) 試問 $A=10^{3.99}$, $B=10^{4.01}$ 哪一個數字最接近 10000 ?

(2) 比較 $a = \frac{10^{3.99} + 10^{4.01}}{2}$, $b = 10^4$ 的大小

解

(1)



▣ [102 學測]

令 $a = 2.6^{10} - 2.6^9$, $b = 2.6^{11} - 2.6^{10}$, $c = \frac{2.6^{11} - 2.6^9}{2}$ 。請選出正確的大小關係。

(1) $a > b > c$ (2) $a > c > b$ (3) $b > a > c$ (4) $b > c > a$ (5) $c > b > a$ 。

答：(4)

YFQB



例 4

請由以下對照表比較 $|p-q|$ 與 $|q-r|$ 的大小。

原始值 a	1.6	1.7	1.8
對數值 $\log a$	p	q	r

解

NWRF



型二 指數式的極值

例 5

101 指考甲

當 (x, y) 在直線 $2x + y = 3$ 上變動時，關於 $K = 9^x + 3^y$ 的敘述，試問下列哪個選項是正確的？

- (1) K 有最大值 28、最小值 $6\sqrt{3}$
- (2) K 有最大值 28、但沒有最小值
- (3) K 沒有最大值、但有最小值 12
- (4) K 沒有最大值、但有最小值 $6\sqrt{3}$
- (5) K 沒有最大值也沒有最小值。

解

▣ [台中一中]

設 x, y 為實數，且 $2x + 3y = 12$ ，則當 $(x, y) =$ _____ 時， $4^x + 8^y$ 的最小值為 _____。

答：(3, 2), 128

▣ [北一女中]

設 x, y 為實數，且 $x + 3y = 6$ ，則 $10^x + 1000^y$ 的最小值為何？

答：2000

型三 指數不等式

例 6

已知 $\log 2 \approx 0.3010$, $\log 3 \approx 0.4771$, 求滿足 $3^n > 2^{100}$ 的最小正整數 n 。

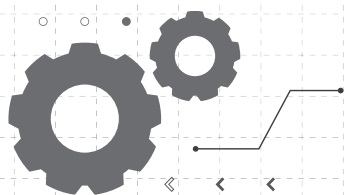
解

例 7

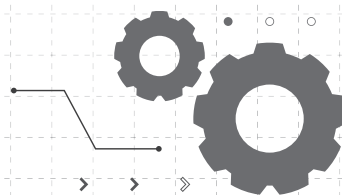
已知 47^{100} 為 168 位數，試求 47^{17} 的位數。

解

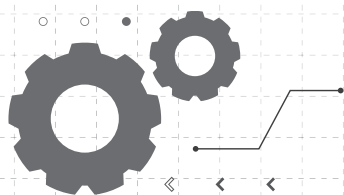
心得欄



心得欄



心得欄



數學常用符號中英對照表

英文	符號	中文	英文	符號	中文
Natural number	N	自然數	Limit	lim	極限
Integer	Z	整數	Infinity	∞	無限大
Rational number	Q	有理數	Function	f	函數
Real number	R	實數	Identical with	$\equiv$	恆等
Complex number	C	複數	Highest common factor	HCF	最高公因式
Greatest common divisor	gcd	最大公因數	Least common multiple	LCM	最低公倍式
Least Common Multiple	lcm	最小公倍數	Natural Logarithm	ln	自然對數
Imaginary unit	i	虛數單位	Angle	$\angle$	角
Pi	π	圓周率	Degree	$^{\circ}$	度數
Radical sign	$\sqrt{\quad}$	根號	Similar to	$\sim$	相似
Line	L	直線	Congruent to	$\cong$	全等
Slope	m	斜率	Polynomial		多項式
Perpendicular	$\perp$	垂直	Synthetic division		綜合除法
Sigma notation	Σ	求和符號	Remainder theorem		餘式定理
And so on	$\cdots$	等等	Factor theorem		因式定理
Absolute value	$ \quad $	絕對值	Exponential function	e^x	指數函數
Logarithm	log	對數	Sine	sin	正弦
Cosine	cos	餘弦	Tangent	tan	正切
Cotangent	cot	餘切	Secant	sec	正割
Cosecant	csc	餘割	Semiperimeter	s	半周長
Period	p	週期	Centre	O	圓心
Incircle's radius	r	內切圓半徑	Circumcircle's radius	R	外切圓半徑
Triangle's area	Δ	三角形面積	Centre of gravity	G	重心
Orthocentre	H	垂心	Circumcentre	O	外心
Incentre	I	內心	Altitude	h	高度
Argument	arg	幅角	Principal value of an argument	Arg	主幅角
Vector	$\rightarrow$	向量	Inner product	$\cdot$	內積
Cross product	$\times$	外積	Plane	E	平面
Circle	C	圓	Sphere	S	球面
Permutation	P	排列	Combination	C	組合

Sample space	U	樣本空間	Empty set	$\emptyset$	空集合
Union	$\cup$	聯集	Intersection	$\cap$	交集
Is contained in	$\subset$	包含於	Belongs to	$\in$	屬於
Probability	P	機率	Expectation	E	期望值
Existence	$\exists$	存在	Factorial	$!$	階乘
Arithmetic mean	$\bar{x}$	算術平均數	Geometric mean	$G.M.$	幾何平均數
Median	M_e	中位數	Mode	M_o	眾數
Range	R	全距	1 st quartile	Q_I	第一四分位數
3 rd quartile	Q_3	第三四分位數	Interquartile range	$Q.D.$	四分位差
Golden ratio	φ	黃金比	Implication	$\Rightarrow$	蘊涵

希臘文字對照表

英文	大寫	英文	小寫	發音	英文	大寫	英文	小寫	發音
A	A	a	α	<i>alpha</i>	N	N	n	ν	<i>nu</i>
B	B	b	β	<i>beta</i>	X	Ξ	x	ξ	<i>xi</i>
G	Γ	g	γ	<i>gamma</i>	O	O	o	$\omicron$	<i>omicron</i>
D	Δ	d	δ	<i>Delta</i>	P	Π	p	π	<i>pi</i>
E	E	e	ϵ	<i>Epsilon</i>	R	P	r	ρ	<i>rho</i>
Z	Z	z	ζ	<i>zeta</i>	S	Σ	s	σ	<i>sigma</i>
H	H	h	η	<i>eta</i>	T	T	t	τ	<i>tau</i>
Q	Θ	q	θ	<i>theta</i>	U	Y	u	υ	<i>upsilon</i>
I	I	i	ι	<i>iota</i>	F	Φ	f	ϕ	<i>phi</i>
K	K	k	κ	<i>kappa</i>	C	X	c	χ	<i>chi</i>
L	Λ	l	λ	<i>lambda</i>	Y	Ψ	y	ψ	<i>psi</i>
M	M	m	μ	<i>mu</i>	W	Ω	w	ω	<i>omega</i>

主題 12 絕對值



1. 絕對值

(1) 代數意義：

$$\text{絕對值函數定義為 } |x| = \begin{cases} x & (x \geq 0) \\ -x & (x < 0) \end{cases}$$

(2) 對應數線上的幾何意義：

- ① $|x|$ 表示：實數線上 x 到原點的距離。
- ② $|x_1 - x_2|$ 表示：實數線上 x_1 到 x_2 的距離。

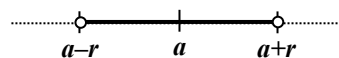
(3) 絕對值基本運算：

- ① 對於任意實數 a, b 來說， $|ab| = |a||b|$ 。
- ② 對於任意實數 a, b 來說， $\left|\frac{a}{b}\right| = \frac{|a|}{|b|}$ ($b \neq 0$)。

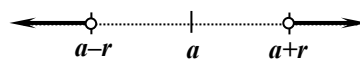
2. 數線不等式

(1) 去絕對值：

$$\text{① } |x - a| < r \ (r > 0) \Rightarrow a - r < x < a + r$$



$$\text{② } |x - a| > r \ (r > 0) \Rightarrow x < a - r \text{ 或 } x > a + r$$



【說例 1】

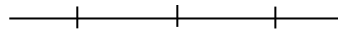
$$|x| < 2 \Rightarrow$$

【說例 2】

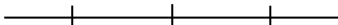
$$|x| \geq 3 \Rightarrow$$

【說例 3】

$$|x-5| \leq 2 \Rightarrow$$

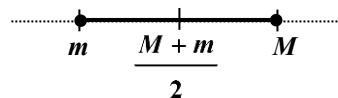
**【說例 4】**

$$|x-1| \geq 3 \Rightarrow$$

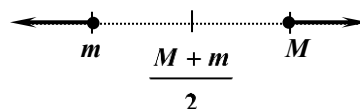


(2) 造絕對值：

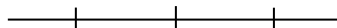
$$\textcircled{1} \quad m \leq x \leq M \Rightarrow \left| \quad \quad \quad \right| \leq$$



$$\textcircled{2} \quad x \leq m \text{ 或 } x \geq M \Rightarrow \left| \quad \quad \quad \right| \geq$$

**【說例】**

$$6 \leq x \leq 10 \Rightarrow$$

**3. 三角不等式**

(1) 實數三角不等式：

對於任意實數 a, b ，下列三角不等式恆成立：

$$\boxed{|a|+|b| \geq |a+b| \geq ||a|-|b||} \quad .$$

【證明】

分別將 $|a|+|b|$, $|a+b|$, $||a|-|b||$ 平方：

$$(|a|+|b|)^2 = a^2 + b^2 + 2|ab| \quad \cdots \cdots \textcircled{1}$$

$$(a+b)^2 = a^2 + b^2 + 2ab \quad \cdots \cdots \textcircled{2}$$

$$||a|-|b||^2 = a^2 + b^2 - 2|ab| \quad \cdots \cdots \textcircled{3}$$

在 $\textcircled{1}\textcircled{2}\textcircled{3}$ 三式中比較 $|ab|$, ab , $-|ab|$

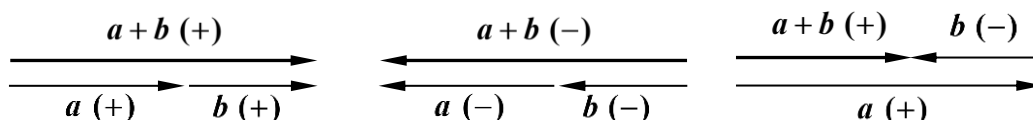
由於 $|ab| \geq ab \geq -|ab|$ ，故 $|a|+|b| \geq |a+b| \geq ||a|-|b||$

(2) 等號成立：

① 當 時， $|a| + |b| = |a+b|$ 。

② 當 時， $|a+b| = ||a| - |b||$ 。

【說明】



4. 絕對值方程式的幾何觀點

(1) 絕對值的幾何意義：

除了利用代數方式解絕對值方程式之外，由於 $|x-\alpha|$ 表示 x 與 α 在一維實數線上之距離，建議先從數線的距離觀點下手，尤其是方程式的絕對值過多時。

(2) 判定未知數的位置：

從距離觀點處理絕對值時，有些數值可以讓我們提前判定未知數的大概區間。

① $|x-1| + |x-5| = 8$



② $|x| + |x-1| + |x-5| = 20$



5. 偏差絕對值函數

(1) 偏差絕對值函數：

$f(x) = |x-\alpha_1| + |x-\alpha_2| + \cdots + |x-\alpha_n|$ ($\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n$ 為實數) 稱為偏差絕對值函數。

(2) 中位數法則：

已知 $f(x) = |x-\alpha_1| + |x-\alpha_2| + \cdots + |x-\alpha_{n-1}| + |x-\alpha_n|$ 且 $\alpha_1 \leq \alpha_2 \leq \cdots \leq \alpha_{n-1} \leq \alpha_n$ ，則 $f(x)$ 在 $x = Me$ 時有最小值，其中 Me 為 $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_{n-1}, \alpha_n$ 之中位數。

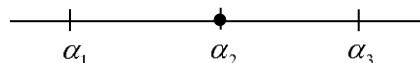
① 奇數個絕對值的中位數法則：

$f(x) = |x - \alpha_1| + |x - \alpha_2| + |x - \alpha_3|$ ($\alpha_1 \leq \alpha_2 \leq \alpha_3$) 在 $x = \alpha_2$ (中位數) 時有 $f(x)$ 的最小值 $f(\alpha_2)$ 。

【說明】

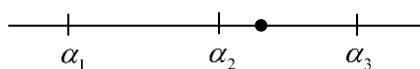
當 $x = \alpha_2$ 時，

$$f(\alpha_2) =$$



當 $x = p \neq \alpha_2$ 時，

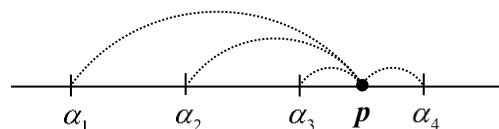
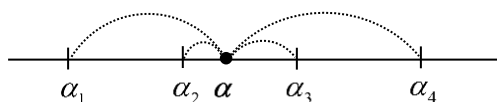
$$f(p) =$$



② 偶數個絕對值的中位數法則：

$f(x) = |x - \alpha_1| + |x - \alpha_2| + |x - \alpha_3| + |x - \alpha_4|$ ($\alpha_1 \leq \alpha_2 \leq \alpha_3 \leq \alpha_4$) 對於區間 $[\alpha_2, \alpha_3]$ 內的任何 α 值，都有 $f(x)$ 的最小值 $f(\alpha)$ 。

【說明】



當 $x = \alpha$ 時 ($\alpha_2 \leq \alpha \leq \alpha_3$)，

$$f(\alpha) = |\alpha - \alpha_1| + |\alpha - \alpha_2| + |\alpha - \alpha_3| + |\alpha - \alpha_4| = |\alpha_4 - \alpha_1| + |\alpha_3 - \alpha_2|$$

當 $x = p$ 時 (p 不在區間 $[\alpha_2, \alpha_3]$ 內)，

$$f(p) = |p - \alpha_1| + |p - \alpha_2| + |p - \alpha_3| + |p - \alpha_4| \geq |\alpha_4 - \alpha_1| + |\alpha_3 - \alpha_2| = f(\alpha) \quad \text{【三角不等式】}$$

【說例 1】

$$f(x) = |x - 1| + |x - 3| + |x - 8| \text{ 有 } \min f(x) = \underline{\hspace{2cm}}, \text{ 此時 } x = \underline{\hspace{2cm}}.$$

【說例 2】

$$f(x) = |x - 1| + |x - 2| + |x - 3| + |x - 5| \text{ 有 } \min f(x) = \underline{\hspace{2cm}}, \text{ 此時 } \underline{\hspace{2cm}}.$$

6. 絕對值方程式的處理原則

(1) 絕對值問題常用方法：

①

②

③

④

(2) 題型分類：

題型	$ A \leq B $
說例	$ x-1 \leq 3x-4 $
處理原則	[法一] 兩側直接平方 [法二] 討論 $x < 1$, $1 \leq x < \frac{4}{3}$, $x \geq \frac{4}{3}$

題型	$ A \geq B$ $ A \leq B$
說例	$ x+1 \geq 2x+3$
處理原則	討論 $x < -1$, $x \geq -1$

題型	$ A + B \leq C $ $ A + B \geq C $
說例	$ x-1 + x-2 \leq 2x-3 $
處理原則	[法一] 看成 $x-1 + x-2 \leq (x-1) + (x-2)$ 再由三角不等式 $x-1 + x-2 \geq (x-1) + (x-2)$ 處理之 [法二] 討論 $x < 1$, $1 \leq x < \frac{3}{2}$, $\frac{3}{2} \leq x < 2$, $x \geq 2$

題型	多絕對值
說例	$ x-1 + x-2 + x-5 =20$
處理原則	[法一] 看成 x 分別到 1, 2, 5 的距離總和為 20， 必在 1 的左側或 5 的右側 [法二] 討論 $x < 1$, $1 \leq x < 2$, $2 \leq x < 5$, $x \geq 5$

型一 絕對值方程式

例 1

各校段考必考題型

$|ax+1| \leq b$ 之解為 $-1 \leq x \leq 5$ ，求 a, b 之值。

解 【常見錯誤】

$$\begin{aligned} |ax+1| \leq b &\Rightarrow -b \leq ax+1 \leq b \Rightarrow -b-1 \leq ax \leq b-1 \\ &\Rightarrow \frac{-b-1}{a} \leq x \leq \frac{b-1}{a} \quad [\text{錯在哪?}] \end{aligned}$$

【正解】

VEIA



例 2 平方使用時機

試解不等式 $|2x-1| \geq |x-5|$ 。

解

▣ 【衛道中學】

若實數 a 滿足 $1 < |a-1| \leq 2$ 且 $|x-a| = 3|x-9|$ ，則實數 x 的最大值為_____。

答：14

例 3

試解不等式 $3 < |2x - 1| < 5$ 。

解 【法一】

$$1^\circ \quad \text{Case 1} \quad \begin{cases} 2x - 1 \geq 0 \\ 3 < 2x - 1 < 5 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x \geq \frac{1}{2} \\ 2 < x < 3 \end{cases}$$

$$\text{Case 2} \quad \begin{cases} 2x - 1 < 0 \\ 3 < -(2x - 1) < 5 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x < \frac{1}{2} \end{cases}$$

2° 由以上可知所求為

【法二】

TFNJ



例 4 多重絕對值

請問滿足絕對值不等式 $||x - 1| - 4| \leq 3$ 的實數 x 解之範圍。

答

▣ 【台中一中】

試問滿足 $||x - 1| - 3| \leq 4$ 的整數 x 值共有_____個。

答：13

例 5

已知方程式 $\sqrt{x^2 - 4x + 4} + \sqrt{x^2 - 2x + 1} = 6$ ，求實數 x 。

解 將原方程式改寫為：

從距離大小與數線上的位置，其實可以看得出 x 在 1 的左側或在 2 的右側；
若是其他方程式數據，可能較難觀察 x 大概的位置，所以我們以通則來分析：

AGHB



例 6

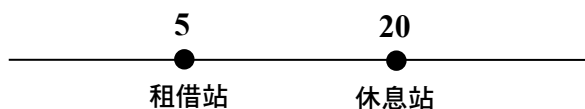
已知方程式 $|x-1| + |x-2| + |x-6| = 15$ ，求實數 x 。

解

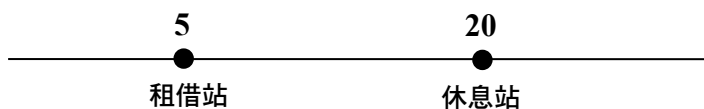
例 7

各校重要考題

如下圖所示，在一條東西向的筆直景觀道路上，有一家電動機車租借站與休息站，分別位於道路里程 5 與 20 的位置。遊客租借電動機車騎乘時，偶爾會在路上耗盡電力而需要道路救援。由於人力與成本的考量，若「救援位置與租借站的距離」再加上「救援位置與休息站距離的 1.5 倍」不大於 30 時，可以免費服務，則可以免費救援的里程區間為_____。



解



▣ 【台中女中】

解不等式 $|x+2| - |x-1| < x+1$ 。

答： $x > 2$ 或 $-4 < x < 0$

型二**偏差絕對值函數****例 8**

係數是 1 要如何處理?

求使得方程式 $|x-1|+|x-2|+|x-5|=k$ 有實數 x 解的 k 範圍。**解****例 9**

係數是 1 要如何處理?

求解不等式 $|x-1|+|x-5|>3$ 。**解****例 10**

係數不是 1 要如何處理?

求 $f(x)=3|x-1|+|x-2|+2|x-4|+|x-5|$ 的最小值與對應的 x 值。**解****▣ [挑戰題]**求 $f(x)=|x-1|+\frac{1}{2}|x-2|+\frac{1}{3}|x+3|$ 的最小值與對應的 x 值。答： $\frac{11}{6}$ ，此時 $x=1$

下列各方程式中，請選出有實數解的選項：

(1) $|x| + |x-5| = 1$

(2) $|x| + |x-5| = 6$

(3) $|x| - |x-5| = 1$

(4) $|x| - |x-5| = 6$

(5) $|x| - |x-5| = -1$ 。

解

$|x| + |x-5|$ 可以表示一維數線上，「 x 至原點的距離」與「 x 至 5 的距離」之和

同理， $|x| - |x-5|$ 可以表示一維數線上，「 x 至原點的距離」與「 x 至 5 的距離」之差

由於 $|x| + |x-5|$ 的最小值為 5，故方程式 $|x| + |x-5| = k$ 有實數 x 解的條件是_____。

接下來，我們來討論方程式 $|x| - |x-5| = k$ 有實數 x 解的條件：

圖示			
$a - b$			

由於 $|x| - |x-5| = k$ 的最小值為 -5 ，最大值為 5 ，

故方程式 $|x| - |x-5| = k$ 有實數 x 解的條件是_____。

故選_____。

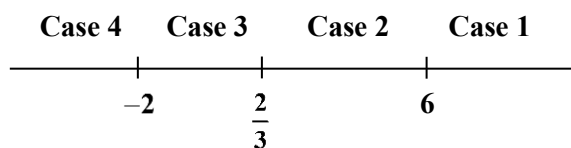
型三 三角不等式

例 12

試解 $|x-6|+|2x+4|\leq|3x-2|$ 之 x 的實數範圍。

解 【法一】討論

可以把實數區間分成四個區域：



Case 1 當 $x \geq 6$ 時, $\begin{cases} x \geq 6 \\ (x-6) + (2x+4) \leq (3x-2) \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x \geq 6 \\ x \text{ 為任意實數} \end{cases} \Rightarrow x \geq 6$

Case 2 當 $\frac{2}{3} \leq x < 6$ 時, $\begin{cases} \frac{2}{3} \leq x < 6 \\ (6-x) + (2x+4) \leq (3x-2) \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \frac{2}{3} \leq x < 6 \\ x \geq 6 \end{cases} \Rightarrow x \text{ 無解}$

Case 3 當 $-2 \leq x < \frac{2}{3}$ 時, $\begin{cases} -2 \leq x < \frac{2}{3} \\ (6-x) + (2x+4) \leq (2-3x) \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} -2 \leq x < \frac{2}{3} \\ x \leq -2 \end{cases} \Rightarrow x = -2$

Case 4 當 $x < -2$ 時, $\begin{cases} x < -2 \\ (6-x) + (-2x-4) \leq (2-3x) \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x < -2 \\ x \text{ 為任意實數} \end{cases} \Rightarrow x < -2$

由以上可知實數 x 範圍為 $x \leq -2$ 或 $x \geq 6$

【法二】三角不等式

$$\because | \quad | + | \quad | \geq | \quad |, \quad \forall x \in \mathbb{R}$$

但題給 $| \quad | + | \quad | \leq | \quad |$

$\therefore$

▣ [挑戰題]

試解 $|2x-6|+|x-2|\leq|x-4|$ 之 x 的實數範圍。

答： $2\leq x\leq 3$

Topic 1-3

指 數

主題 12 因式分解



《 《 < < < 《 《 《 《 《 < < < < 《 《 《 < <

型一 分組提出公因式

BMYN



例 1. 試因式分解下列各式：(1) $ab(1-c^2)-c(a^2-b^2)$

$$(2) 9+3(x^2+x+1)+x^2(x+1)$$

解：(1) 原式 $= ab - abc^2 - a^2c + b^2c$
 $= ab + b^2c - a^2c - abc^2$
 $= b(a+bc) - ac(a+bc)$
 $= (a+bc)(b-ac)$

(2) 原式 $= x^3 + 4x^2 + 3x + 12$
 $= x^2(x+4) + 3(x+4)$
 $= (x+4)(x^2+3)$

例 2. 因式分解 $1-a^3+b^3-a^3b^3=?$

XVTH



解：原式 $= (1-a^3)+b^3(1-a^3)$
 $= (1-a^3)(1+b^3)$
 $= (1-a)(1+a+a^2)(1+b)(1-b+b^2)$

型二 十字交乘法

例 1. 試因式分解下列各式：(1) $a^2b^2x^2 + 3ab^2x - 4b^2$

$$(2) 5x^3y - 25x^2y^2 + 30xy^3$$

$$(3) x^2 - 2bx - (a^2 - b^2)$$

解：(1) 原式 $= b^2(a^2x^2 + 3ax - 4) = b^2(ax + 4)(ax - 1)$

$$(2) \text{原式} = 5xy(x^2 - 5xy + 6y^2) = 5xy(x - 2y)(x - 3y)$$

$$(3) \text{原式} = x^2 - 2bx - (a + b)(a - b) \\ = (x + a - b)(x - a - b)$$



例 2. 因式分解(1) $(x^2 + 2x + 4)(x^2 + 2x - 6) + 21$

$$(2) (x^2 + 3x + 2)(x^2 + 7x + 12) - 3$$

解：(1) 原式 $= \underline{(x^2 + 2x + 4)}(\underline{x^2 + 2x - 6}) + 21$

$$= (x^2 + 2x)^2 - 2(x^2 + 2x) - 3$$

$$= (x^2 + 2x - 3)(x^2 + 2x + 1)$$

$$= (x + 3)(x - 1)(x + 1)^2$$

$$(2) \text{原式} = (x + 1)(x + 2)(x + 3)(x + 4) - 3$$

$$= (x^2 + 5x + 4)(x^2 + 5x + 6) - 3$$

$$= (x^2 + 5x)^2 + 10(x^2 + 5x) + 21$$

$$= (x^2 + 5x + 7)(x^2 + 5x + 3)$$



型三 拆項與補項

例 1. 試因式分解下列各式：(1) $x^4 + x^3 + 2x^2 + x + 1$

$$(2) x^4 + 4$$

解：(1) 原式 $= x^4 + x^3 + x^2 + x^2 + x + 1$
 $= x^2(x^2 + x + 1) + (x^2 + x + 1)$
 $= (x^2 + x + 1)(x^2 + 1)$

(2) 原式 $= (x^2 + 2)^2 - 4x^2$
 $= (x^2 + 2)^2 - (2x)^2$
 $= (x^2 + 2 + 2x)(x^2 + 2 - 2x)$
 $= (x^2 + 2x + 2)(x^2 - 2x + 2)$

例 2. (1) 因式分解 $n^4 - 6n^2 + 25$

(2) $n \in \mathbb{Z}$ ，若 $n^4 - 6n^2 + 25$ 為一質數，求 n 與此質數。

解：(1) 原式 $= (n^2 + 5)^2 - 16n^2$
 $= (n^2 + 5)^2 - (4n)^2$
 $= (n^2 + 5 + 4n)(n^2 + 5 - 4n)$
 $= (n^2 + 4n + 5)(n^2 - 4n + 5)$

(2) $P = ab$ 為質數 $\Rightarrow a = \pm 1$ 或 $b = \pm 1$

由(1)得 (i) $n^2 + 4n + 5 = 1 \Rightarrow n = -2$ ，原數為 17

(ii) $n^2 + 4n + 5 = -1 \Rightarrow$ 無解

(iii) $n^2 - 4n + 5 = 1 \Rightarrow n = 2$ ，原數為 17

(iv) $n^2 - 4n + 5 = -1 \Rightarrow$ 無解

$\therefore n = \pm 2$ ，此質數為 17



型四 強迫分解

- 例 1. 因式分解：(1) $xy + 3x - 2y - 6$
(2) $xy + 5x + 4y + 20$
(3) $x^2y^2 - x^2 - y^2 + 1$



解：(1) $\left(\begin{array}{c} x \times -2 \\ y \times +3 \end{array} \right) \Rightarrow \text{原式} = (x-2)(y+3)$

(2) $\left(\begin{array}{c} x \times +4 \\ y \times +5 \end{array} \right) \Rightarrow \text{原式} = (x+4)(y+5)$

(3) $\left(\begin{array}{c} x^2 \times -1 \\ y^2 \times -1 \end{array} \right) \Rightarrow \text{原式} = (x^2-1)(y^2-1)$
 $= (x-1)(x+1)(y-1)(y+1)$

型五 配合整數解

例 1. 設 $x \in \mathbb{N}$ 且 $\sqrt{x^2 + 71} \in \mathbb{N}$ ，試解 $x = ?$

解：令 $\sqrt{x^2 + 71} = k, k \in \mathbb{N}$

$$\Rightarrow x^2 + 71 = k^2$$

$$\Rightarrow k^2 - x^2 = 71$$

$$\Rightarrow (k+x)(k-x) = 71$$

大 小

$$\begin{array}{r|l} k+x & 71 \\ k-x & 1 \end{array}$$

$$\therefore k = 36, x = 35$$



例 2. 設 $x, y \in \mathbb{Z}$ 且 $\frac{5}{x} + \frac{4}{y} = 1$ ，試解數對 $(x, y) = ?$

解： $\frac{5}{x} + \frac{4}{y} = 1$

$$\Rightarrow 5y + 4x = xy$$

$$\Rightarrow xy - 4x - 5y = 0$$

$$\Rightarrow (x-5)(y-4) = 20$$

$x-5$	1	2	4	5	10	20	-1	-2	-4	-5	-10	-20
$y-4$	20	10	5	4	2	1	-20	-10	-5	-4	-2	-1

x	6	7	9	10	15	25	4	3	1	0	-5	-15
y	24	14	9	8	6	5	-16	-6	-1	0	2	3

↑

不合

共有 11 組解

例 3. (能力指標：平方差)

已知**直角**三角形的三邊長皆為整數，且有一股的長度是 20，
求這樣的直角三角形有幾個？



解：設另一股為 a ，斜邊為 b ， $a, b \in \mathbb{N}$ 且 $b > a$ ，則

$$a^2 + 20^2 = b^2$$

$$\Rightarrow b^2 - a^2 = 400$$

$$\Rightarrow (b-a)(b+a) = 400$$

↓ ↓

小 大

$$\Rightarrow \begin{array}{c|c|c|c|c} b-a & 2 & 4 & 8 & 10 \\ \hline b+a & 200 & 100 & 50 & 40 \end{array}$$

$$\Rightarrow \begin{array}{c|c|c|c|c} b & 101 & 52 & 29 & 25 \\ \hline a & 99 & 48 & 21 & 15 \end{array}$$

故滿足題目的三角形共有 4 個



回家作業



1. 下列何者為 $xy - 8 + 4x - 2y$ 的因式？

- (A) $x+2$ (B) $x-2$ (C) $x-4$ (D) $x-8$ 。



2. 下列哪一個式子是 $\frac{a^3}{8} - b^3$ 的因式？

- (A) $a^2 - 2ab + 4b^2$ (B) $a^2 + 2ab + 4b^2$ (C) $2a+b$ (D) $a+2b$ 。

3. 因式分解 $4x^2y^2 + 2xy - x^2 - y^2$ 。



1. (B) 2. (B) 3. $(2xy + x - y)(2xy - x + y)$



回家作業



4. 下列何者正確？

(A) $(a-b)(a^2-ab+b^2)=a^3+b^3$

(B) $(a+b)(a^2-ab+b^2)=a^3-b^3$

(C) $(a^2+ab+b^2)(a^2-ab+b^2)=a^4-a^2b^2+b^4$

(D) $(a+b)(a-b)(a^2+b^2)=a^4-b^4$ 。

5. 試因式分解 $ab(1-c^2)-c(a^2-b^2)$ 。

6. 在 240 與 250 之間恰有一個正整數可以整除 $2^{24}-1$ ，則此數為_____。



4. (D) 5. $(a+bc)(b-ac)$ 6. 241



回家作業



7. 求 $x^2 - 4y^2 = 1$ 之整數解。

8. 下列何者不是 $x^5 - 3x^3 - 4x$ 的因式？

- (A) $x-2$ (B) $x+2$ (C) x^3+x (D) $x-1$ 。

9. 計算 $\frac{(10^4+64)(18^4+64)(26^4+64)(34^4+64)(42^4+64)}{(6^4+64)(14^4+64)(22^4+64)(30^4+64)(38^4+64)}$ 之值。

[提示：利用 x^4+64 的因式分解]



7. $(1, 0)$ 或 $(-1, 0)$ 8. (D) 9. 97



回家作業



10. 因式分解 $a^4 + 4b^4$ 。

11. 因式分解 $(a^2 - 1)(b^2 - 1) - 4ab$ 。

12. 有三個質數，其積為其和的 19 倍，求此三質數和。



10. $(a^2 + 2ab + 2b^2)(a^2 - 2ab + 2b^2)$ 11. $(ab + a + b - 1)(ab - a - b - 1)$ 12. 33



回家作業



13. 因式分解 $(x+1)(x+3)(x+5)(x+7)+15$ 。(分成 4 個一次因式)

14. 解 $(x+1)(2x+1)(3x-1)(4x-1)+6x^4=0$ 。

15. 已知 x 和 $\sqrt{x^2-9x-1}$ 皆為整數，試求 x 之值。



13. $(x+2)(x+6)(x+4-\sqrt{6})(x+4+\sqrt{6})$ 14. $x = \frac{-1 \pm \sqrt{6}}{5}$ 或 $\frac{-1 \pm \sqrt{7}}{6}$

15. $x = 26 \text{ or } 10 \text{ or } -17 \text{ or } -1$



回家作業



16. 因式分解 $(ab-1)^2 + (a+b)(ab+1) + 5ab$ 。

17. 因式分解 $(xy+1)(x+1)(y+1) + xy$ 。



16. $(ab+1+a)(ab+1+b)$ 17. $(xy+1+x)(xy+1+y)$

數位 延伸閱讀



型六 雙十字交乘法

1. 因式分解 $x^2 + xy - 6y^2 - 3x + 11y - 4$

解： $\begin{pmatrix} x & +3y & -4 \\ x & -2y & +1 \end{pmatrix}$

$$\text{原式} = (x + 3y - 4)(x - 2y + 1)$$



2. 因式分解 $3x^2 - 8xy - 3y^2 - 10x - 10y - 8$

解： $\begin{pmatrix} 3x & +y & +2 \\ x & -3y & -4 \end{pmatrix}$

$$\text{原式} = (3x + y + 2)(x - 3y - 4)$$



3. 因式分解 $2x^2 - xy - 6y^2 + 5x + 11y - 3$

解： $\begin{pmatrix} 2x & +3y & -1 \\ x & -2y & +3 \end{pmatrix}$

原式 = $(2x + 3y - 1)(x - 2y + 3)$



DKFH



【觀念四】 分母有理化 $\frac{1}{\sqrt{a}-\sqrt{b}} = \frac{1}{\sqrt{a}-\sqrt{b}} \times \frac{\sqrt{a}+\sqrt{b}}{\sqrt{a}+\sqrt{b}} = \frac{\sqrt{a}+\sqrt{b}}{a-b}$

YQPJ


$$(2) \text{ 原式} = \sqrt{\frac{8}{3} \cdot \frac{3}{3}} = \frac{\sqrt{24}}{3} = \frac{2\sqrt{6}}{3}$$

例 2. (能力指標：有理化)



試有理化：(1) $\frac{\sqrt{6}+\sqrt{5}}{\sqrt{5}+\sqrt{3}}$ (2) $\frac{1}{1+\sqrt{2}+\sqrt{3}}$

解：(1) 原式 = $\frac{\sqrt{6}+\sqrt{5}}{\sqrt{5}+\sqrt{3}} \cdot \frac{\sqrt{5}-\sqrt{3}}{\sqrt{5}-\sqrt{3}} = \frac{\sqrt{30}+5-3\sqrt{2}-\sqrt{15}}{2}$

(2) 原式 = $\frac{1}{(1+\sqrt{2})+\sqrt{3}} \times \frac{(1+\sqrt{2})-\sqrt{3}}{(1+\sqrt{2})-\sqrt{3}}$
 $= \frac{1+\sqrt{2}-\sqrt{3}}{2\sqrt{2}}$
 $= \frac{\sqrt{2}+1-\sqrt{6}}{4}$

例 3. (能力指標：有理化)



化簡 $\frac{\sqrt{35}+\sqrt{21}+5+\sqrt{15}}{\sqrt{7}+2\sqrt{5}+\sqrt{3}}$

解：1° 先有理化倒數

$$\begin{aligned}\text{倒數} &= \frac{\sqrt{7}+\sqrt{5}+\sqrt{5}+\sqrt{3}}{(\sqrt{7}+\sqrt{5})(\sqrt{5}+\sqrt{3})} = \frac{\sqrt{7}+\sqrt{5}}{(\sqrt{7}+\sqrt{5})(\sqrt{5}+\sqrt{3})} + \frac{\sqrt{5}+\sqrt{3}}{(\sqrt{7}+\sqrt{5})(\sqrt{5}+\sqrt{3})} \\ &= \frac{1}{\sqrt{5}+\sqrt{3}} + \frac{1}{\sqrt{7}+\sqrt{5}} \\ &= \frac{\sqrt{5}-\sqrt{3}}{2} + \frac{\sqrt{7}-\sqrt{5}}{2} \\ &= \frac{\sqrt{7}-\sqrt{3}}{2}\end{aligned}$$

$$2^\circ \text{ 原數} = \frac{2}{\sqrt{7}-\sqrt{3}} = \frac{\sqrt{7}+\sqrt{3}}{2}$$

例 4. (能力指標：有理化)

IJTH



化簡 $\frac{1}{\sqrt{2}+1} + \frac{1}{\sqrt{3}+\sqrt{2}} + \cdots + \frac{1}{\sqrt{100}+\sqrt{99}} = ?$

解： $\frac{1}{\sqrt{k+1}+\sqrt{k}} = \frac{1}{\sqrt{k+1}+\sqrt{k}} \cdot \frac{\sqrt{k+1}-\sqrt{k}}{\sqrt{k+1}-\sqrt{k}} = \sqrt{k+1}-\sqrt{k}$

$$\begin{aligned}\text{原式} &= (\sqrt{2}-1) + (\sqrt{3}-\sqrt{2}) + (\sqrt{4}-\sqrt{3}) + \cdots + (\sqrt{100}-\sqrt{99}) \\ &= -1 + \sqrt{100} \\ &= -1 + 10 \\ &= 9\end{aligned}$$



回家作業



1. 滿足 $\sqrt{90x}$ 為正整數且 $1 \leq x \leq 100$ 的正整數 x 之值有_____個。



2. 化簡 $\frac{1}{2-\sqrt{3}} - \frac{5\sqrt{2}}{1+\sqrt{6}} + \frac{1}{\sqrt{3}+\sqrt{2}} =$ _____。

3. $(\frac{1}{\sqrt{2}+\sqrt{3}} + \frac{2}{\sqrt{5}+\sqrt{3}} + \frac{3}{2\sqrt{2}+\sqrt{5}})^2$ 經化簡後可得結果為_____。



1. 3 2. 2 3. 2



回家作業



4. 若 $x = \sqrt{7} + \sqrt{6}$, $y = \sqrt{6} - \sqrt{7}$, 則 $2x^2 + 3xy + 2y^2 =$ _____。

5. 若 $\frac{1}{\sqrt{4-\sqrt{14}}} = \frac{\sqrt{b+c\sqrt{14}}}{a}$, 求 $a+b+c$ 之值, 其中 a, b, c 為最小正整數解。

6. 實數 a 滿足 $|1996 - a| + \sqrt{a - 1997} = a$, 則 $a - 1996^2$ 之值為_____。



4. 49 5. 12 6. 1997



回家作業



7. $a = \sqrt{5} + \sqrt{7} + \sqrt{11}$, $b = \sqrt{2} + \sqrt{7} + \sqrt{14}$, $c = \sqrt{2} + \sqrt{10} + \sqrt{11}$, 則 a, b, c 的大小關係為何？
- (A) $a > b > c$ (B) $a > c > b$ (C) $b > c > a$
(D) $c > b > a$ (E) $c > a > b$ 。

8. 化簡 $\frac{12}{\sqrt{2} + \sqrt{3} + \sqrt{5}} = \underline{\hspace{2cm}}$ 。(分母不可含方根)

9. 試化簡 $\frac{1}{1+\sqrt{3}} + \frac{1}{\sqrt{3}+\sqrt{5}} + \frac{1}{\sqrt{5}+\sqrt{7}} + \cdots + \frac{1}{\sqrt{23}+\sqrt{25}} = \underline{\hspace{2cm}}$ 。



7. (B) 8. $2\sqrt{3} + 3\sqrt{2} - \sqrt{30}$ 9. 2



回家作業



10. 請選出選項當中最大者：

- (1) $10-3\sqrt{11}$ (2) $51-10\sqrt{26}$ (3) $3\sqrt{11}-10$
(4) $10\sqrt{26}-51$ (5) $\sqrt{401}-20$ 。

11. 已知 $x = \frac{\sqrt{3}}{2}$ ，則 $\frac{1-x}{1-\sqrt{1-x}} + \frac{1+x}{1+\sqrt{1+x}}$ 之值為 _____。

12. 化簡 $\sqrt{(5+2\sqrt{6})^3} + \sqrt{(5-2\sqrt{6})^3}$ 可得下列選項中的哪個值？請選出來。

- (1) $13\sqrt{2}$ (2) $17\sqrt{3}$ (3) $17\sqrt{5}$ (4) $18\sqrt{3}$ (5) $18\sqrt{2}$ 。



10. (1) 11. 1 12. (4)



回家作業



13. 比較下列各數中，何者最小？

(1) $\sqrt{400} + \sqrt{400}$

(2) $\sqrt{401} + \sqrt{399}$

(3) $\sqrt{402} + \sqrt{398}$

(4) $\sqrt{403} + \sqrt{397}$ 。

14. 已知 $x = \frac{\sqrt{5} + \sqrt{3}}{\sqrt{5} - \sqrt{3}}$ ，則 $x^3 - \frac{1}{x^3} =$ _____ 。



13. (4) 14. $126\sqrt{15}$



回家作業



15. (103 學測試題)

關於下列不等式，請選出正確的選項。

- (1) $\sqrt{13} > 3.5$ (2) $\sqrt{13} < 3.6$ (3) $\sqrt{13} - \sqrt{3} > \sqrt{10}$
(4) $\sqrt{13} + \sqrt{3} > \sqrt{16}$ (5) $\frac{1}{\sqrt{13} - \sqrt{3}} > 0.6$



15. (1)(4)



型二 三次根式

【觀念一】原理： $(x+y)(x^2-xy+y^2)=x^3+y^3$

$$(x-y)(x^2+xy+y^2)=x^3-y^3$$



【觀念二】立方根式分母有理化

$$\begin{aligned}\frac{1}{\sqrt[3]{a}+\sqrt[3]{b}} &= \frac{1}{\sqrt[3]{a}+\sqrt[3]{b}} \times \frac{\sqrt[3]{a^2}-\sqrt[3]{ab}+\sqrt[3]{b^2}}{\sqrt[3]{a^2}-\sqrt[3]{ab}+\sqrt[3]{b^2}} \\ &= \frac{\sqrt[3]{a^2}-\sqrt[3]{ab}+\sqrt[3]{b^2}}{a+b}\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\frac{1}{\sqrt[3]{a}-\sqrt[3]{b}} &= \frac{1}{\sqrt[3]{a}-\sqrt[3]{b}} \times \frac{\sqrt[3]{a^2}+\sqrt[3]{ab}+\sqrt[3]{b^2}}{\sqrt[3]{a^2}+\sqrt[3]{ab}+\sqrt[3]{b^2}} \\ &= \frac{\sqrt[3]{a^2}+\sqrt[3]{ab}+\sqrt[3]{b^2}}{a-b}\end{aligned}$$

1. (能力指標：三次根式有理化)



試有理化：(1) $\frac{1}{\sqrt[3]{12}}$ (2) $\sqrt[3]{\frac{2}{3}}$ (3) $\frac{5}{2-\sqrt[3]{3}}$ (4) $\frac{5}{1+\sqrt[3]{2}+\sqrt[3]{4}}$

解：(1) 原式 $= \frac{1}{\sqrt[3]{2^2 \cdot 3}} \times \frac{\sqrt[3]{2 \cdot 3^2}}{\sqrt[3]{2 \cdot 3^2}} = \frac{\sqrt[3]{18}}{6}$

(2) 原式 $= \frac{\sqrt[3]{2}}{\sqrt[3]{3}} \times \frac{\sqrt[3]{3^2}}{\sqrt[3]{3^2}} = \frac{\sqrt[3]{18}}{3}$

(3) 原式 $= \frac{5}{2-\sqrt[3]{3}} \times \frac{2^2+2 \cdot \sqrt[3]{3}+(\sqrt[3]{3})^2}{2^2+2 \cdot \sqrt[3]{3}+(\sqrt[3]{3})^2} = \frac{5 \cdot (4+2\sqrt[3]{3}+\sqrt[3]{9})}{2^3-3} = 4+2\sqrt[3]{3}+\sqrt[3]{9}$

(4) 原式 $= \frac{5}{(\sqrt[3]{2})^2+\sqrt[3]{2}+1} \times \frac{\sqrt[3]{2}-1}{\sqrt[3]{2}-1} = \frac{5(\sqrt[3]{2}-1)}{2-1} = 5(\sqrt[3]{2}-1)$

2. (能力指標：三次方根方程組)

LRZJ



解聯立方程式 $\begin{cases} x-y=29 \\ \sqrt[3]{x-1}-\sqrt[3]{y+2}=2 \end{cases}$ 得 y 之值為 _____。

解： 令 $\begin{cases} a=\sqrt[3]{x-1} \\ b=\sqrt[3]{y+2} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a^3=x-1 \\ b^3=y+2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x=a^3+1 \\ y=b^3-2 \end{cases}$

$$\begin{cases} (a^3+1)-(b^3-2)=29 \\ a-b=2 \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} a^3-b^3=26 \\ a-b=2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} (a-b)(a^2+ab+b^2)=26 \\ a-b=2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a^2+ab+b^2=13 \\ a-b=2 \end{cases}$$

消去 a 得 $(b+2)^2+(b+2)b+b^2=13$

$$\Rightarrow 3b^2+6b-9=0 \Rightarrow b^2+2b-3=0 \Rightarrow b=-3 \text{ 或 } 1$$

$$\therefore \begin{cases} a=-1 \\ b=-3 \end{cases} \text{ 或 } \begin{cases} a=3 \\ b=1 \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} x=a^3+1=0 \\ y=b^3-2=-29 \end{cases} \text{ 或 } \begin{cases} x=a^3+1=28 \\ y=b^3-2=-1 \end{cases}$$

3. (能力指標：三次方根化簡)

MSVI



試證： $\sqrt[3]{20+14\sqrt{2}}+\sqrt[3]{20-14\sqrt{2}}=4$ 。

解： 令 $x=\sqrt[3]{20+14\sqrt{2}}+\sqrt[3]{20-14\sqrt{2}} \in \mathbb{R}$

$$\Rightarrow x^3=40+6x$$

$$\Rightarrow x^3-6x-40=0$$

$$\Rightarrow (x-4)\underbrace{(x^2+4x+10)}_{D<0}=0$$

$$\therefore x=4, \text{ 即 } \sqrt[3]{20+14\sqrt{2}}+\sqrt[3]{20-14\sqrt{2}}=4$$

$$x=a+b$$

$$\Rightarrow x^3=a^3+3a^2b+3ab^2+b^3$$

$$\Rightarrow x^3=a^3+b^3+3ab\underbrace{(a+b)}_x$$

$$\Rightarrow x^3=a^3+b^3+3abx$$

$$\begin{aligned} ab &= \sqrt[3]{20+14\sqrt{2}} \cdot \sqrt[3]{20-14\sqrt{2}} \\ &= \sqrt[3]{400-392} = \sqrt[3]{8} = 2 \end{aligned}$$

數位[📶] 延伸閱讀回家作業



1. 試將 $\frac{6}{\sqrt[3]{4}-1}$ 之分母有理化。



1. $2(2\sqrt[3]{2} + \sqrt[3]{4} + 1)$

例 1. (能力指標：計算機求值)

請完成下列各小題：

(1) $10^{4.8} =$

(2) $\log 4.8 =$

(3) $10^a = 6.5 \Rightarrow a = \log 6.5 =$

(4) $\log b = 6.5 \Rightarrow b = 10^{6.5} =$

解： (1) $10^{4.8} = 63095.73444\cdots$

(2) $\log 4.8 = 0.68124123\cdots$

(3) $10^a = 6.5 \Rightarrow a = \log 6.5 = 0.81291335\cdots$

(4) $\log b = 6.5 \Rightarrow b = 10^{6.5} = 3162277.6601\cdots$

例 2. (各校段考試題)

(1) 試求 $\log(10^{12}) + 10^{\log 7} + \log 0.01 =$ _____。

(2) 已知 $a = \log 40$, $b = \log 25$, 則 $a + b =$ _____。

(3) 已知 $k = \log 3$, 則 $1000^k + 100^{-k} =$ _____。

解：



例 3. (中山女中)

請選出正確的選項。

(參考數值 $\log 2 \approx 0.3010$, $\log 3 \approx 0.4771$, $\log 7 \approx 0.8450$)

- (1) 對每個 $a > 0$ ，都有唯一的實數 x 滿足 $10^x = a$ ，這個實數 x 記為 $\log a$
- (2) 若 a, b 為正實數 $\log a = 1.5$ 且 $\log b = 2.2$ ，則 ab^2 的整數部分為 6 位數
- (3) $\log 101415$ 介於 5 與 6 之間
- (4) 1.3579×10^{-7} 的小數點後第 8 位數字開始不為 0
- (5) 2^{70} 的整數部分為 22 位數

解：

例 4. (各校段考試題)

- (1) 若 $\log a = 3 + \log 4.72$ ， $\log b = 2 + \log 0.236$ ，則 a 是 b 的 _____ 倍。
- (2) 已知 $a, b > 0$ ，且滿足 $\log(ab^2) = 8 + \log 1.28$ ， $\log(a^2b) = 7 + \log 3.2$ ，
求 $\log(a+b) =$ _____。

解：

例 5. (建國中學)

實數 a 、 b 之間的關係為 $2a = 4 + 3\log b$ ，則當 b 變為 10 倍時， a 增加多少？

解：

例 6. (成功高中)

pH 值可以用來表示溶液的酸鹼程度，若 $[H^+]$ 表示溶液中氫離子的濃度，則 $pH = -\log[H^+]$ 。假設檸檬汁的 $[H^+] = 10^{-3}$ ，則檸檬汁的 $pH = 3$ 。若將 $pH = 3$ 的檸檬汁與 $pH = 4$ 的橘子汁以 1：3 的比例混合，求混合溶液的 pH 值約為多少？（四捨五入至小數點以下第一位， $\log 3.25 \approx 0.5119$ ）

解：

例 7. (實驗高中)

目前國際使用「芮氏規模」來表示地震的強度，設 $E(r)$ 為地震「芮氏規模 r 」震央所釋放出的能量(單位：焦耳)，且 r 與 $E(r)$ 的關係如下：

$$\log E(r) = 4.8 + 1.5r \circ$$

- (1) 九二一地震，發生於民國 88 年 9 月 21 日，震央位於南投集集，其芮氏規模為 7.3，試問其震央所釋放的能量 $E(7.3)$ 的整數部分為幾位數？
- (2) 呈上，三三一地震，發生於民國 91 年 3 月 31 日，震央位於花蓮秀林，其芮氏規模為 6.8，試問「九二一地震」其震央所釋放的能量約為「三三一地震」時震央所釋放的能量的多少倍？($\log 31.623 \approx 1.5$ ，小數點以下無條件進位至整數)
- (3) 呈上，九二一地震震央所釋出的能量約為西元 1964 年白河地震震央所釋出的能量的 30 倍，試問白河地震的芮氏規模為多少？(四捨五入至小數點第一位， $1.4771 \div 3 \approx 0.4924$)(4 分)

解：

例 8. (建國中學學資)

所謂「梅森質數」是指形如 $2^p - 1$ 的質數，其中 p 為質數。「GIMPS 計畫」是透過網路連接全球各地的電腦資源搜尋梅森質數。已知 $2^{521} - 1$ 是一個質數。試回答下列問題：

- (1) 根據常用對數的定義 $2 = 10^{\log 2}$ ，令 $2^{521} = 10^k$ ，試用 $\log 2$ 來表示 k 。
- (2) 用計算機求出 k 的近似值。(四捨五入至小數點後第一位)
- (3) 請問質數 $2^{521} - 1$ 是幾位數？

解： (1) $2^{521} = (10^{\log 2})^{521} = 10^{521 \times \log 2}$ ， $k = 521 \times \log 2$

(2) 利用計算機可以求得 $k = 521 \times \log 2 \approx 156.8$

(3) $2^{521} - 1 \approx 10^{156.8} \Rightarrow 10^{156} < 2^{521} - 1 < 10^{157}$ ，故 $2^{521} - 1$ 是 157 位數