

陳立數學講義

【使用方法】

●主題式的編排，強調課程重點

陳立數學講義採取「主題式」編排，依據教材內容所強調的「觀念與重點」設計上課教授的例題；陳立所有的任課老師在授課時會配合觀念導引，將例題詳盡解出；不以填充式教學方式，使同學可以在課堂上，就能將每一個觀念與題目融會貫通！

●獨家設計數位延伸閱讀，提升數學素養能力

陳立數學獨家設計，題題均由陳立老師親自授課，從數學大師的角度，帶領同學體會更寬廣的數學之美。

★綜合題型分析與閱讀素養題型：

每個章節配置跨領域的綜合題型，讓同學對於題目的掌握度更加提升。

由陳立數學師資團隊共同研發閱讀素養題型，讓數學不再只是數學，而是生活中鮮明的感受。

●課後練習及小考，週週配合進度安排

★陳立數學在每個主題後均附回家作業，讓同學在家中也能配合進度演算複習。若同學在家演算過程遇到瓶頸時，陳立數學也貼心的將回家作業詳解附於每本講義最後，讓同學能立即解惑。

★每週課後均安排小考，使同學能驗證上週課程學習進度，每週的週考排名也讓同學們相互砥礪，不要鬆懈。

★段考前夕，陳立數學會舉行「全國大會考」。讓陳立實實提升擁有全國的競爭力！

●完備的課後輔導制度，優秀的帶班導師，完整掌握學生學習狀況

★本班配有專業輔導團隊，讓同學對於課程上的問題，可以馬上發問、馬上解決。

★為交通較不便利的同學，我們利用線上解惑幫助解題，節省同學的時間。

★配合各班級與段考制度，安排專職老師替同學做數學輔導課程，幫助同學對課程更加熟悉。

★對於同學的學習狀況，導師完整掌握，定期與家長電話聯繫，關心每一位陳立實實！

●配合各單元之高頻率命題、各校試題集錦『陳立』為同學掌握命題方向

★「高頻率命題」是集結全國各高中多年來常出現的必考題型精選而成。

★精選各區重點學校考題，讓同學可以更迅速深化數學能力。

●教材分流，進度分流-高一全國領先教本/題本/考本 分流分版本



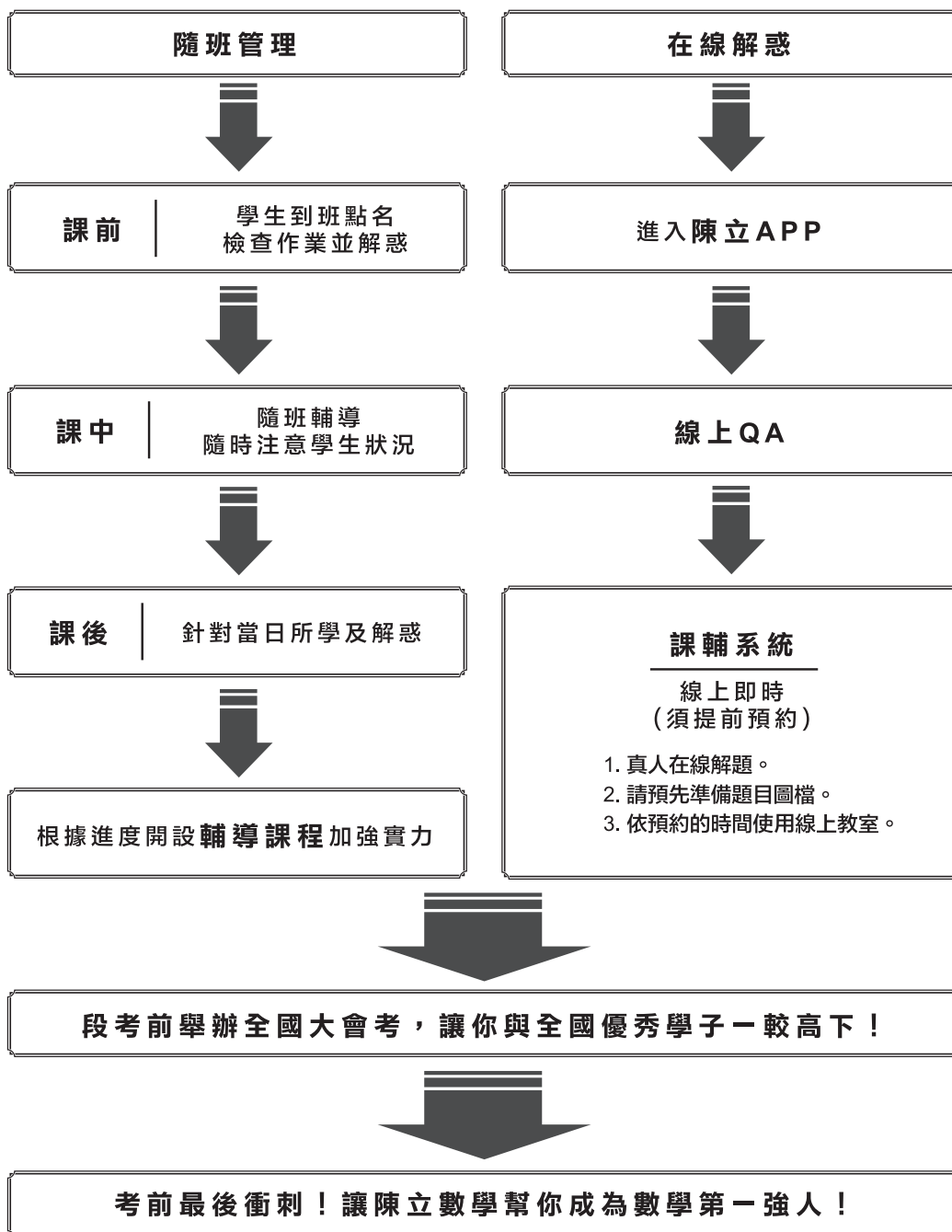
高頻率超越版題本
領取條件
◆
需完成正規高頻率所有內容
經導師核可後使得領取

勤勞的學習，一百分的目標

陳立教育集團

— 數 · 學 · 科 —
專業輔導系統

輔導無死角，線上再升級！



★ 數列

主題 1	數列與級數	6
主題 2	等差數列	10
主題 3	等比數列	19
主題 4	等差、等比與調和中項	30
主題 5	群數列	32
主題 6	級數總和與數列一般項	35
主題 7	如何求 a	38
主題 8	數學歸納法	51

★ 級數

主題 9	等差級數與等比級數	68
主題 10	利率問題	87
主題 11	Σ 運算.....	93
主題 12	級數求和公式	96
主題 13	堆垛	104
主題 14	相消級數	108
主題 15	等比幾何應用	114
主題 16	數列級數綜合題型	121

★ 數列

主題 1 數列與級數

XDVL



【觀念一】數列定義

- (1) 數的排列

【觀念二】級數定義

- (1) 數列的總和

【觀念三】數列重要名詞與符號：

- (1) 數列 $\langle a_n \rangle$ 中第一個數稱為第 1 項或首項，記為：_____
- (2) 數列 $\langle a_n \rangle$ 中第二個數稱為第 2 項，記為：_____
- (3) 數列 $\langle a_n \rangle$ 中第 n 個數稱為第 n 項，記為：_____
- (4) 數列 $\langle a_n \rangle$ 中的每一個數稱為_____，所有項的個數稱_____
- (5) 數列項數有限個稱此數列為_____
- (6) 數列項數無限個稱此數列為_____
- (7) 數列表示法：
- ① 有限數列： $\langle a_1, a_2, a_3, \dots, a_n \rangle$
- ② 無限數列： $\langle a_1, a_2, a_3, \dots, a_n, \dots \rangle$

《說明》 $\langle a_n \rangle_{n=1}^8 = \langle a_1, a_2, \dots, a_8 \rangle$ ，定義： $a_n = n^2 + 1$

- ① 項數 = _____
- ② 首項 = _____
- ③ 末項 = _____

【觀念四】有限級數與無限級數

(1) 有限級數： $a_1 + a_2 + \cdots + a_n$

(2) 無限級數： $a_1 + a_2 + \cdots + a_n + \cdots$

【觀念五】級數符號

(1) $a_1 + a_2 + \cdots + a_n = \underline{\hspace{2cm}} = \sum$

(2) $a_1 + a_2 + \cdots + a_n + \cdots = \sum$

(3) S_n 表示：前 n 項總和

例 1. (能力指標：規則尋找)

已知下面的數列含有某種規則，嘗試去發掘出來，再填上下列各題之空格：



(1) $\underline{\hspace{1cm}}, 5, 8, 11, 14, \underline{\hspace{1cm}}, \underline{\hspace{1cm}}$

(2) $1, 4, 9, \underline{\hspace{1cm}}, \underline{\hspace{1cm}}$

(3) $\underline{\hspace{1cm}}, 2, 3, 5, 8, 12, 17, \underline{\hspace{1cm}}, \underline{\hspace{1cm}}$

(4) $\underline{\hspace{1cm}}, 2, 3, 5, 8, 13, 21, \underline{\hspace{1cm}}, \underline{\hspace{1cm}}$

解：

例 2. (能力指標：規則尋找)

找出下列數列規則性



(1) 1, 2, 4, 7, 11, 16, _____, _____, _____

(2) 1, 2, 5, 10, 17, 26, _____, _____, _____

(3) 1, 1, 2, 6, _____, 120, _____, _____

(4) 1, 2, 3, 6, 11, 20, _____, 68, _____, _____

(5) 3, 6, 11, 20, 37, _____, 135, _____, _____

(6) $\frac{1}{2}, \frac{1}{12}, \frac{1}{30}, \frac{1}{56}, \text{_____, } \frac{1}{132}, \text{_____, _____}$

解：



回家作業



1. (89 學測試題)

將自然數按下列規律排列，每一列比前一列多一個數，如下表所示：



1 列	1
2 列	2, 3
3 列	4, 5, 6
4 列	7, 8, 9, 10
5 列	11, 12, 13, 14, 15
...	

試問第 100 列第 3 個數是多少？



1. 4953

主題 2 等差數列

MZKH



【觀念一】等差數列 (arithmetic progression)

(1) 等差數列又稱 _____，以 _____ 表示

【觀念二】等差數列一般式

(1) $\langle a_n \rangle$ 成等差數列： $a_1 \quad a_2 \quad a_3 \quad \cdots \quad a_{n-1} \quad a_n$
 $\quad \quad \quad \swarrow \quad \quad \swarrow \quad \quad \quad \swarrow$
 $\quad \quad \quad d \quad \quad d \quad \quad \quad d$

(2) 等差數列一般項： $a_n = a_1 + (n-1)d = \boxed{\quad}$

$$\text{《說明》 } a_2 - a_1 = d$$

$$a_3 - a_2 = d$$

$$a_4 - a_3 = d$$

$\vdots$

$$\begin{array}{r} +) \quad a_n - a_{n-1} = d \\ \hline a_n - a_1 = (n-1)d \end{array}$$

$$\therefore a_n = a_1 + (n-1)d$$

【觀念三】等差中間項性質

$$(1) \quad a_1 + a_2 + a_3 =$$

$$(2) \quad a_1 + a_2 + a_3 + a_4 + a_5 =$$

$$(3) \quad a_1 + a_2 + a_3 + a_4 + a_5 + a_6 + a_7 =$$

$$(4) \quad a_1 + a_3 + a_5 + a_7 + a_9 =$$

$$(5) \quad a_1 + a_3 + a_5 + a_7 + a_9 + a_{11} =$$

$$(6) \quad a_2 + a_4 + a_6 + a_8 + a_{10} + a_{12} =$$

【觀念四】公差 d 求法

$$(1) \begin{cases} a_m = a_1 + (m-1)d \\ a_n = a_1 + (n-1)d \end{cases} \Rightarrow a_m - a_n = (m-n)d$$
$$\Rightarrow d = \boxed{\frac{a_m - a_n}{m - n}} \text{ (兩項求公差 } d \text{)}$$

【觀念五】等差數列遞迴式

$$(1) \langle a_n \rangle \text{ 成等差} \Rightarrow \boxed{a_{n+1} = a_n + d \quad (n \in \mathbb{N})}$$

$$\text{或} \quad \boxed{a_n = a_{n-1} + d \quad (n \in \mathbb{N}, n \geq 2)}$$

$$(2) \langle a_n \rangle \text{ 成等差} \Rightarrow \boxed{a_{n+1} - a_n = d \quad (n \in \mathbb{N})}$$

$$\text{或} \quad \boxed{a_n - a_{n-1} = d \quad (n \in \mathbb{N}, n \geq 2)}$$

例 1. (能力指標：知一般項比求和比)

二個等差數列，第 n 項之比為 $(2n+3):(6n+4)$ ，求前 9 項和之比。

$$\text{解：} \frac{S_9}{S'_9} = \frac{a_1 + a_2 + a_3 + a_4 + a_5 + a_6 + a_7 + a_8 + a_9}{b_1 + b_2 + b_3 + b_4 + b_5 + b_6 + b_7 + b_8 + b_9} =$$

ZBDZ



例 2. (能力指標：知和比求一般項比)

二個等差數列，前 n 項和之比為 $(7n+2):(n+3)$ ，求其第 3 項之比值。



解： $\frac{a_3}{b_3} = \frac{+a_3 +}{+b_3 +} =$

例 3. (能力指標：共同項問題)

$a_n = 4n+1$, $b_n = 3n+2$, $n \in \mathbb{N}$ ，求共同項 _____。



解： 1° $\langle a_n \rangle = \langle 5, 9, 13, 17, 21, \dots \rangle$

$\langle b_n \rangle = \langle 5, 8, 11, 14, 17, \dots \rangle$

共同項 $\langle c_n \rangle = \langle 5, 17, 29, \dots \rangle$

2° $c_1 = 5, d = 12$

(共同項公差 12，是原來二公差之最小公倍數)

$\therefore c_n = 5 + (n-1)12 = 12n - 7$

例 4. (能力指標：等差極值)

設一個等差數列第 8 項是 18，第 20 項是 -174，

(1) 求 $a_1 = \underline{\hspace{2cm}}$ ， $d = \underline{\hspace{2cm}}$ ， $a_n = \underline{\hspace{2cm}}$ 。

(2) 第 n 項開始為負，求 $n = \underline{\hspace{2cm}}$ 。

(3) S_n 之最大值。

解： (1) $\begin{cases} a_1 + 7d = 18 \\ a_1 + 19d = -174 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a_1 = \\ d = \end{cases} \Rightarrow a_n =$

(2) $a_n < 0 \Rightarrow$

(3) S_n 最大值 =



例 5. (能力指標：倍數求和)

求 100 到 300 之間 7 的倍數的總和。

解： 1° 令 $n = 7k$ ($k \in \mathbb{N}$)

$$100 < 7k < 300 \Rightarrow \frac{100}{7} < k < \frac{300}{7} \Rightarrow k = 15 \sim 42 \text{ (共 28 項)}$$

$$2^\circ \text{ 總和} = \frac{(105 + 294)28}{2} = 5586$$



例 6. (能力指標：等差數列插值法)

(知道等差數列其中二項求另一項)

(1) $a_5 = 6$, $a_{10} = 31$, $a_{17} = \underline{\hspace{2cm}}$ 。

解： **法 1** $\begin{cases} a_5 = a_1 + 4d = 6 \\ a_{10} = a_1 + 9d = 31 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a_1 = \\ d = \end{cases} \Rightarrow a_{17} =$

法 2 $\begin{cases} a_5 = a_1 + 4d \\ a_{10} = a_1 + 9d \\ a_{17} = a_1 + 16d \end{cases} \Rightarrow d = \frac{a_{10} - a_5}{10 - 5} = \frac{a_{17} - a_{10}}{17 - 10} = \frac{a_{17} - a_5}{17 - 5}$

$\begin{array}{c} \bullet \quad \bullet \quad \bullet \\ \hline (5, 6) \quad (10, 31) \quad (17, y) \end{array} \Rightarrow$

(2) $a_m = n$, $a_n = m$, 求 $a_{m+n} = \underline{\hspace{2cm}}$ 。($m, n \in \mathbb{N}$)

解：

$\begin{array}{c} \bullet \quad \bullet \quad \bullet \\ \hline (m, n) \quad (n, m) \quad (m+n, y) \end{array} \Rightarrow$

(3) $-10 \sim 20$ 之間由小到大插入 13 個等差中項，求插入的第 6 項？

解：

$\begin{array}{c} \bullet \quad \bullet \quad \bullet \\ \hline (1, -10) \quad (7, y) \quad (15, 20) \end{array} \Rightarrow$



例 7. (能力指標：等差中間項性質)

有一個 101 項的等差數列 $a_1, a_2, a_3, \dots, a_{101}$ ，其和為 0，且 $a_{71} = 71$ ，問下列選項哪些正確？

- (1) $a_1 + a_{101} > 0$ (2) $a_2 + a_{100} < 0$ (3) $a_3 + a_{99} = 0$
(4) $a_{51} = 51$ (5) $a_1 < 0$

解：



例 8. (能力指標：等差重要證明題)

$\langle a_n \rangle$ 成等差數列， $p, q, r \in \mathbb{N}$ ， $a_p = x$ ， $a_q = y$ ， $a_r = z$ ，
求 $x(q-r) + y(r-p) + z(p-q) =$ _____。

解：





回家作業



1. 在 3 與 100 之間插入 $a_1, a_2, \dots, a_8$ 八個數，使它們形成 10 項的等差數列，求 $a_5 = ?$



2. 有一直角三角形之三邊的長構成等差數列，試證：這個直角三角形三邊長的比必為 3:4:5。

3. 設 $\langle a_n \rangle$ 是一等差數列，且 $a_3 = 56, a_{10} = -7$

(1) 試求 a_{23} 與 a_{37} 。

(2) 設這等差數列的前 n 項總和是 S_n ，當 S_n 有最大值時，試求 n 的值。

4. 在 1 與 999 之間插入 n 項，使其成一等差數列，試問 n 至少是多少時，才會使這數列的總和超過 5000 呢？

簡 答

1. $56\frac{8}{9}$ 2. 見詳解 3. (1) -124 與 -250 (2) 9 4. 9



回家作業



5. 設實數 a, b, c 成等差數列，其中 $a \neq 0$ ，試證方程式 $ax^2 + 2bx + c = 0$ 兩根均為實根。

6. 一等差數列 $a_1, a_2, a_3, \dots$ ，如果 $a_4 = -9$ ， $a_{10} = 3$ ，求 a_{20} ，以及 $a_1 + a_2 + a_3 + \dots + a_n > 100$ 的最小正整數 n ？

7. 有一等差數列，已知第 i 項為 j^2 ，第 j 項為 i^2 ，且 $i \neq j$ ，求第 $i+j$ 項為何？



5. 見詳解 6. $a_{20} = 23$ $n = 21$ 7. $-ij$



回家作業



8. (103 學測試題)

設 $a_1 = 1$ 且 $a_1, a_2, a_3, \dots$ 為等差數列。請選出正確的選項。

- (1) 若 $a_{100} > 0$ ，則 $a_{1000} > 0$ (2) 若 $a_{100} < 0$ ，則 $a_{1000} < 0$
(3) 若 $a_{1000} > 0$ ，則 $a_{100} > 0$ (4) 若 $a_{1000} < 0$ ，則 $a_{100} < 0$
(5) $a_{1000} - a_{10} = 10(a_{100} - a_1)$



8. (2)(3)(5)

主題 3 等比數列

TJBN



【觀念一】等比數列 (geometric progression)

(1) 等比數列又稱 _____，以 _____ 表示

【觀念二】等比數列一般項

(1) $\langle a_n \rangle$ 成等比數列， $a_1 \swarrow a_2 \swarrow a_3 \cdots \cdots a_{n-1} \swarrow a_n$
 $r \quad r \quad r$

(2) 等比數列一般項： $a_n = \boxed{a_1 r^{n-1}} = \boxed{\phantom{a_1 r^{n-1}}} \quad (r \neq 0)$

《說明》

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{a_2}{a_1} = r \\ \frac{a_3}{a_2} = r \\ \vdots \\ \frac{a_n}{a_{n-1}} = r \end{array} \right.$$

將上面 $n-1$ 式相乘得 $a_n = a_1 r^{n-1}$

【觀念三】公比 r 求法

(1) $\begin{cases} a_m = a_1 r^{m-1} \\ a_n = a_1 r^{n-1} \end{cases} \Rightarrow \boxed{\frac{a_m}{a_n} = r^{m-n}}$

【觀念四】等比數列遞迴式

(1) $\langle a_n \rangle$ 成等比 $\Rightarrow \boxed{a_{n+1} = a_n \times r \quad (n \in \mathbb{N})}$ 或 $\boxed{a_n = a_{n-1} \times r \quad (n \in \mathbb{N}, n \geq 2)}$

(2) $\langle a_n \rangle$ 成等比 $\Rightarrow \boxed{\frac{a_{n+1}}{a_n} = r \quad (n \in \mathbb{N})}$ 或 $\boxed{\frac{a_n}{a_{n-1}} = r \quad (n \in \mathbb{N}, n \geq 2)}$

例 1. (能力指標：等比與 Δ)

三角形三邊長成等比數列，且最小邊長為 1，公比為 r ，若此三角形周長 L (1) 求公比 r 範圍 (2) 求 L 範圍



解：(1) 令三邊 $1, r, r^2$ ($r \geq 1$)

$$\Rightarrow \begin{cases} r \geq 1 \\ 1+r > r^2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} r \geq 1 \\ r^2 - r - 1 < 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} r \geq 1 \\ \frac{1-\sqrt{5}}{2} < r < \frac{1+\sqrt{5}}{2} \end{cases}$$

$$\Rightarrow 1 \leq r < \frac{1+\sqrt{5}}{2}$$

$$(2) 1^\circ L = r^2 + r + 1 = \left(r + \frac{1}{2}\right)^2 + \frac{3}{4}$$

2°

例 2. (能力指標：等差、等比混合)

x, a, b, c, y 成等差數列， m, a, c, d, n 成等比數列，
試以 b, y 表示 n 。



解：

例 3. (能力指標：等差、等比混合)

設有三數成等差數列，其和為 36，若各項依次加 1, 4, 43 後，
則成等比數列，試求此三數？

解：



例 4. (能力指標：等比數列)

設有三數成等比數列，其和為 28，平方和為 336，求此數列？

解：



例 5. (能力指標：等比重要證明題)

$\langle a_n \rangle$ 成等比數列， $p, q, r \in \mathbb{N}$ ， $a_p = x$ ， $a_q = y$ ， $a_r = z$ ，求

$$x^{q-r} \cdot y^{r-p} \cdot z^{p-q} = \underline{\hspace{2cm}}。$$



解：1°
$$\begin{cases} x = a_p = a_1 R^{p-1} \\ y = a_q = a_1 R^{q-1} \\ z = a_r = a_1 R^{r-1} \end{cases} \quad (R \text{ 為公比})$$

$$\begin{aligned} 2^\circ \quad x^{q-r} \times y^{r-p} \times z^{p-q} &= (a_1 \cdot R^{p-1})^{q-r} \cdot (a_1 \cdot R^{q-1})^{r-p} \cdot (a_1 \cdot R^{r-1})^{p-q} \\ &= a_1^{q-r+r-p+p-q} \times R^{(p-1)(q-r)+(q-1)(r-p)+(r-1)(p-q)} \\ &= a_1^0 \times R^{pq-pr+qr-qp+rp-rq-q+r-r+p-p+q} \\ &= a_1^0 \times R^0 = 1 \end{aligned}$$



回家作業



1. 在等比數列 $\langle a_n \rangle$ 中，已知 $a_1 + a_3 = 5$ ， $a_2 + a_4 = 10$ ，求首項 a_1 及公比 r 。 BDZF



2. 有一等比實數數列 $\langle a_n \rangle$ ，已知 $a_5 = 48$ ， $a_8 = 384$ ，求公比 r 。

3. 設 a, b, c, d 四正數成等比數列，若 $a + d = 3$ ， $b + c = 2$ ，試求其公比。

4. 設 $\langle a_n \rangle$ 是等比數列。若 $a_3 = 2$ ， $a_7 = 6$ ，則 $a_{15} = \underline{\hspace{2cm}}$ 。



1. $a_1 = 1, r = 2$ 2. $r = 2$ 3. $r = 2$ 或 $\frac{1}{2}$ 4. 54



回家作業



5. 瓶內裝滿酒精，用去 $\frac{1}{3}$ 後，將水加滿；第 2 次又用去 $\frac{1}{3}$ 後，再用水加滿，如此連續五次，則最後瓶內的酒精成分為原來的多少？

6. 設 $\langle a_n \rangle$ 是等比數列。若 $a_2 + a_5 = 18$ ， $a_3 \cdot a_4 = 45$ ，則 $a_6 =$ _____。



5. $\frac{32}{243}$

6. $15\sqrt[3]{5}$ 或 $\frac{3}{\sqrt[3]{5}}$



回家作業



7. (84 學測試題)

假設某鎮每年的人口數逐年成長，且成一等比數列。已知此鎮十年前有 25 萬人，現在有 30 萬人，那麼二十年後，此鎮人口應有 _____ 萬人。(求到小數點後一位)

8. (87 學測試題)

在等比數列 $\langle a_n \rangle$ 中，
$$\begin{cases} a_1 = 1 \\ a_4 = 2 - \sqrt{5} \\ a_{n+2} = a_{n+1} + a_n \end{cases}, n \geq 1, \text{ 則 } \langle a_n \rangle \text{ 的公比} = \underline{\hspace{2cm}}。$$



7. 43.2 8. $\frac{1-\sqrt{5}}{2}$



回家作業



9. (91 學測試題)

某公司民國 85 年營業額為 4 億元，民國 86 年營業額為 6 億元，該年的成長率為 50%，87，88，89 三年的成長率皆相同，且民國 89 年營業額為 48 億元。則該公司 89 年的成長率為 _____ %。

10. (95 學測試題)

假設實數 a_1, a_2, a_3, a_4 是一個等差數列，且滿足 $0 < a_1 < 2$ 及 $a_3 = 4$ ，若定義 $b_n = 2^{a_n}$ ，則以下哪些選項是對的？

- (1) b_1, b_2, b_3, b_4 是一個等比數列 (2) $b_1 < b_2$ (3) $b_2 > 4$
(4) $b_4 > 32$ (5) $b_2 \times b_4 = 256$



9. 100 10. (1)(2)(3)(4)(5)



回家作業



11. (97 學測試題)

已知 a_1, a_2, a_3 為一等差數列，而 b_1, b_2, b_3 為一等比數列，且此六數皆為實數。試問下列哪些選項是正確的？

- (1) $a_1 < a_2$ 與 $a_2 > a_3$ 可能同時成立 (2) $b_1 < b_2$ 與 $b_2 > b_3$ 可能同時成立
(3) 若 $a_1 + a_2 < 0$ ，則 $a_2 + a_3 < 0$ (4) 若 $b_1 b_2 < 0$ ，則 $b_2 b_3 < 0$
(5) 若 b_1, b_2, b_3 皆為正整數且 $b_1 < b_2$ ，則 b_1 整除 b_2



11. (2)(4)



回家作業



12. (107 學測試題)

某貨品為避免因成本變動而造成售價波動太過劇烈，當週售價相對於前一週售價的漲跌幅定為當週成本相對於前一週成本的漲跌幅的一半。例如下表中第二週成本上漲 100%，所以第二週售價上漲 50%，依此定價方式以及下表的資訊，試選出正確的選項。

【註：成本漲跌幅 = $\frac{\text{當週成本} - \text{前週成本}}{\text{前週成本}}$ ，售價漲跌幅 = $\frac{\text{當週售價} - \text{前週售價}}{\text{前週售價}}$ 。】

	第一週	第二週	第三週	第四週
成本	50	100	50	90
售價	120	180	x	y

- (1) $120 = x < y < 180$ (2) $120 < x < y < 180$ (3) $x < 120 < y < 180$
(4) $120 = x < 180 < y$ (5) $120 < x < 180 < y$



12. (5)



主題 4 等差、等比與調和中項



【觀念一】等差中項

(1) a, x, b 成等差， x 稱 a, b 等差中項 (算術中項)

$$(2) \text{ 條件} \Rightarrow \boxed{x = \frac{a+b}{2}} \quad (x-a = b-x \Rightarrow x = \frac{a+b}{2})$$

【觀念二】等比中項

(1) a, x, b 成等比， x 稱 a, b 等比中項 (幾何中項)

$$(2) \text{ 條件} \Rightarrow \boxed{x = \pm\sqrt{ab}} \quad \left(\frac{x}{a} = \frac{b}{x} \Rightarrow x^2 = ab \Rightarrow x = \pm\sqrt{ab}\right)$$

【觀念三】調和中項

(1) a, x, b 成調和數列，即 $\frac{1}{a}, \frac{1}{x}, \frac{1}{b}$ 成等差

x 稱為 a, b 調和中項

$$(2) \text{ 條件} \Rightarrow x = \frac{2ab}{a+b}$$
$$\left(\because \frac{1}{a} + \frac{1}{b} = 2 \cdot \frac{1}{x} \Rightarrow \frac{a+b}{ab} = \frac{2}{x} \Rightarrow x = \frac{2ab}{a+b}\right)$$

1. (能力指標：A ≥ G ≥ H)

a, b 為二正數， $A = \frac{a+b}{2}$ ， $G = \sqrt{ab}$ ， $H = \frac{2ab}{a+b}$

(1) 證明 $A \geq G$ (稱算幾不等式)

(2) 證明 $G \geq H$

(3) 利用圖形說明

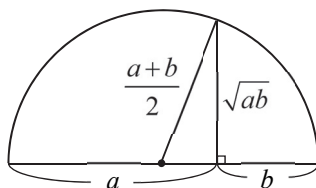
解：(1) $A - G = \frac{a+b}{2} - \sqrt{ab} = \frac{a+b-2\sqrt{ab}}{2} = \frac{(\sqrt{a}-\sqrt{b})^2}{2} \geq 0$

$\Rightarrow A \geq G$

(2) $G - H = \sqrt{ab} - \frac{2ab}{a+b} = \frac{(a+b)\sqrt{ab} - 2ab}{a+b}$
 $= \frac{\sqrt{ab}(a+b-2\sqrt{ab})}{a+b} = \frac{\sqrt{ab}(\sqrt{a}-\sqrt{b})^2}{a+b} \geq 0$

$\Rightarrow G \geq H$

(3)



主題 5 群數列

LHEZ



【觀念一】群數列

(1) 群數列是指數列以群體方式出現

【觀念二】群數列問題處理

(1) 觀察每一群體之出現規則

(2) 觀察每一群體項數

例 1. (能力指標：群數列)

數列 $1, 2, 2, 3, 3, 3, 4, 4, 4, 4, \dots$ ，求 S_{100} 。

解：

WVYB



例 2. (能力指標：群數列)

數列 $\frac{1}{1}, \frac{2}{1}, \frac{1}{2}, \frac{3}{1}, \frac{2}{2}, \frac{1}{3}, \frac{4}{1}, \frac{3}{2}, \frac{2}{3}, \frac{1}{4}, \dots$ ，則 $\frac{5}{14}$ 為第幾項？

解：1° $(\frac{1}{1}), (\frac{2}{1}, \frac{1}{2}), (\frac{3}{1}, \frac{2}{2}, \frac{1}{3}), (\frac{4}{1}, \frac{3}{2}, \frac{2}{3}, \frac{1}{4}), \dots$

2° $\frac{5}{14} : 5 + 14 = 19$

$\therefore \frac{5}{14}$ 落入第 _____ 群的第 _____ 項

MLNB



例 3. (能力指標：群數列應用)

自然數由小到大排列，扣除 2, 3, 5 的倍數，得一數列
 $\langle 1, 7, 11, 13, 17, 19, 23, 29, \dots \rangle$ ，求 $S_{24} = ?$

解：





回家作業



1. 將自然數 $1, 2, 3, 4, \dots$ 用括號分組如下 (第 k 組有 k 個數)：

$(1), (2, 3), (4, 5, 6), (7, 8, 9, 10), \dots$ 。

先找出它的規律，再回答下列問題：

- (1) 第 10 組 (第 10 個括號) 內的第一個數是多少？
(2) 第 10 組內，全體自然數的總和是多少？



2. 將等比數列 $1, 2, 4, 8, 16, 32, 64, \dots$ 分群為 $(1), (2, 4), (8, 16, 32), (64, \dots)$

使第 k 群有 k 個項，則第 n 群的第一個數為何？第 n 群的總和為何？

說明：(1) 稱為第一群，第一群中只有一個項；

(2, 4) 稱為第二群，第二群中有二個項；

(8, 16, 32) 稱為第三群，第三群中有三個項；

以此類推，第 k 群中有 k 個項。



1. (1) 46 (2) 505 2. $2^{\frac{n(n-1)}{2}}$; $2^{\frac{n(n-1)}{2}} \cdot (2^n - 1)$



1. 由級數總和推出一般項

(1) 一般項：

由級數 $\begin{cases} S_n = a_1 + a_2 + \cdots + a_{n-1} + a_n \\ S_{n-1} = a_1 + a_2 + \cdots + a_{n-1} \end{cases}$ 可推得數列一般項表達法：

$$a_n = \left\{ \begin{array}{l} \end{array} \right.$$

(2) 重要步驟：

- ① 給定 S_n 必先獨立處理首項 a_1 。
- ② 求解一般項 a_n ，最後必須檢查 $n=1$ 及 $n \geq 2$ 是否可合併。

2. 由特殊級數總和推出一般項

(1) 由連乘積總和推出一般項：

$$\text{若 } S_n = a_1 \cdot a_2 \cdot a_3 \cdots a_{n-1} \cdot a_n, \text{ 則 } \begin{cases} S_1 = a_1 \\ a_n = \frac{S_n}{S_{n-1}} \quad (n \geq 2) \end{cases}。$$

(2) 由平方總和推出一般項：

$$\text{若 } S_n = a_1^2 + a_2^2 + \cdots + a_{n-1}^2 + a_n^2, \text{ 則 } \begin{cases} S_1 = a_1^2 \\ a_n^2 = S_n - S_{n-1} \quad (n \geq 2) \end{cases}。$$

(3) 由加權總和推出一般項：

$$\text{若 } S_n = a_1 + 2a_2 + 3a_3 + \cdots + na_n = n(n+1)(n+2), \text{ 則 } \begin{cases} S_1 = a_1 \\ na_n = S_n - S_{n-1} \quad (n \geq 2) \end{cases}。$$

例 1

數列 $\{a_n\}$ 前 n 項總和為 $S_n = n^2 + 3n + 1$ ，求一般項 a_n 。

解 1° $a_1 = S_1 = 5$

2° $a_n = S_n - S_{n-1}$

$$= (n^2 + 3n + 1) - [(n-1)^2 + 3(n-1) + 1] = 2n + 2 \quad (n \geq \quad)$$

3° 由 1° 2° 可知 $a_n = \begin{cases} 5, & n=1 \\ 2n+2, & n \geq 2 \end{cases}$



例 2

數列 $\{a_n\}$ 前 n 項總和為 $S_n = n^2 + 3n$ ，求一般項 a_n 。

解 1° $a_1 = S_1 = 4$

2° $a_n = S_n - S_{n-1}$

$$= (n^2 + 3n) - [(n-1)^2 + 3(n-1)] = 2n + 2 \quad (n \geq \quad)$$

3° 由 1° 2° 可知 $a_n = \begin{cases} 4, & n=1 \\ 2n+2, & n \geq 2 \end{cases}$



▣ [興大附中]

設數列 $\{a_n\}$ 的前 n 項總和為 $n^2 + 1$ ，其中 n 為正整數，求 $a_1 + a_{2021}$ 之值。

(1) 4040

(2) 4041

(3) 4042

(4) 4043

(5) 以上皆非。

答：(4)

例 3

設 $a_1 + 2a_2 + 3a_3 + \cdots + na_n = n(n+1)(n+2)$ ，試求 a_n 。



1° $n=1$ 時，代入得 $a_1 = 1 \cdot 2 \cdot 3 = 6$

$$2^\circ \quad a_1 + 2a_2 + 3a_3 + \cdots + (n-1)a_{n-1} + na_n = n(n+1)(n+2)$$

$$-) \quad a_1 + 2a_2 + 3a_3 + \cdots + (n-1)a_{n-1} = (n-1)(n)(n+1)$$

$$na_n = 3n(n+1)$$

$$\therefore a_n = 3(n+1), \quad \forall n \geq 2$$

3° 由 1° 2° 可知 $a_n = 3(n+1), \forall n \in \mathbb{N}$

▣ [武陵高中]

設數列 $\langle a_n \rangle$ 中，對於所有的正整數 n ， $a_1 + 2a_2 + 3a_3 + \cdots + na_n = 3^{n+1} \cdot (n^2 + n)$ ，則此數列的一般項通式 $a_n = \underline{\hspace{2cm}}$ 。

答： $3^n \cdot (2n+4)$

XVWB



主題 7 如何求 a_n

DCAZ



【觀念一】規則數列一般式

(1) 等差數列： $a_n =$

(2) 等比數列： $a_n =$

【觀念二】 S_n 理論

(1) $S_n = a_1 + a_2 + \cdots + a_n$

(2) $a_1 = S_1$

(3) $a_n = S_n - S_{n-1}$ (注意 n 有限制 _____)

【觀念三】遞迴關係

(1) $a_{n+1} = a_n + f(n)$ (累加法遞迴)

(2) $a_{n+1} = a_n \cdot f(n)$ (累乘法遞迴)

(3) $a_{n+1} = pa_n + q \Rightarrow a_n = \boxed{A + Bp^n}$ ($p \neq 1$)

《說明》 $1^\circ a_n = pa_{n-1} + q \xrightarrow{\text{左右同除 } p^n} \frac{a_n}{p^n} = \frac{a_{n-1}}{p^{n-1}} + \frac{q}{p^n}$

$$2^\circ \begin{cases} \frac{a_2}{p^2} = \frac{a_1}{p^1} + \frac{q}{p^2} \\ \frac{a_3}{p^3} = \frac{a_2}{p^2} + \frac{q}{p^3} \\ \vdots \\ \frac{a_n}{p^n} = \frac{a_{n-1}}{p^{n-1}} + \frac{q}{p^n} \end{cases}$$

上面 $n-1$ 個式子相加得

$$\begin{aligned}\frac{a_n}{p^n} &= \frac{a_1}{p^1} + q\left(\frac{1}{p^2} + \frac{1}{p^3} + \cdots + \frac{1}{p^n}\right) \\ \Rightarrow a_n &= a_1 p^{n-1} + q(1 + p + \cdots + p^{n-2}) \\ \Rightarrow a_n &= a_1 p^{n-1} + q \cdot \frac{(1-p)(1+p+\cdots+p^{n-2})}{1-p} \\ \Rightarrow a_n &= a_1 p^{n-1} + q \cdot \frac{1-p^{n-1}}{1-p} \\ \Rightarrow a_n &= a_1 p^{n-1} + \frac{q}{1-p} - \frac{qp^{n-1}}{1-p} \\ \Rightarrow a_n &= \frac{q}{1-p} + \left[\frac{a_1}{p} - \frac{q}{p(1-p)}\right]p^n \\ \Rightarrow a_n &= A + Bp^n\end{aligned}$$

【觀念四】階差理論

$$(1) \begin{array}{ccccccc} a_1 & & a_2 & & a_3 & \cdots & \cdots & a_{n-1} & & a_n \\ & \swarrow & & \swarrow & & & & & \swarrow & \\ & b_1 & & b_2 & & \cdots & \cdots & & b_{n-1} & \end{array}$$

$$(2) a_n = a_1 + (b_1 + b_2 + \cdots + b_{n-1}) =$$

例 1. (能力指標： S_n 理論)



$$n \in \mathbb{N}, S_n = n^2 + 3n + 1, \text{ 求 } a_n \text{。}$$

解： $1^\circ a_1 = S_1 = 5$

$$2^\circ a_n = S_n - S_{n-1} = (n^2 + 3n + 1) - [(n-1)^2 + 3(n-1) + 1] = 2n + 2 \quad (n \geq \quad)$$

$$\therefore a_n = \begin{cases} & (n=1) \\ & (n \geq 2) \end{cases}$$

例 2. (能力指標： S_n 理論)



$$n \in \mathbb{N}, S_n = n^2 + 3n, \text{ 求 } a_n \text{。}$$

解： $1^\circ a_1 = S_1 = 4$

$$2^\circ a_n = S_n - S_{n-1} = (n^2 + 3n) - [(n-1)^2 + 3(n-1)] = 2n + 2 \quad (n \geq \quad)$$

$$\therefore a_n = \begin{cases} & (n=1) \\ & (n \geq 2) \end{cases} \Rightarrow \text{二者可合而為一得 } a_n =$$

例 3. (能力指標： S_n 理論)

$n \in \mathbb{N}$, $a_1 + 2a_2 + \cdots + na_n = n(n+1)(n+2)$, 求 a_n 。

解：1° $a_1 = 1 \cdot 2 \cdot 3 = 6$

$$2^\circ \begin{cases} a_1 + 2a_2 + \cdots + (n-1)a_{n-1} + na_n = n(n+1)(n+2) \\ a_1 + 2a_2 + \cdots + (n-1)a_{n-1} = (n-1)n(n+1) \end{cases}$$

$$\begin{aligned} \text{二式相減：} \quad na_n &= n(n+1)(n+2) - (n-1)n(n+1) \\ &= 3n(n+1) \end{aligned}$$

$$\Rightarrow a_n = 3n + 3 \quad (n \geq 2)$$

$$3^\circ a_n = \begin{cases} 6 & (n=1) \\ 3n+3 & (n \geq 2) \end{cases}$$

可以合而為一得 $a_n = 3n + 3, n \in \mathbb{N}$



例 4. (能力指標： S_n 理論)

$n \in \mathbb{N}$, $S_n = n^2 + 3n + 1$, 求 $\frac{1}{a_1 a_2} + \frac{1}{a_2 a_3} + \frac{1}{a_3 a_4} + \cdots = ?$

解：1° $a_1 = S_1 = 5$

$$2^\circ a_n = S_n - S_{n-1} = (n^2 + 3n + 1) - [(n-1)^2 + 3(n-1) + 1] = 2n + 2 \quad (n \geq 2)$$

$$\begin{aligned} 3^\circ \frac{1}{a_1 a_2} + \frac{1}{a_2 a_3} + \frac{1}{a_3 a_4} + \cdots &= \frac{1}{5 \times 6} + \frac{1}{6 \times 8} + \frac{1}{8 \times 10} + \cdots \\ &= \frac{1}{30} + \frac{1}{2} \left[\frac{2}{6 \times 8} + \frac{2}{8 \times 10} + \cdots \right] \\ &= \frac{1}{30} + \frac{1}{2} \left[\frac{1}{6} - \frac{1}{8} + \frac{1}{8} - \frac{1}{10} + \cdots \right] \\ &= \frac{1}{30} + \frac{1}{12} = \frac{2+5}{60} = \frac{7}{60} \end{aligned}$$



例 5. (能力指標：累加遞迴)

$a_1 = 1, a_{n+1} = a_n + (n+1)$, 求 a_n ?

解：
$$\begin{cases} a_2 = a_1 + (1+1) \\ a_3 = a_2 + (2+1) \\ \vdots \\ a_n = a_{n-1} + [(n-1)+1] \end{cases}$$

將上面式子累加得 $a_n =$



例 6. (能力指標：累乘遞迴)

$n \in \mathbb{N}, a_1 = 1, a_{n+1} = a_n \cdot \frac{n+1}{n}$, 求 a_n ?

解：
$$\begin{cases} a_2 = a_1 \times \frac{2}{1} \\ a_3 = a_2 \times \frac{3}{2} \\ \vdots \\ a_n = a_{n-1} \times \frac{n}{n-1} \end{cases}$$

將上面式子累乘得 $a_n =$



例 7. (能力指標：二項遞迴)

$$n \in \mathbb{N}, a_1 = 1, a_{n+1} = 2a_n + 1, \text{求 } a_n.$$

解：



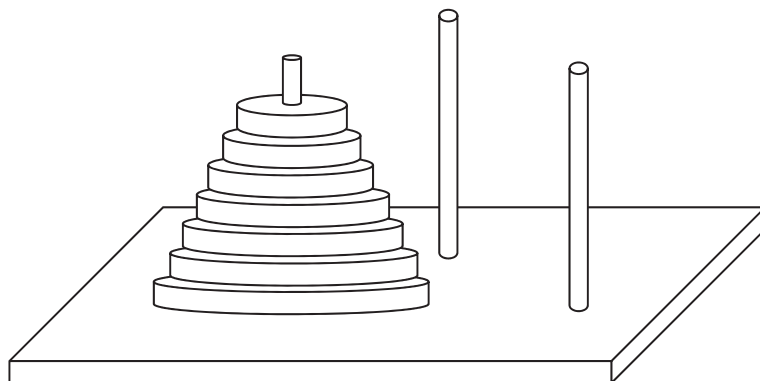
例 8. (能力指標：河內塔問題)

ANNS



傳說在古老的印度，有一座神廟，據說它是宇宙的中心。神廟中放置了一塊上面插有三根長木釘的木板，在其中的一根木釘上，由上至下被放置了 64 片直徑由小至大的圓環型金屬片。古印度教的天神指示祂的僧侶們按以下規則將 64 片的金屬片移至三根木釘的其中一根上：

- ① 在每次的移動中，只能搬移一片金屬片；
 - ② 過程中必須保持金屬片小的在上，大的在下。
- (1) 試找出其遞迴關係式。
- (2) 需搬動幾次，才可成功？



解：

例 9. (能力指標：正多邊形陣列)

用大小一樣的鋼珠可以排成正三角形、正方形與正五邊形陣列，其排列的規律如下圖所示：



	正三角形陣列	正方形陣列	正五邊形陣列
每邊 1 個鋼珠			
每邊 2 個鋼珠			
每邊 3 個鋼珠			
每邊 4 個鋼珠			

已知 m 個鋼珠恰好可以排成每邊 n 個鋼珠的正三角形陣列與正方形陣列各一個；且知若用這 m 個鋼珠去排成每邊 n 個鋼珠的正五邊形陣列時，就會多出 9 個鋼珠。則 $n = \underline{\hspace{2cm}}$ ， $m = \underline{\hspace{2cm}}$ 。

解：

例 10. (能力指標：階差)

數列 $\langle a_n \rangle = \langle 1, 2, 5, 10, 17, 26, \dots \rangle$ ，求 $a_n = ?$

解： 1° 本數列發現不是規則數列

$$2^\circ \quad 1, \quad \begin{array}{c} \vee \\ 1 \end{array} 2, \quad \begin{array}{c} \vee \\ 3 \end{array} 5, \quad \begin{array}{c} \vee \\ 5 \end{array} 10, \quad \begin{array}{c} \vee \\ 7 \end{array} 17, \quad \begin{array}{c} \vee \\ 9 \end{array} 26, \quad \dots \quad \dots \quad a_n$$

... ..

其第一階差為等差數列

$$3^\circ \quad a_n = 1 + (1 + 3 + 5 + 7 + 9 + \dots + \text{第 } n-1 \text{ 項})$$

$$= 1 +$$





回家作業



1. 設 $S_n = a_1 + a_2 + \cdots + a_n$ ，如果 $S_n = 5n^2 + 3n$ ，求 a_1 ， a_5 的值及第 k 項 a_k (表成 k)。



2. 設一數列 $\langle a_n \rangle$ 其前 n 項總和恆為 $n^2 + 2n$ ，試證 $\langle a_n \rangle$ 為一等差數列。



1. $a_1 = 8$, $a_5 = 48$, $a_k = 10k - 2$ 2. 見詳解

陳立數學~47~絕對智慧
尊重著作權所有・盜翻印法律追究



回家作業



3. (91 學測試題)

一機器狗每一秒鐘前進或者後退一步，程式設計師讓機器狗以前進 3 步，然後再後退 2 步的規律移動。如果將此機器狗放在數線的原點，面向正的方向，以 1 步的距離為 1 單位長。令 $P(n)$ 表示第 n 秒時機器狗所在位置的坐標，且 $P(0) = 0$ 。那麼下列選項何者為真？

- (1) $P(3) = 3$ (2) $P(5) = 1$ (3) $P(10) = 2$
(4) $P(101) = 21$ (5) $P(103) < P(104)$



3. (1)(2)(3)(4)



回家作業



4. (99 學測試題)

設 $a_1, a_2, \dots, a_k, \dots$ 為一實數數列，且對所有的正整數 n 滿足

$$a_{n+1} = \frac{n(n+1)}{2} - a_n。請問下列哪些選項是正確的？$$

- (1) 如果 $a_1 = 1$ ，則 $a_2 = 1$
- (2) 如果 a_1 是整數，則此數列的每一項都是整數
- (3) 如果 a_1 是無理數，則此數列的每一項都是無理數
- (4) $a_2 \leq a_4 \leq \dots \leq a_{2n} \leq \dots$ (n 為正整數)
- (5) 如果 a_k 是奇數，則 $a_{k+2}, a_{k+4}, \dots, a_{k+2n}, \dots$ 都是奇數 (n 為正整數)



4. (2)(3)(4)



回家作業



5. (104 學測試題)

每週同一時間點記錄某植物的成長高度，連續五週的數據為

$$a_1 = 1, a_2 = 2, a_3 = 6, a_4 = 15, a_5 = 31。$$

請問此成長高度數列滿足下列選項中哪一個式子？

- (1) $a_{t+1} = 3a_t - 1, t = 1, 2, 3, 4$ (2) $a_t = t!, t = 1, 2, 3, 4, 5$
(3) $a_{t+1} = a_t + t^2, t = 1, 2, 3, 4$ (4) $a_t = 2^t - 1, t = 1, 2, 3, 4, 5$
(5) $a_{t+1} = ta_t + 1, t = 1, 2, 3, 4$

6. (106學測試題)

遞迴數列 $\langle a_n \rangle$ 滿足 $a_n = a_{n-1} + f(n-2)$ ，其中 $n \geq 2$ 且 $f(x)$ 為二次多項式。

若 $a_1 = 1, a_2 = 2, a_3 = 5, a_4 = 12$ ，則 $a_5 =$ _____。



5. (3) 6. 25

主題 8 數學歸納法

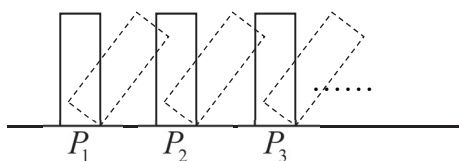
AGWB



【觀念一】數學歸納法第一原理 (後繼原理)

已知 $P_1, P_2, \dots, P_n, \dots$ 為一系列的命題

- (1) P_1 檢驗成立
- (2) 對任一自然數 k ，若 P_k 成立，則 P_{k+1} 亦成立，
則對任意自然數 n ， P_n 都成立
- (3) 概念圖示：



例 1. (能力指標：等式歸納)

證明： $1^2 + 2^2 + 3^2 + 4^2 + \dots + n^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}, n \in \mathbb{N}$

證：

XTNM



例 2. (能力指標：等式歸納)

證明 $1^2 - 2^2 + 3^2 - 4^2 + \cdots + (2n+1)^2 = (n+1)(2n+1)$, $n \in \mathbb{N}$

證： 1° 當 $n=1$ 時，左式 =

右式 =

$\therefore$ 左式 = 右式，原式成立

2° 設 $n=k$ ($k \in \mathbb{N}$) 時，原式成立

即 $1^2 - 2^2 + 3^2 - 4^2 + \cdots + (2k+1)^2 = (k+1)(2k+1)$

當 $n=k+1$ 時

左式 =

$\therefore$ 根據以上數學歸納法， $\forall n \in \mathbb{N}$ ，原式恆成立。

例 3. (能力指標：等式歸納)

證明 $1 \cdot n + 2(n-1) + 3(n-2) + \cdots + (n-1)2 + n \cdot 1 = \frac{n(n+1)(n+2)}{6}$,

$n \in \mathbb{N}$ 。

證： 1° 當 $n=1$ 時，左式 =

右式 =

$\therefore$ 左式 = 右式，原式成立

2° 設 $n=k$ ($k \in \mathbb{N}$) 時，原式成立

即 $1 \cdot k + 2(k-1) + 3(k-2) + \cdots + (k-1)2 + k \cdot 1 = \frac{k(k+1)(k+2)}{6}$

當 $n=k+1$ 時，左式 =

$\therefore$ 根據以上數學歸納法， $\forall n \in \mathbb{N}$ ，原式恆成立。



例 4. (能力指標：預測歸納)

對所有自然數 n ， $3^{2n+1} + 2^{n+2}$ 是某一個質數 p 的倍數，
試求出 p 並用數學歸納法證明之。

證：

∴ 根據以上數學歸納法， $\forall n \in \mathbb{N}$ ，原預測恆成立。

例 5. (能力指標：敘述歸納)

證明 $2^{8n+1} - 2^{4n}$ 的個位數字恆為 6 ($n \in \mathbb{N}$)

證： 1° 當 $n=1$ 時，原式 =

2° 設 $n=k$ ($k \in \mathbb{N}$) 時，原敘述成立

$$\text{即 } 2^{8k+1} - 2^{4k} = 10t + 6 \quad (t \in \mathbb{N})$$

當 $n=k+1$ 時，原式 =

∴ 根據以上數學歸納法， $\forall n \in \mathbb{N}$ ，原敘述恆成立。



例 6. (能力指標：遞迴預測歸納)

$$a_1 = 1, a_{n+1} = a_1 + \cdots + a_n, n \in \mathbb{N}$$

(1) 請預測 a_n 項 (用 n 表示)

(2) 利用數學歸納法證明預測結果是否正確？

解：



例 7. (能力指標：遞迴預測歸納)

$$\langle a_n \rangle \text{ 定義如下：} \begin{cases} a_1 = 0 \\ a_{n+1} = \frac{1+a_n}{3-a_n} \end{cases} \quad (n \in \mathbb{N})$$



- (1) 寫出前 5 項值
- (2) 歸納 a_n 結果 (用 n 表示)
- (3) 利用數學歸納法證明歸納結果是否正確？

解：



回家作業



1. 數列 $\langle a_n \rangle$ 滿足： $a_1 = 2$ ， $a_{n+1} = \frac{2}{3}a_n + 5$ ($n \in \mathbb{N}$)，令 $a'_n = a_{n+1} - a_n$ ，

(1) 試證 $\langle a'_n \rangle$ 是以 $\frac{2}{3}$ 為公比的等比數列。

(2) 求 a_n 。(用 n 表示)



2. 證明 $(n+1)(n+2)(n+3)\cdots(2n) = 2^n \cdot 1 \cdot 3 \cdot 5 \cdots (2n-1)$ ， $n \in \mathbb{N}$

3. 給了一個遞迴數列 $\langle a_n \rangle$ ： $a_1 = \sqrt{2}$ ， $a_{n+1} = \sqrt{2+a_n}$ ($n \in \mathbb{N}$)。試寫出 a_2 ， a_3 ， a_4 。

4. 設一數列 $\langle a_n \rangle$ 的首項 $a_1 = 1$ ，且滿足關係式 $a_n + a_{n+1} = 0$ ，試求此數列之一般項 a_n 。



1. (1) 見詳解 (2) $15 - 13(\frac{2}{3})^{n-1}$ 2. 見詳解

3. $a_2 = \sqrt{2+\sqrt{2}}$ ， $a_3 = \sqrt{2+\sqrt{2+\sqrt{2}}}$ ， $a_4 = \sqrt{2+\sqrt{2+\sqrt{2+\sqrt{2}}}}$ 4. $(-1)^{n-1}$



回家作業



5. 一數列 $\langle a_n \rangle$ 定義如下： $a_1 = 2$ ， $a_{n+1} = 2 - \frac{1}{a_n}$ ， $n \in \mathbb{N}$ 。試寫出一般項 a_n (以 n 的式子表示)，並檢驗你的答案。

6. 試利用數學歸納法證明：對任意正整數 n ，

$$1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \cdots + \frac{1}{2n-1} - \frac{1}{2n} = \frac{1}{n+1} + \frac{1}{n+2} + \cdots + \frac{1}{n+n}$$

7. 求 $\frac{1}{1 \cdot 2 \cdot 3} + \frac{1}{2 \cdot 3 \cdot 4} + \cdots + \frac{1}{n(n+1)(n+2)}$ 之值並用數學歸納法證明之。



5. $a_n = \frac{n+1}{n}$ ，驗證見詳解

6. 見詳解

7. $\frac{1}{4} - \frac{1}{2(n+1)(n+2)}$



回家作業



8. 遞迴數列 $\langle a_n \rangle$ 中， $a_1 = 1$ ， $a_2 = 3$ ， $a_{n+2} - 2a_{n+1} + a_n = 4$ ， $n \geq 1$ ，

則此數列 $\langle a_n \rangle$ 的前五項依次是_____。

9. 設級數 $a_1 + a_2 + \cdots + a_n = 2^{n+1} \cdot (n^2 - 2n)$ ，則

$a_1 =$ _____， $a_2 =$ _____， $a_{10} =$ _____， $a_n =$ _____。

10. 證明 $10^n + 3 \cdot 4^{n+2} + 5$ 恆為9的倍數($n \in \mathbb{N}$)。



8. 1, 3, 9, 19, 33

9. -4, 4, 99328, $2^n(n^2 - 3)$

10. 見詳解

數位 延伸閱讀



1. (能力指標：敘述歸納)

$\forall n \in \mathbb{N}$ ，證明 $\frac{n^3}{3} + \frac{n^2}{2} + \frac{n}{6} \in \mathbb{N}$ 恆成立。



證：1° 當 $n=1$ 時，原式 $= \frac{1}{3} + \frac{1}{2} + \frac{1}{6} = 1 \in \mathbb{N} \quad \therefore$ 原敘述成立

2° 設 $n=k$ ($k \in \mathbb{N}$) 時，原敘述成立

$$\text{即 } \frac{k^3}{3} + \frac{k^2}{2} + \frac{k}{6} = p \quad (p \in \mathbb{N})$$

$$\begin{aligned} \text{當 } n=k+1 \text{ 時，原式} &= \frac{(k+1)^3}{3} + \frac{(k+1)^2}{2} + \frac{(k+1)}{6} \\ &= \end{aligned}$$

$\therefore$ 根據以上數學歸納法， $\forall n \in \mathbb{N}$ ，原敘述恆成立。

2. (能力指標：命題歸納)

試依序回答下列各問題：



- (1) 試找出三個相異自然數 a_1, a_2, a_3 ，使得 a_1, a_2, a_3 都是 $a_1 + a_2 + a_3$ 之因數。(不必計算過程)
- (2) 承上一小題，再找一個相異自然數 a_4 ，使得這四個數均為它們的和 $a_1 + a_2 + a_3 + a_4$ 之因數。(不必計算過程)
- (3) 利用數學歸納法，證明：若 $n \in \mathbb{N}, n \geq 3$ ，則恆可找到 n 個相異自然數 $a_1, a_2, a_3, \dots, a_n$ ，使得 $a_1, a_2, a_3, \dots, a_n$ 這 n 個相異自然數都是它們的和 $a_1 + a_2 + a_3 + \dots + a_n$ 之因數。

解：(1) 取 $a_1 = 1, a_2 = 2, a_3 = 3$ ，則 $a_1 + a_2 + a_3 = 6$

則 a_1, a_2, a_3 均為 $a_1 + a_2 + a_3$ 之因數。

(2) 再取 $a_4 = 6$ ，則 $a_1 + a_2 + a_3 + a_4 = 12$

則 a_1, a_2, a_3, a_4 均為 $a_1 + a_2 + a_3 + a_4$ 之因數。

(3) 1° 當 $n=3$ 時，

取 $a_1 = 1, a_2 = 2, a_3 = 3$ ，則 $a_1 + a_2 + a_3 = 6$

則 a_1, a_2, a_3 均為 $a_1 + a_2 + a_3$ 之因數，故 $n=3$ 時原命題成立。

2° 設 $n=k (k \in \mathbb{N}, k \geq 3)$ 時原命題成立

即可找到 k 個相異自然數 $a_1, a_2, a_3, \dots, a_k$ ，使得

$$a_i \mid a_1 + a_2 + a_3 + \dots + a_k \quad (i=1, 2, 3, \dots, k)$$

$$\text{現取 } a_{k+1} = a_1 + a_2 + a_3 + \dots + a_k$$

$$\text{則 } a_1 + a_2 + a_3 + \dots + a_k + a_{k+1} = a_{k+1} + a_{k+1} = 2a_{k+1}$$

$$\Rightarrow a_{k+1} \mid a_1 + \dots + a_k + a_{k+1} \dots\dots\dots \textcircled{1}$$

$$\text{又 } a_1 + \dots + a_k + a_{k+1} = 2(a_1 + \dots + a_k)$$

$$\because a_i \mid a_1 + a_2 + \dots + a_k \Rightarrow a_i \mid 2(a_1 + a_2 + \dots + a_k)$$

$$\Rightarrow a_i \mid a_1 + a_2 + \dots + a_k + a_{k+1} \quad (i=1, 2, \dots, k) \dots\dots\dots \textcircled{2}$$

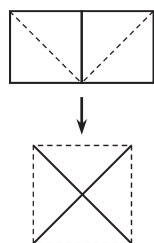
由① ②知 $a_i \mid a_1 + a_2 + a_3 + \dots + a_k + a_{k+1} \quad (i=1, 2, \dots, k+1)$

故對 $n=k+1$ 原命題亦成立

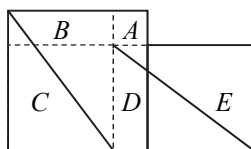
根據以上數學歸納法， $\forall n \in \mathbb{N}, n \geq 3$ ，原命題恆成立

3. (能力指標：命題歸納)

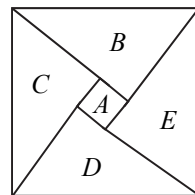
已知兩個正方形經過適當剪裁，可以拼成一個正方形，
如下圖所示：



兩正方形相同



兩正方形不同



試回答下列各問題：

- (1) 在已知任意兩個正方形經過適當剪裁，可以拼成一個正方形的前提下，試以文字說明任意三個正方形也可以經適當裁剪，拼成一個正方形。(不必畫出圖形)
- (2) 試以數學歸納法，證明：若 $n \in \mathbb{N}$, $n \geq 2$ ，任意 n 個正方形均可經適當裁剪，拼成一個正方形。(不必畫出圖形)

解： (1) 若任意三個正方形 a_1, a_2, a_3 ，由 a_1, a_2 經適當裁剪，可以拼成一個正方形 A_1 ，再由 A_1 和 a_3 亦可經適當裁剪，拼成一個正方形 A_2 。

(2) 1° 當 $n=2$ 時

由已知：兩個正方形經適當裁剪，必可以拼成一個正方形，
故原命題成立

2° 設 $n=k$ ($k \in \mathbb{N}, k \geq 2$) 時，原命題成立

即任意 k 個正方形均可以經適度裁剪，拼成一正方形

當 $n=k+1$ 時

令 $a_1, a_2, a_3, \dots, a_k, a_{k+1}$ 為 $k+1$ 個正方形

由正方形 $a_1, a_2, a_3, \dots, a_k$ 可拼成一正方形 A_k

再由 A_k 與 a_{k+1} 必可拼成一正方形

故對 $n=k+1$ 時，原命題亦成立

根據以上數學歸納法， $\forall n \in \mathbb{N}, n \geq 2$ ，原命題恆成立

4. (能力指標：不等式歸納)



$$n \in \mathbb{N}, \text{證明 } \frac{1}{1^2} + \frac{1}{2^2} + \cdots + \frac{1}{n^2} \leq 2 - \frac{1}{n}$$

證： 1° 當 $n=1$ 時，左式 $= \frac{1}{1^2} = 1$ ，右式 $= 2 - \frac{1}{1} = 1$

$\therefore$ 左式 $\leq$ 右式，原式成立

2° 設 $n=k$ 時 ($k \in \mathbb{N}$)，原式成立，

$$\text{即 } \frac{1}{1^2} + \frac{1}{2^2} + \cdots + \frac{1}{k^2} \leq 2 - \frac{1}{k}$$

將上式左右同加上 $\frac{1}{(k+1)^2}$

$$\begin{aligned} \text{得 } \frac{1}{1^2} + \frac{1}{2^2} + \cdots + \frac{1}{k^2} + \frac{1}{(k+1)^2} &\leq 2 - \frac{1}{k} + \frac{1}{(k+1)^2} \\ &= \left(2 - \frac{1}{k+1}\right) + \left(\frac{1}{k+1} - \frac{1}{k} + \frac{1}{(k+1)^2}\right) \\ &= \left(2 - \frac{1}{k+1}\right) + \left(\frac{k(k+1) - (k+1)^2 + k}{k(k+1)^2}\right) \\ &= \left(2 - \frac{1}{k+1}\right) + \frac{-1}{k(k+1)^2} \\ &\leq 2 - \frac{1}{k+1} \end{aligned}$$

故對於 $n=k+1$ ，原式亦成立

根據以上數學歸納法， $\forall n \in \mathbb{N}$ ，原式恆成立

5. (能力指標：不等式歸納)

EZBH



$$n \in \mathbb{N}, \text{證明 } \frac{1}{\sqrt{1}} + \frac{1}{\sqrt{2}} + \frac{1}{\sqrt{3}} + \cdots + \frac{1}{\sqrt{n}} \geq \sqrt{n}$$

證：1° 當 $n=1$ 時，左式 $= \frac{1}{\sqrt{1}} = 1$ ，右式 $= \sqrt{1} = 1$

∴ 左式 $\geq$ 右式，原式成立

2° 設 $n=k$ 時 ($k \in \mathbb{N}$)，原式成立，

$$\text{即 } \frac{1}{\sqrt{1}} + \frac{1}{\sqrt{2}} + \frac{1}{\sqrt{3}} + \cdots + \frac{1}{\sqrt{k}} \geq \sqrt{k}$$

將上式左右同加 $\frac{1}{\sqrt{k+1}}$

$$\text{得 } \frac{1}{\sqrt{1}} + \frac{1}{\sqrt{2}} + \frac{1}{\sqrt{3}} + \cdots + \frac{1}{\sqrt{k}} + \frac{1}{\sqrt{k+1}}$$

$$\geq \sqrt{k} + \frac{1}{\sqrt{k+1}}$$

$$= \sqrt{k+1} + \left(\sqrt{k} + \frac{1}{\sqrt{k+1}} - \sqrt{k+1} \right)$$

$$= \sqrt{k+1} + \frac{\sqrt{k^2+k}-k}{\sqrt{k+1}}$$

$$\geq \sqrt{k+1}$$

故對 $n=k+1$ ，原式亦成立

根據以上數學歸納法， $\forall n \in \mathbb{N}$ ，原式恆成立

6. (能力指標：不等式歸納)

$\forall n \in \mathbb{N}, n \geq 4$, 證明 $2^n \geq n^2$

證：1° 當 $n=4$ 時，左式 $= 2^4 = 16$

$$\text{右式} = 4^2 = 16$$

$\therefore$ 左式 $\geq$ 右式，原式成立

2° 設 $n=k$ ($k \in \mathbb{N}, k \geq 4$)，原式成立，即 $2^k \geq k^2$

將上式左右同乘 2

$$\begin{aligned} \text{得 } 2^{k+1} &\geq 2k^2 = k^2 + k^2 \\ &\geq k^2 + 4k = k^2 + 2k + 2k \\ &\geq k^2 + 2k + 1 = (k+1)^2 \end{aligned}$$

故對 $n=k+1$ ，原式亦成立

根據以上數學歸納法， $\forall n \in \mathbb{N}, n \geq 4$ ，原式恆成立



7. (能力指標：畢氏歸納)

設 n 為自然數，且 $n > 2$ ，試證 $5^n > 3^n + 4^n$

證：1° 當 $n=3$ 時，左式 $= 5^3 = 125$

$$\text{右式} = 3^3 + 4^3 = 91$$

$\therefore$ 左式 $>$ 右式，原式成立

2° 設 $n=k$ ($k \in \mathbb{N}, k \geq 3$) 時，原式成立，

$$\text{即 } 5^k > 3^k + 4^k$$

將上式左右同乘 5

$$\begin{aligned} \text{得 } 5^{k+1} &> 5 \times 3^k + 5 \times 4^k \\ \Rightarrow 5^{k+1} &> 3 \cdot 3^k + 4 \cdot 4^k \\ \Rightarrow 5^{k+1} &> 3^{k+1} + 4^{k+1} \end{aligned}$$

故對 $n=k+1$ ，原式亦成立

根據以上數學歸納法， $\forall n \in \mathbb{N}, n > 2$ ，原式恆成立



8. (能力指標：畢氏歸納)

設 a, b, c 為直角三角形之三邊長，其中 c 表斜邊長，
若 n 為自然數且 $n \geq 3$ 恆有 $a^n + b^n < c^n$ ，試證之。



證：1° 當 $n=3$ 時，左式 $= a^3 + b^3 = a \cdot a^2 + b \cdot b^2$

$$\begin{aligned} &< c \cdot a^2 + c \cdot b^2 = c(a^2 + b^2) = c \cdot c^2 \\ &= c^3 = \text{右式} \\ &\therefore \text{原式成立} \end{aligned}$$

2° 設 $n=k$ ($k \in \mathbb{N}, k \geq 3$) 時，原式成立，

$$\text{即 } a^k + b^k < c^k$$

將上式左右同乘 c

$$\begin{aligned} \text{得 } c^{k+1} &> ca^k + cb^k \\ &> a \cdot a^k + b \cdot b^k \\ &= a^{k+1} + b^{k+1} \end{aligned}$$

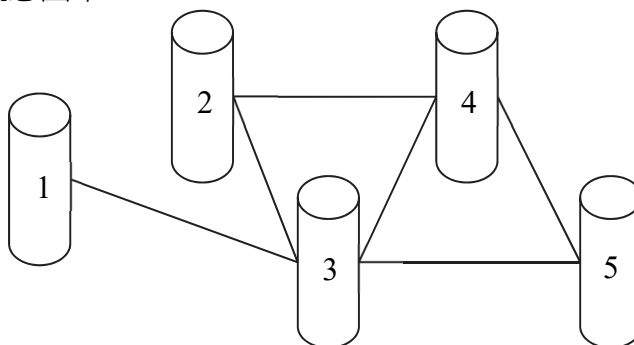
故對 $n=k+1$ ，原式亦成立

根據以上數學歸納法， $\forall n \in \mathbb{N}, n \geq 3$ ，原式恆成立

【觀念】數學歸納法第二原理 (費氏原理)



- (1) P_1, P_2 檢驗成立
- (2) 對任二個自然數 $k, k+1$ ，若 P_k, P_{k+1} 成立則 P_{k+2} 亦成立
則對任意自然數 n, P_n 都成立
- (3) 概念圖示：



- (4) 使用時機：專門處理 $A^n \pm B^n$ 的型式

9. (能力指標：費氏歸納)



$\forall n \in \mathbb{N}$ ，證明 $(3+\sqrt{5})^n + (3-\sqrt{5})^n$ 恒為 2^n 的倍數

證：令 $\alpha = 3+\sqrt{5}, \beta = 3-\sqrt{5} \Rightarrow \alpha + \beta = 6, \alpha\beta = 4$

1° 當 $n=1$ 時， $\alpha + \beta = 6 = 2 \times 3 \Rightarrow 2^1 \mid \alpha^1 + \beta^1$

當 $n=2$ 時，

$$\begin{aligned}\alpha^2 + \beta^2 &= (\alpha + \beta)^2 - 2\alpha\beta = 6^2 - 2 \times 4 = 28 = 2^2 \times 7 \\ &\Rightarrow 2^2 \mid \alpha^2 + \beta^2\end{aligned}$$

$\therefore$ 原敘述均成立

2° 設 $n=k, k+1 (k \in \mathbb{N})$ ，原敘述均成立

$$\text{即 } \alpha^k + \beta^k = 2^k \cdot t, \alpha^{k+1} + \beta^{k+1} = 2^{k+1} \cdot s \quad (s, t \in \mathbb{N})$$

當 $n=k+2$ 時

$$\begin{aligned}\alpha^{k+2} + \beta^{k+2} &= (\alpha + \beta)(\alpha^{k+1} + \beta^{k+1}) - \alpha\beta(\alpha^k + \beta^k) \\ &= 6 \times (2^{k+1} \cdot t) - 4(2^k \cdot s) \\ &= 2^{k+2}(3t - s)\end{aligned}$$

$\therefore 2^{k+2} \mid \alpha^{k+2} + \beta^{k+2}$ ，原敘述亦成立

根據以上數學歸納法， $\forall n \in \mathbb{N}$ ，原命題恆成立

★ 級數

主題 9 等差級數與等比級數



【觀念一】等差級數公式

$$(1) \text{ 等差級數公式 } S_n = \frac{(a_1 + a_n)n}{2} = \frac{[2a_1 + (n-1)d]n}{2}$$

$$\langle \text{說明} \rangle \begin{cases} S_n = a_1 + a_2 + \cdots + a_n \cdots \text{①} \\ S_n = a_n + a_{n-1} + \cdots + a_1 \cdots \text{②} \end{cases}$$

$$\text{①} + \text{②} \Rightarrow 2S_n = (a_1 + a_n) + (a_2 + a_{n-1}) + \cdots + (a_n + a_1)$$

$$\Rightarrow 2S_n = \underbrace{(a_1 + a_n) + (a_1 + a_n) + \cdots + (a_1 + a_n)}_{n \text{ 組}}$$

$$\Rightarrow 2S_n = (a_1 + a_n)n$$

$$\Rightarrow S_n = \frac{(a_1 + a_n)n}{2}$$

$$\Rightarrow S_n = \frac{[a_1 + a_1 + (n-1)d]n}{2} = \frac{[2a_1 + (n-1)d]n}{2}$$

【觀念二】等差級數性質

$$(1) S_n, S_{2n} - S_n, S_{3n} - S_{2n}, \cdots \text{成等差數列}$$

$$\langle \text{說明} \rangle 1^\circ S_n = [2a_1 + (n-1)d] \frac{n}{2}$$

$$2^\circ S_{2n} - S_n = [2a_1 + (2n-1)d] \frac{2n}{2} - [2a_1 + (n-1)d] \frac{n}{2}$$

$$= [4a_1 + (4n-2)d] \frac{n}{2} - [2a_1 + (n-1)d] \frac{n}{2}$$

$$= [2a_1 + (3n-1)d] \frac{n}{2}$$

$$3^\circ S_{3n} - S_{2n} = [2a_1 + (3n-1)d] \frac{3n}{2} - [2a_1 + (2n-1)d] \frac{2n}{2}$$

$$= [2a_1 + (5n-1)d] \frac{n}{2}$$

$$4^\circ \text{ 由以上可知 } S_n + (S_{3n} - S_{2n}) = 2(S_{2n} - S_n)$$

$$\therefore S_n, S_{2n} - S_n, S_{3n} - S_{2n} \text{ 成等差數列}$$

《推廣》(1) $S_n, S_{2n} - S_n, S_{3n} - S_{2n}, S_{4n} - S_{3n}, \dots$ 成等差

(2) 公差為 $n^2 d$

【觀念三】等比級數公式

$$(1) \text{ 等比級數公式 } S_n = \begin{cases} na_1, r = 1 \\ \frac{a_1(1-r^n)}{1-r} = \frac{a_1(r^n-1)}{r-1}, r \neq 1 \end{cases}$$

《說明》1° $r = 1$ 時, $S_n = a_1 + a_2 + \dots + a_n = \underbrace{a_1 + a_1 + \dots + a_1}_{n \text{ 個}} = na_1$

2° $r \neq 1$ 時

$$S_n = a_1 + a_1 r + a_1 r^2 + \dots + a_1 r^{n-1} \dots \dots \dots \textcircled{1}$$

$$rS_n = a_1 r + a_1 r^2 + \dots + a_1 r^{n-1} + a_1 r^n \dots \textcircled{2}$$

$$\textcircled{1} - \textcircled{2} \text{ 得 } (1-r)S_n = a_1 - a_1 r^n = a_1(1-r^n)$$

$$\therefore S_n = \frac{a_1(1-r^n)}{1-r} = \frac{a_1(r^n-1)}{r-1}$$

【觀念四】等比級數性質

(1) $S_n, S_{2n} - S_n, S_{3n} - S_{2n}, \dots$ 成等比數列 ($S_n \neq 0$)

《說明》1° $S_n = \frac{a_1(1-r^n)}{1-r}$

$$2^\circ S_{2n} - S_n = \frac{a_1(1-r^{2n})}{1-r} - \frac{a_1(1-r^n)}{1-r} = \frac{a_1 r^n (1-r^n)}{1-r}$$

$$3^\circ S_{3n} - S_{2n} = \frac{a_1(1-r^{3n})}{1-r} - \frac{a_1(1-r^{2n})}{1-r} = \frac{a_1 r^{2n} (1-r^n)}{1-r}$$

$$4^\circ \text{ 由以上知 } S_n (S_{3n} - S_{2n}) = (S_{2n} - S_n)^2$$

$$\therefore S_n, S_{2n} - S_n, S_{3n} - S_{2n} \text{ 成等比數列}$$

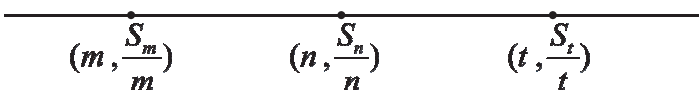
《推廣》(1) $S_n, S_{2n} - S_n, S_{3n} - S_{2n}, S_{4n} - S_{3n}, \dots$ 成等比數列

(2) 公比為 r^n

【觀念五】等差 S_n 內插法

$$(1) \begin{cases} S_m = \frac{[2a_1 + (m-1)d]m}{2} \\ S_n = \frac{[2a_1 + (n-1)d]n}{2} \end{cases}$$
$$\Rightarrow \begin{cases} \frac{S_m}{m} = a_1 + \frac{d}{2}(m-1) \\ \frac{S_n}{n} = a_1 + \frac{d}{2}(n-1) \end{cases}$$
$$\Rightarrow \frac{S_m}{m} - \frac{S_n}{n} = \frac{d}{2}(m-n) \Rightarrow \frac{d}{2} = \boxed{\frac{\frac{S_m}{m} - \frac{S_n}{n}}{m-n}}$$

(2) 內插法


$$\Rightarrow \boxed{\frac{\frac{S_m}{m} - \frac{S_n}{n}}{m-n} = \frac{\frac{S_t}{t} - \frac{S_m}{m}}{t-m}}$$

【觀念六】本利和

(1) 單利本利和 = 本金 $\times$ (1 + 期數 $\times$ 期利率)

《說明》單利計息

本金 = 10000 元，年利率 = $\frac{2}{100}$ ，三年後本利和 =

(2) 複利本利和 = 本金 $\times$ (1 + 期利率)^{期數}

《說明》複利計息

本金 = 10000 元，年利率 = $\frac{2}{100}$ ，三年後本利和 =

例 1. (能力指標：等差級數性質)

$\langle a_n \rangle$ 成等差數列，已知 $S_n = 12$ ， $S_{2n} = 48$ ，求 $S_{3n} =$ _____。

解： $\because S_n, S_{2n} - S_n, S_{3n} - S_{2n}$ 成等差數列 AP

$\therefore$



例 2. (能力指標：等差級數應用)

設凸多邊形，其各內角之度量成等差數列，若公差為 4° ，
最大內角 172° ，則此多邊形之邊數為 _____。

解： 1° 令 $a_1 = 172^\circ$ ， $d = -4^\circ$ ，多邊形邊數為 n

$$2^\circ \text{ 多邊形內角總和} = (n-2)180^\circ = [2 \times 172^\circ + (n-1)(-4^\circ)] \frac{n}{2}$$

$\Rightarrow$

$\Rightarrow$



例 3. (能力指標：等比級數性質)

$\langle a_n \rangle$ 成正項等比數列，若 $S_{10} = 48$ ， $S_{30} = 63$ ，求 $S_{20} = \underline{\hspace{2cm}}$ 。

解： $S_n, S_{2n} - S_n, S_{3n} - S_{2n}$ 成等比數列

$\Rightarrow S_{10}, S_{20} - S_{10}, S_{30} - S_{20}$ 成等比數列，令 $S_{20} = x$ ，代入

$\Rightarrow 48, x - 48, 63 - x$ 成等比數列

$$\Rightarrow (x - 48)^2 = 48 \cdot (63 - x) \Rightarrow x^2 - 48x - 720 = 0$$

$$\Rightarrow (x - 60)(x + 12) = 0 \Rightarrow S_{20} = x = 60 \text{ 或 } -12 \text{ (不合)}$$

故 $S_{20} = 60$

LDEJ



例 4. (能力指標：等差 S_n 內插法)

(1) $\langle a_n \rangle$ 成等差，已知 $S_n = m$ ， $S_m = n$ ($m \neq n$) 求 $S_{m+n} = ?$

(2) $\langle a_n \rangle$ 成等差， $S_{10} = 55$ ， $S_{17} = 153$ ，求 $S_{30} = ?$

(3) $\langle a_n \rangle$ 成等差， $S_n = 10$ ， $S_{2n} = 30$ ，求 $S_{3n} = ?$

解：

UTIJ



例 5. (能力指標：等比級數)

AQVW



等比級數 $(\sqrt{3}-1)+(2-\sqrt{3})+\frac{3\sqrt{3}-5}{2}+\cdots$ 第 n 項 = ?

解： $1^\circ r = \frac{2-\sqrt{3}}{\sqrt{3}-1} \times \frac{\sqrt{3}+1}{\sqrt{3}+1} = \frac{\sqrt{3}-1}{2}$

$2^\circ S_n =$

答： $\frac{2\sqrt{3}}{3} \left[1 - \left(\frac{\sqrt{3}-1}{2} \right)^n \right]$

例 6. (能力指標：等比級數)

HSJR



$1 - \frac{1}{2} - \frac{1}{4} + \frac{1}{8} - \frac{1}{16} - \frac{1}{32} + \frac{1}{64} - \frac{1}{128} - \frac{1}{256} + \cdots$ 第 30 項 = ?

解：

答： $\frac{2}{7} \left[1 - \left(\frac{1}{8} \right)^{10} \right]$

例 7. (能力指標：複利)

李君到郵局開了一個零存整付的戶頭，約定於每年年初存入 10 萬元，以年利率 10%複利計算，試問滿 10 年後，李君所得的本利和共有多少錢？($1.1^{10} = 2.59$)

解：



例 8. (能力指標：並排解法)

(1) $9 + 99 + 999 + \cdots +$ 第 n 項 = ?

(2) $5 + 55 + 555 + \cdots +$ 第 n 項 = ?

解：



例 9. (能力指標：並排解法)

(1) $0.9 + 0.99 + 0.999 + \cdots + \text{第 } n \text{ 項} = ?$

(2) $0.7 + 0.77 + 0.777 + \cdots + \text{第 } n \text{ 項} = ?$

解：

CIE



例 10. (能力指標：並排解法)

$0.7 + 0.077 + 0.00777 + \cdots + \text{第 } n \text{ 項}。$

解：

ZINF



答： $\frac{700}{891} - \frac{70}{81} \left[(0.1)^n - \frac{1}{11} (0.01)^n \right]$

例 11. (能力指標：非並排解法)

$0.77 + 0.0707 + 0.007007 + \cdots +$ 第 n 項。

解：



$$\text{答：} \frac{28}{33} - \frac{7}{9}(0.1)^n - \frac{7}{99}(0.01)^n$$



回家作業



1. 有一凸 n 邊形，其內角度量成一等差數列，公差是 5° ，
最小角是 120° ，試求 n 。



2. 某甲參加郵政儲金，月利率 0.8% ，單利計算。他從民國 88 年 10 月 1 日起，
每月月初存入 1000 元，以後繼續不斷，直到民國 90 年年底為止，結算後的本
利和應為多少？

3. 一等差數列，前 n 項之和 S_n 為 m ，前 m 項之和 S_m 為 n (m, n 是自然數， $m \neq n$)，
則前 $m+n$ 項之和 S_{m+n} 為何？(以 m, n 表示之)



1. 9 2. 30024 3. $-(m+n)$



回家作業



4. 有一等比數列 $\langle a_n \rangle$ ，前 n 項的和為 S_n ，如果 $S_n = 24$ ， $S_{2n} = 30$ ，求 S_{3n} 的值。
5. 設一等比數列的第 4 項是 6，第 6 項是 24，而公比是正數，試求這等比數列的前 8 項的總和。
6. 設 a, b 為實數， n 為正整數，試求 $a^n + a^{n-1}b + \cdots + ab^{n-1} + b^n$ 之和。

簡答

$$4. \frac{63}{2} \quad 5. \frac{765}{4} \quad 6. \text{和} = \begin{cases} b^n & , a = 0 \\ (n+1)a^n & , a = b \\ \frac{a^{n+1} - b^{n+1}}{a - b} & , a \neq b \end{cases}$$



回家作業



7. 求出下列等比級數的和：

$$(1) \frac{4}{5} + \left(\frac{4}{5}\right)^2 + \left(\frac{4}{5}\right)^3 + \cdots + \left(\frac{4}{5}\right)^n \quad (2) \frac{2}{3} - \frac{4}{9} + \frac{8}{27} - \frac{16}{81} + \cdots + (-1)^{n-1} \cdot \left(\frac{2}{3}\right)^n$$

8. 試求下列級數的和： $0.22 + 0.0202 + 0.002002 + 0.00020002 + \cdots + a_n$

【提示】每一項化成“兩個分數之和”，如 $0.0202 = \frac{2}{100} + \frac{2}{10000}$

9. 求等比級數 $1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{4} - \frac{1}{8} + \cdots - \frac{1}{512} + \frac{1}{1024}$ 的和。

簡答

$$7. (1) 4 - 4\left(\frac{4}{5}\right)^n \quad (2) \frac{2}{5} - \frac{2}{5}\left(\frac{-2}{3}\right)^n \quad 8. \frac{8}{33} - \frac{2}{9}\left(\frac{1}{10}\right)^n - \frac{2}{99}\left(\frac{1}{100}\right)^n \quad 9. \frac{683}{1024}$$



回家作業



10. 求級數 $0.55 + 0.0505 + 0.005005 + 0.00050005 + \cdots + a_n$ 之和？

11. 求級數 $0.32 + 0.0302 + 0.003002 + 0.00030002 + \cdots + a_n$ 之和？

簡 答

10. $\frac{20}{33} - \frac{5}{9}\left(\frac{1}{10}\right)^n - \frac{5}{99}\left(\frac{1}{100}\right)^n$ 11. $\frac{35}{99} - \frac{1}{3}\left(\frac{1}{10}\right)^n - \frac{2}{99}\left(\frac{1}{100}\right)^n$



回家作業



12. (91 學測試題)

某人存入銀行 10000 元，言明年利率 4%，以半年複利計息，滿一年本利和為 Q 元。則 $Q =$ _____。

13. (93 學測試題)

已知一等差數列共有十項，且知其奇數項之和為 15，偶數項之和為 30，則下列哪一選項為此數列之公差？

- (1) 1 (2) 2 (3) 3 (4) 4 (5) 5



12. 10404 13. (3)



回家作業



14. (95 學測試題)

用黑、白兩種顏色的正方形地磚依照如下的規律拼成若干圖形：



第 1 圖



第 2 圖



第 3 圖

拼第 95 個圖需用到 _____ 塊白色地磚。

15. (96 學測試題)

某巨蛋球場 E 區共有 25 排座位，此區每一排都比其前一排多 2 個座位。小明坐在正中間那一排(即第 13 排)，發現此排共有 64 個座位，則此球場 E 區共有 _____ 個座位。



14. 478 15. 1600



回家作業



16. (98 學測試題)

數列 $a_1 + 2, \dots, a_k + 2k, \dots, a_{10} + 20$ 共有十項，且其和為 240，則

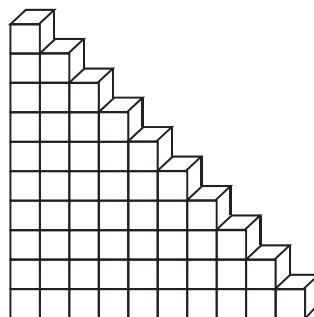
$a_1 + \dots + a_k + \dots + a_{10}$ 之值為

- (1) 31 (2) 120 (3) 130 (4) 185 (5) 218

17. (101 學測試題)

將邊長為 1 公分的正立方體堆疊成一階梯形立體，如下圖所示，其中第 1 層（最下層）有 10 塊，第 2 層有 9 塊， $\dots$ ，依此類推。當堆疊完 10 層時，該階梯形立體的表面積（即該立體的前、後、上、下、左、右各表面的面積總和）為多少？

- (1) 75 平方公分 (2) 90 平方公分
(3) 110 平方公分 (4) 130 平方公分
(5) 150 平方公分



簡 答

16. (3) 17. (5)



回家作業



18. (104 學測試題)

第 1 天獲得 1 元、第 2 天獲得 2 元、第 3 天獲得 4 元、第 4 天獲得 8 元、依此每天所獲得的錢為前一天的兩倍，如此進行到第 30 天，試問這 30 天所獲得的錢，總數最接近下列哪一個選項？

- (1) 10,000 元 (2) 1,000,000 元 (3) 100,000,000 元
(4) 1,000,000,000 元 (5) 1,000,000,000,000 元

19. (104學測試題)

小華準備向銀行貸款3百萬元當做創業基金，其年利率為3%，約定三年期滿一次還清貸款的本利和。銀行貸款一般以複利（每年複利一次）計息還款，但給小華創業優惠改以單利計息還款。試問在此優惠下，小華在三年期滿還款時可以比一般複利計息少繳 _____ 元。



18. (4) 19. 8181

數位[㊦] 延伸閱讀



1. (能力指標：差比級數)

$$\frac{1}{2} + \frac{2}{2^2} + \frac{3}{2^3} + \cdots + \frac{n}{2^n} = ?$$



解：
$$\begin{cases} S = 1 \cdot \left(\frac{1}{2}\right) + 2 \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^2 + 3 \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^3 + \cdots + n \left(\frac{1}{2}\right)^n \cdots \cdots \textcircled{1} \\ \frac{1}{2}S = 1 \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^2 + 2 \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^3 + \cdots + (n-1) \left(\frac{1}{2}\right)^n + n \left(\frac{1}{2}\right)^{n+1} \cdots \textcircled{2} \end{cases}$$

$$\textcircled{1} - \textcircled{2} \text{ 得 } \frac{1}{2}S = \frac{1}{2} + \underbrace{\left(\frac{1}{2}\right)^2 + \cdots + \left(\frac{1}{2}\right)^n}_{\text{等比級數求和}} - n \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^{n+1}$$

$$\Rightarrow \frac{1}{2}S = \frac{\frac{1}{2} \left[1 - \left(\frac{1}{2}\right)^n \right]}{1 - \frac{1}{2}} - n \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^{n+1}$$

$$\Rightarrow S = 2 \left\{ \left[1 - \left(\frac{1}{2}\right)^n \right] - n \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^{n+1} \right\}$$

$$\Rightarrow S = 2 - 2 \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^n - n \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^n$$

$$\Rightarrow S = 2 - (n+2) \left(\frac{1}{2}\right)^n$$

數位[📶]延伸閱讀回家作業



1. $S = 1 + 2\left(\frac{1}{2}\right) + 3\left(\frac{1}{2}\right)^2 + \cdots + n\left(\frac{1}{2}\right)^{n-1}$ ， n 為自然數，試求 S 之值。



2. 求級數 $\frac{1}{2} + \frac{3}{2^2} + \frac{5}{2^3} + \cdots + \frac{2n-1}{2^n}$ 之和？

簡答

1. $4 - (n+2)\left(\frac{1}{2}\right)^{n-1}$ 2. $3 - \left(\frac{1}{2}\right)^{n-2} - \frac{2n-1}{2^n}$

主題 10 利率問題



1. 利率概念

(1) 單利與複利：

若將本金 A 元存入銀行，期利率為 r ，經 n 期過後：

① 如以單利計算， n 期過後可得本利和 $A(1+nr)$ 元。

② 如以複利計算，且每期複利一次， n 期過後可得本利和 $A(1+r)^n$ 元。

【說例 1】

若將本金 A 元存入銀行，年利率為 12%，每年複利一次，5 年過後可得本利和為_____元。

【說例 2】

若將本金 A 元存入銀行，年利率為 12%。以單利計算，5 年過後可得本利和為_____元。

(2) 利率的分割：

若將本金 A 元存入銀行，年利率為 12%，每期以複利計息， n 年過後：

① 若每年為一期，則 n 年過後可得本利和_____元。

② 若每半年為一期，則 n 年過後可得本利和_____元。

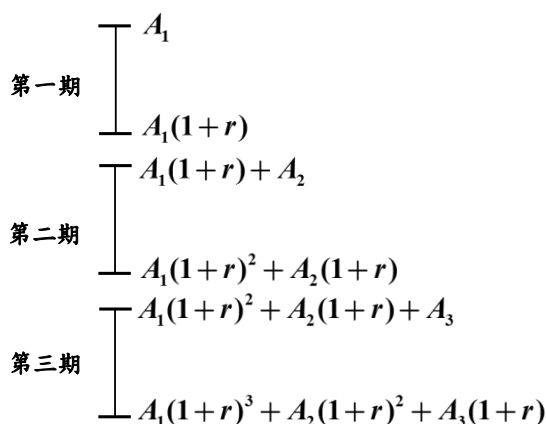
③ 若每季為一期，則 n 年過後可得本利和_____元。

2. 存款與貸款

(1) 定期存款：

若銀行存款每期複利一次，期利率為 r 。且假設在第 $1, 2, 3, \dots, n-1, n$ 期初分別存入本金 $A_1, A_2, A_3, \dots, A_{n-1}, A_n$ 元，則 n 期過後，本利和為：

$$A_1(1+r)^n + A_2(1+r)^{n-1} + \dots + A_n(1+r) \text{ 元。 [視為每筆金額分開複利]}$$



(2) 分期還款：

我們先考慮一個情形：小立向銀行貸款 A 元，約定分 3 期還清，且每期固定還款 x 元。假設銀行定期利率為 r ，且每期複利一次。

	尚欠	還款
第一期	A $A(1+r)$	$-x$
第二期	$A(1+r) - x$ $A(1+r)^2 - x(1+r)$	$-x$
第三期	$A(1+r)^2 - x(1+r) - x$ $A(1+r)^3 - x(1+r)^2 - x(1+r)$	$-x$

在第三期結束還清款項可得 $A(1+r)^3 - x(1+r)^2 - x(1+r) - x = 0$

即 $A(1+r)^3 = x(1+r)^2 + x(1+r) + x$.

我們可以推廣至：

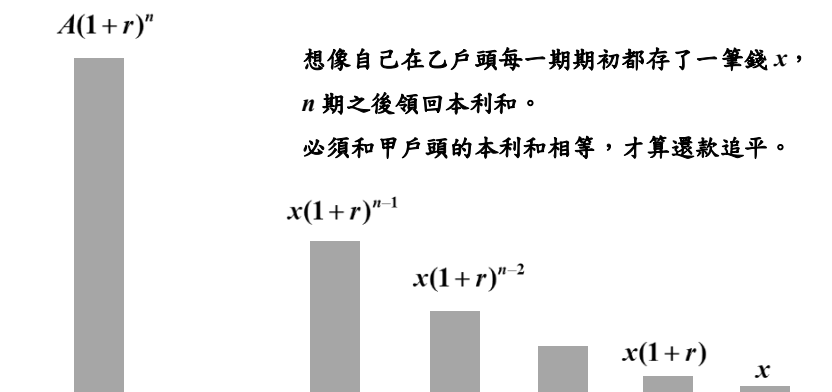
若某人向銀行借款 A 元，約定分 n 期還清，每期固定還 x 元。假設銀行定期利率為 r ，每期複利一次，則：

$$A(1+r)^n = x(1+r)^{n-1} + x(1+r)^{n-2} + x(1+r)^{n-3} + \cdots + x(1+r) + x$$

[視為借款本利和等於還款本利和]

【說明】

想像自己在甲戶頭存了一筆錢 A ，
 n 期之後領回本利和。



小華準備向銀行貸款 3 百萬元當做創業基金，其年利率為 3%，約定三年期滿一次還清貸款的本利和。銀行貸款一般以複利（每年複利一次）計息還款，但給小華創業優惠改以單利計息還款。試問在此優惠下，小華在三年期滿還款時可以比一般複利計息少繳_____元。

解

▣ [興大附中]

錢老闆急用錢，打算向銀行借 10 萬元並在三個月後還清，他向銀行詢問利息的算法，銀行提出四個方案如下：

甲：月利率 2%，每個月複利一次

乙：月利率 2%，每半個月複利一次

丙：第一個月利率為 1%，第二個月為 2%，第三個月為 3%，每個月複利計息

丁：第一個月利率為 3%，第二個月為 2%，第三個月為 1%，每個月複利計息

這四個方案以哪一個對錢老闆**最不利**，及所攤還的本利和為最多

(1) 甲方案 (2) 乙方案 (3) 丙方案 (4) 丁方案 (5) 四個方案的本利和都一樣

答：(2)

▣ [高雄中學]

宇朋向銀行貸款 2 百萬當作創業基金，其年利率為 $r\%$ ，約定二年期滿一次還清貸款的本利和。銀行貸款一般以複利（每年複利一次）計息還款，但給宇朋創業優惠改以單利計息還款。試問在此優惠下，宇朋在二年期滿還款時可以比一般複利計息少繳 1800 元，試求 $r\% =$ _____ %。

答：3

例 2 | 定期存款的本利和

李君到郵局開了一個零存整付的戶頭，約定於每年年初存入 10 萬元，以年利率 10% 複利計算，試問滿 10 年後，李君所得的本利和共有多少錢？($1.1^{10} = 2.59$)

解



▣ [建國中學]

小建為了置產，打算從今年開始參加銀行零存整付的優惠存款專案，其辦法規定：每年為一期，每一期的第一天存款 10 萬元，按年利息 1% 計算，每年複利計息一次，十年期滿。若期滿時小建總共可領回 x 元，請選出 x 的範圍。

(已知 $1.01^9 \approx 1.0937$, $1.01^{10} \approx 1.1046$, $1.01^{11} \approx 1.1156$)

- (A) $1051500 \leq x < 1053500$ (B) $1053500 \leq x < 1055500$ (C) $1055500 \leq x < 1057500$
(D) $1057500 \leq x < 1059500$ (E) $1059500 \leq x < 1061500$ 。

答：(C)

▣ [嘉義高中]

阿文剛出社會，決定每個月存錢做為買房基金，規劃如下：每個月初存 2 萬元，存 20 年。現銀行推出的利率優惠為月利率為 0.1%，每個月複利計息。若 20 年間此利率不變，20 年後期滿阿文的本利和為_____萬元。(無條件捨去至萬元)，請利用近似值 $1.001^{241} = 1.272$ 計算。

答：542

▣ [文華高中]

小文於每年年初固定存入 10 萬元，投入每年年利率 1% 的定存，而小華也於每年年初固定投入 10 萬元，但他找到每年年利率 2% 的銀行來參加定存，假設兩人都在前述條件不變的情況下持續進行，試問 20 年後小華的本利和比小文的本利和多百分之_____。(請四捨五入到整數位) ($1.01^{20} \approx 1.22$, $1.02^{20} \approx 1.49$)

答：12

例 3 | 分期還款

菲菲打算在明年 1 月初向銀行貸款 500 萬元買房子，該銀行採用「本息平均攤還法」還款，其計算方式為：每月複利計息一次，將貸款期間內全部貸款之本金與利息平均分攤於每一期中償付，使每期繳納相同的金額；且銀行願意貸款給民眾的房貸金額（本金）

是以每月的房貸支出（即每月所還之支利和）不超過月收入的 $\frac{1}{3}$ 為原則。若該銀行貸款的年利率為 2.4%，每月複利計息一次，每月月底還一次本息，25 年後還清，則菲菲的月收入至少要_____萬元才可貸款。

（答案請取整數至萬元，已知 $1.002^{25} \approx 1.05$, $1.002^{300} \approx 1.82$ ；月利率 = 年利率 $\div 12$ ）

解

▣ [興大附中]

小延年初向銀行借款 10000 元，每年計算複利一次，預定兩年還清。若小延第一年年底還了 5200 元，第二年年底還了 5253 元後還清，則此次借款的年利率為_____%。

答：3

▣ [衛道中學]

阿甘向銀行借錢 12000 元，約定以年利率 $a\%$ 計息（以複利計算），一年後還 5800 元，再一年後又還 9200 元，恰將本利還清，則 $a =$ _____。

答：15



主題 11 Σ 運算

ZSIC



【觀念一】 Σ 符號介紹

- (1) Σ 讀做 sigma
- (2) Σ 表連加的意義：讀做 summation
- (3) $a_1 + a_2 + a_3 + \cdots + a_{18} = S_{18} = \Sigma$
- (4) $b_1 + b_2 + b_3 + \cdots + b_{70} = S_{70} = \Sigma$
- (5) $a_1 + a_2 + \cdots + a_n = S_n = \Sigma$
- (6) $b_1 + b_2 + \cdots + b_n + \cdots = \Sigma$
- (7) $\sum_{k=1}^8 t =$
- (8) $\sum_{k=1}^5 (2k-1) =$
- (9) $\sum_{k=1}^{\infty} \left(\frac{1}{3}\right)^k =$ (僅需列出格式不用寫出答案)

【觀念二】 $\sum_{k=1}^n a_k =$

- | | |
|----------|----------|
| (1) 項數 = | (2) 下限 = |
| (3) 上限 = | (4) 變數是 |

《說例》將下列各級數用 Σ 表示：(不需求和)

$$(1) 1 \cdot 4 + 2 \cdot 5 + 3 \cdot 6 + 4 \cdot 7 + 5 \cdot 8 + \cdots + (\text{第 } n \text{ 項})$$
$$=$$

$$(2) \frac{1 \cdot 2}{2 \cdot 3} + \frac{2 \cdot 2^2}{3 \cdot 4} + \frac{3 \cdot 2^3}{4 \cdot 5} + \frac{4 \cdot 2^4}{5 \cdot 6} + \frac{5 \cdot 2^5}{6 \cdot 7} + \cdots + (\text{第 } n \text{ 項})$$
$$=$$

$$(3) 1 \cdot n + 2 \cdot (n-1) + 3 \cdot (n-2) + 4 \cdot (n-3) + \cdots + (n-1) \cdot 2 + n \cdot 1$$
$$=$$

【觀念三】 $\sum_{k=1}^n c \cdot a_k = c \cdot a_1 + c \cdot a_2 + \cdots + c \cdot a_n = c(a_1 + a_2 + \cdots + a_n)$

$$= c \sum_{k=1}^n a_k$$

【觀念四】 $\sum_{k=1}^n (a_k + b_k) = (a_1 + b_1) + (a_2 + b_2) + \cdots + (a_n + b_n)$

$$= (a_1 + a_2 + \cdots + a_n) + (b_1 + b_2 + \cdots + b_n)$$

$$= \sum_{k=1}^n a_k + \sum_{k=1}^n b_k$$

$$\begin{aligned}
 \text{【觀念五】 } \sum_{k=1}^n (a_k - b_k) &= (a_1 - b_1) + (a_2 - b_2) + \cdots + (a_n - b_n) \\
 &= (a_1 + a_2 + \cdots + a_n) - (b_1 + b_2 + \cdots + b_n) \\
 &= \sum_{k=1}^n a_k - \sum_{k=1}^n b_k
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 \text{【觀念六】 } \sum_{k=1}^n (a_k \cdot b_k) &= (a_1 b_1) + (a_2 b_2) + \cdots + (a_n b_n) \\
 &\neq (a_1 + a_2 + \cdots + a_n)(b_1 + b_2 + \cdots + b_n) \\
 \therefore \sum_{k=1}^n (a_k \cdot b_k) &\neq \sum_{k=1}^n a_k \times \sum_{k=1}^n b_k
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 \text{【觀念七】 } \sum_{k=1}^n \frac{a_k}{b_k} &= \frac{a_1}{b_1} + \frac{a_2}{b_2} + \cdots + \frac{a_n}{b_n} \neq \frac{a_1 + a_2 + \cdots + a_n}{b_1 + b_2 + \cdots + b_n} \\
 \therefore \sum_{k=1}^n \frac{a_k}{b_k} &\neq \frac{\sum_{k=1}^n a_k}{\sum_{k=1}^n b_k}
 \end{aligned}$$

主題 12 級數常用公式

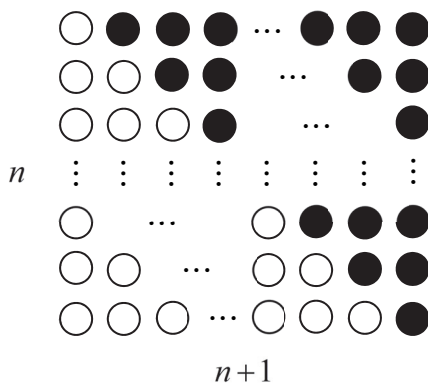
TSZZ



【觀念一】白努利級數公式

公式 1 $1+2+3+\cdots+n=$

《說明 1》圖解法



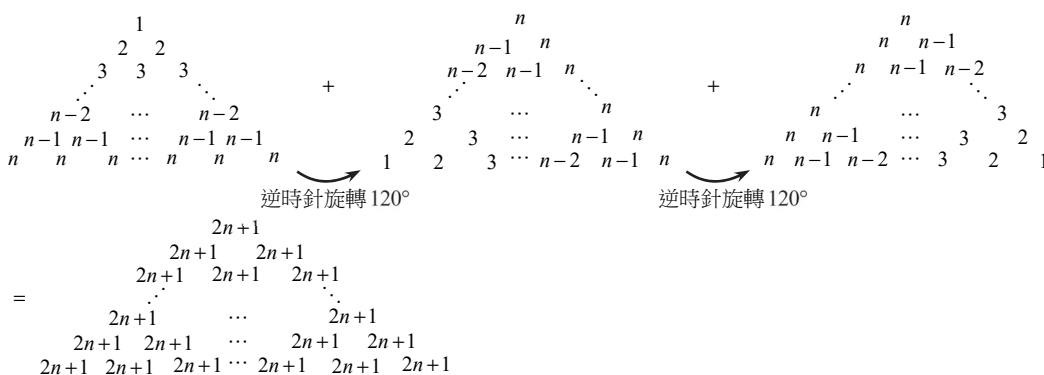
$$2(1+2+\cdots+n) = n(n+1) \Rightarrow 1+2+\cdots+n = \frac{n(n+1)}{2}$$

《說明 2》
$$\begin{cases} S = 1+2+\cdots+(n-1)+n \\ S = n+(n-1)+\cdots+2+1 \end{cases}$$

$$\Rightarrow 2S = (n+1)n \Rightarrow S = \frac{n(n+1)}{2}$$

公式 2 $1^2+2^2+\cdots+n^2=$

《說明 1》圖解法



$$3(1^2 + 2^2 + \cdots + n^2) = (1 + 2 + \cdots + n)(2n + 1)$$

$$\Rightarrow 1^2 + 2^2 + 3^2 + \cdots + n^2 = \frac{1}{3} \times \frac{n(n+1)}{2} (2n+1) = \frac{1}{6} n(n+1)(2n+1)$$

《說明 2》代數法

$$(x+1)^3 = x^3 + 3x^2 + 3x + 1$$

$$\begin{cases} x=1 \text{ 代入} & 2^3 = 1^3 + 3 \cdot 1^2 + 3 \cdot 1 + 1 \\ x=2 \text{ 代入} & 3^3 = 2^3 + 3 \cdot 2^2 + 3 \cdot 2 + 1 \\ \vdots & \vdots \\ x=n \text{ 代入} & (n+1)^3 = n^3 + 3 \cdot n^2 + 3 \cdot n + 1 \end{cases}$$

$$\text{將 } n \text{ 式累加} \Rightarrow (n+1)^3 = 1 + 3(1^2 + \cdots + n^2) + 3 \cdot \frac{n(n+1)}{2} + n$$

$$\therefore 1^2 + 2^2 + \cdots + n^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$$

公式 3

 $1^3 + 2^3 + \cdots + n^3 =$

《說明》代數法

$$(x+1)^4 = x^4 + 4x^3 + 6x^2 + 4x + 1$$

$$\begin{cases} x=1 \text{ 代入} & 2^4 = 1^4 + 4 \cdot 1^3 + 6 \cdot 1^2 + 4 \cdot 1 + 1 \\ x=2 \text{ 代入} & 3^4 = 2^4 + 4 \cdot 2^3 + 6 \cdot 2^2 + 4 \cdot 2 + 1 \\ \vdots & \vdots \\ x=n \text{ 代入} & (n+1)^4 = n^4 + 4 \cdot n^3 + 6 \cdot n^2 + 4 \cdot n + 1 \end{cases}$$

將 n 式累加

$$\Rightarrow (n+1)^4 = 1 + 4(1^3 + 2^3 + \cdots + n^3) + 6 \cdot \frac{n(n+1)(2n+1)}{6} + 4 \cdot \frac{n(n+1)}{2} + n$$

$$\therefore 1^3 + 2^3 + \cdots + n^3 = \frac{n^2(n+1)^2}{4} = \left[\frac{n(n+1)}{2} \right]^2$$

【觀念二】連乘級數公式

$$(1) \text{ 二連乘: } 1 \times 2 + 2 \times 3 + \cdots + n(n+1) =$$

$$\langle \text{說明} \rangle S = 1 \times (1+1) + 2 \times (2+1) + \cdots + n(n+1)$$

$$= (1^2 + 2^2 + \cdots + n^2) + (1 + 2 + \cdots + n)$$

$$= \frac{n(n+1)(2n+1)}{6} + \frac{n(n+1)}{2}$$

$$= \frac{n(n+1)(2n+1+3)}{6}$$

$$= \frac{n(n+1)(n+2)}{3}$$

$$(2) \text{ 三連乘: } 1 \times 2 \times 3 + 2 \times 3 \times 4 + \cdots + n(n+1)(n+2)$$

$$= \frac{n(n+1)(n+2)(n+3)}{4}$$

$$\langle \text{說明} \rangle S = \frac{1}{4}(1 \times 2 \times 3 \times 4 - 0 \times 1 \times 2 \times 3) + \frac{1}{4}(2 \times 3 \times 4 \times 5 - 1 \times 2 \times 3 \times 4)$$

$$+ \cdots + \frac{1}{4}[n(n+1)(n+2)(n+3) - (n-1)n(n+1)(n+2)]$$

$$= \frac{1}{4}\{(1 \times 2 \times 3 \times 4 - 0 \times 1 \times 2 \times 3) + (2 \times 3 \times 4 \times 5 - 1 \times 2 \times 3 \times 4)$$

$$+ \cdots + [n(n+1)(n+2)(n+3) - (n-1)n(n+1)(n+2)]\}$$

$$= \frac{1}{4}[n(n+1)(n+2)(n+3) - 0 \times 1 \times 2 \times 3]$$

$$= \frac{1}{4}n(n+1)(n+2)(n+3)$$

【觀念三】增減級數公式

$$(1) 1 \times n + 2(n-1) + 3(n-2) + \cdots + (n-1) \times 2 + n \times 1 =$$

$$\langle \text{說明} \rangle S = 1 + (1+2) + (1+2+3) + \cdots + (1+2+\cdots+n)$$

$$= \frac{1 \times 2}{2} + \frac{2 \times 3}{2} + \frac{3 \times 4}{2} + \cdots + \frac{n(n+1)}{2}$$

$$= \frac{1}{2} \times \frac{n(n+1)(n+2)}{3} = \frac{n(n+1)(n+2)}{6}$$

例 1. (能力指標：白努利應用)

請計算級數 $1 \cdot 6 + 2 \cdot 7 + \cdots + (n-1)(n+4) + n(n+5)$ 的和。

解：



例 2. (能力指標：白努利應用)

求級數 $1 \cdot 2^2 + 2 \cdot 3^2 + 3 \cdot 4^2 + \cdots + n(n+1)^2$ 之和 = ?

解：



例 3. (能力指標：增減級數)

求級數 $1+(1+2)+(1+2+3)+\cdots+(1+2+3+\cdots+99)$ 之和 = ?

解：



例 4. (能力指標：白努利應用)

求級數 $1 \cdot (3n-1) + 3 \cdot (3n-4) + 5 \cdot (3n-7) + \cdots + (2n-1) \cdot 2$ 之和 = ?

解：





回家作業



1. 求級數 $1 \cdot 3 + 2 \cdot 4 + 3 \cdot 5 + \cdots + n(n+2)$ 之和 = ?



2. 求級數 $1 \cdot 30 + 2 \cdot 29 + 3 \cdot 28 + \cdots + 28 \cdot 3 + 29 \cdot 2 + 30 \cdot 1$ 之和 = ?



1. $\frac{1}{6}n(n+1)(2n+7)$ 2. 4960



回家作業



3. (91 學測試題)

某甲自 89 年 7 月起，每月 1 日均存入銀行 1000 元，言明以月利率 0.5% 按月複利計息，到 90 年 7 月 1 日提出。某乙則於 89 年 7 月起，每單月(一月、三月、五月、...)1 日均存入銀行 2000 元，亦以月利率 0.5% 按月複利計息，到 90 年 7 月 1 日提出。一整年中，兩人都存入本金 12000 元。提出時，甲得本利和 A 元，乙得本利和 B 元。問下列選項何者為真？

(1) $B > A$

(2) $A = 1000 \left[\left(\frac{1005}{1000} \right)^1 + \left(\frac{1005}{1000} \right)^2 + \cdots + \left(\frac{1005}{1000} \right)^{12} \right]$

(3) $B = 2000 \left[\left(\frac{1005}{1000} \right)^2 + \left(\frac{1005}{1000} \right)^4 + \left(\frac{1005}{1000} \right)^6 + \cdots + \left(\frac{1005}{1000} \right)^{12} \right]$

(4) $A < 12000 \left(\frac{1005}{1000} \right)^{12}$

(5) $B < 12000 \left(\frac{1005}{1000} \right)^{12}$



3. (1)(2)(3)(4)(5)



回家作業



4. (94 學測試題)

利用公式 $1^3 + 2^3 + \cdots + n^3 = \left(\frac{n(n+1)}{2}\right)^2$ ，可計算出 $(11)^3 + (12)^3 + \cdots + (20)^3$ 之值為

- (1) 41075 (2) 41095 (3) 41115 (4) 41135 (5) 41155

5. (105學測試題)

設 $\langle a_n \rangle$ 為一等比數列。已知前十項的和為 $\sum_{k=1}^{10} a_k = 80$ ，前五個奇數項的和為

$a_1 + a_3 + a_5 + a_7 + a_9 = 120$ ，請選出首項 a_1 的正確範圍。

- (1) $a_1 < 80$ (2) $80 \leq a_1 < 90$ (3) $90 \leq a_1 < 100$
(4) $100 \leq a_1 < 110$ (5) $110 \leq a_1$



4. (1) 5. (4)

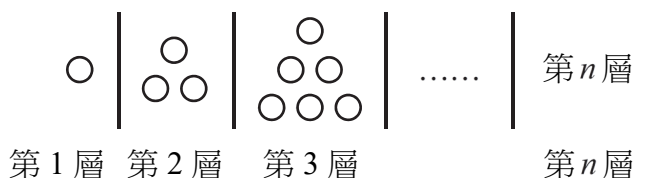
主題 13 堆垛

SPYN



【觀念一】正三角形垛

(1) 圖示：

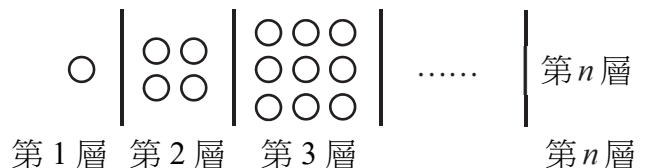


(2) n 層總數 $=1+(1+2)+(1+2+3)+\cdots+(\text{第}n\text{層})$

=

【觀念二】正方形垛

(1) 圖示：

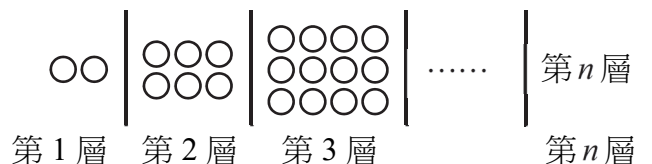


(2) n 層總數 $=1^2+2^2+3^2+\cdots+(\text{第}n\text{層})$

=

【觀念三】長方形垛

(1) 圖示：



(2) n 層總數 $=1\times 2+2\times 3+\cdots+(\text{第}n\text{層})$

=

例 1. (能力指標：正三角形垛)

有球1000個，疊成正三角形垛，最多可疊幾層，還剩幾個球？

解： 令疊到 n 層：

球總數 =



例 2. (能力指標：堆垛應用)

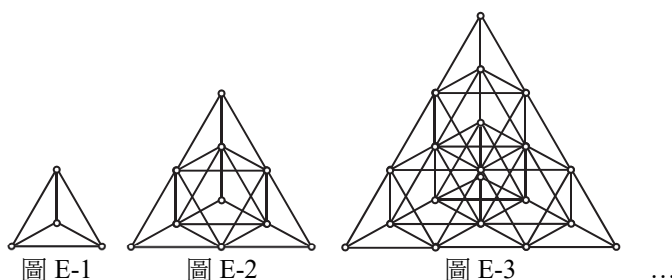
用單位長的不銹鋼條焊接如下圖系列的四面體鐵架，圖中的

小圈圈「。」表示焊接點，圖 E-1 有兩層共四個焊接點，

圖 E-2 有三層共 10 個焊接點，圖 E-3 有四層共 20 個焊接點。

試問依此規律，推算圖 E-5 有六層共多少個焊接點？答_____個。

解：





回家作業



1. 已知一堆硬幣可剛好堆成一個 5 層的正方形垛，將這堆硬幣重新堆成三角垛，最少要補充 _____ 個硬幣才能剛好堆成完整的三角垛。

本題無數位影音服務，
請同學詳實練習並善用輔導資源



1. 1



回家作業



2. (84 學測試題)

下圖表示長方形垛的疊法：



某水果販將橘子堆成長方形垛。若最底層長邊有 10 個橘子，短邊有 5 個，則此長方形垛最多有幾個橘子？

- (1) 110 (2) 120 (3) 130 (4) 140 (5) 150



2. (3)

主題 14 相消級數



例 1. (能力指標：分母二項相消)

$$\frac{1}{1 \cdot 2} + \frac{1}{2 \cdot 3} + \frac{1}{3 \cdot 4} + \cdots + \frac{1}{n(n+1)}$$

解：

GTXI



例 2. (能力指標：分母三項相消)

$$\frac{1}{1 \cdot 2 \cdot 3} + \frac{1}{2 \cdot 3 \cdot 4} + \frac{1}{3 \cdot 4 \cdot 5} + \cdots + \frac{1}{n(n+1)(n+2)}$$

解：

JRKH



例 3. (能力指標：分母平方差相消)

$$\frac{1}{4 \cdot 1^2 - 1} + \frac{1}{4 \cdot 2^2 - 1} + \frac{1}{4 \cdot 3^2 - 1} + \cdots + \frac{1}{4n^2 - 1}$$

解：



例 4. (能力指標：有理化相消)

$$\frac{1}{\sqrt{2}+1} + \frac{1}{\sqrt{3}+\sqrt{2}} + \frac{1}{\sqrt{4}+\sqrt{3}} + \cdots + \frac{1}{\sqrt{n+1}+\sqrt{n}}$$

解：



例 5. (能力指標：有理化相消)

$$\frac{1}{2\sqrt{1}+1\sqrt{2}} + \frac{1}{3\sqrt{2}+2\sqrt{3}} + \frac{1}{4\sqrt{3}+3\sqrt{4}} + \cdots + \frac{1}{(n+1)\sqrt{n}+n\sqrt{n+1}}$$

解：





回家作業



1. 求級數 $\frac{1}{1 \cdot 2} + \frac{1}{2 \cdot 3} + \frac{1}{3 \cdot 4} + \cdots + \frac{1}{n(n+1)}$ 的和。

【提示】 $\frac{1}{k(k+1)} = \frac{1}{k} - \frac{1}{k+1}$

ELYG



2. 若 $\frac{1}{1 \cdot 3} + \frac{1}{2 \cdot 4} + \frac{1}{3 \cdot 5} + \cdots + \frac{1}{32 \cdot 34} = \frac{p}{q}$, p, q 為互質之正整數, 則 $q - p = ?$

3. 求級數 $\frac{1}{2 \cdot 3 \cdot 4} + \frac{1}{3 \cdot 4 \cdot 5} + \frac{1}{4 \cdot 5 \cdot 6} + \cdots + \frac{1}{(n+1) \cdot (n+2) \cdot (n+3)}$ 之和?

簡答

1. $1 - \frac{1}{n+1}$ 2. 157 3. $\frac{1}{12} - \frac{1}{2(n+2)(n+3)}$

數位[㊦] 延伸閱讀



1. (能力指標：階乘相消)

$$1 \cdot 1! + 2 \cdot 2! + 3 \cdot 3! + \cdots + n \cdot n!$$

解：



2. (能力指標：階乘相消)

$$\frac{1}{2!} + \frac{2}{3!} + \frac{3}{4!} + \cdots + \frac{n}{(n+1)!}$$

解：



3. (能力指標：分母奇數乘積相消)

NCVV



$$\frac{1}{1 \times 3} + \frac{2}{1 \times 3 \times 5} + \frac{3}{1 \times 3 \times 5 \times 7} + \cdots + \frac{n}{1 \times 3 \times 5 \times 7 \times \cdots (2n+1)}$$

$$\text{解} : = \frac{1}{2} \left[\left(1 - \frac{1}{1 \times 3} \right) + \left(\frac{1}{1 \times 3} - \frac{1}{1 \times 3 \times 5} \right) + \left(\frac{1}{1 \times 3 \times 5} - \frac{1}{1 \times 3 \times 5 \times 7} \right) + \cdots \right]$$

$$+ \left[\frac{1}{1 \times 3 \times 5 \times \cdots \times (2n-1)} - \frac{1}{1 \times 3 \times 5 \times \cdots \times (2n-1)(2n+1)} \right]$$

$$= \frac{1}{2} \left[1 - \frac{1}{1 \times 3 \times 5 \times \cdots \times (2n-1)(2n+1)} \right]$$

主題 15 等比幾何應用



《 《 < < < 《 《 《 《 《 < < < < 《 《 《 < <

例 1. (能力指標：幾何應用)

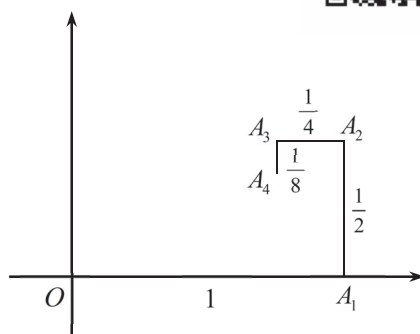
如圖， $\overline{OA_1} = 1$ ， $\overline{A_1A_2} = \frac{1}{2}$ ， $\overline{A_2A_3} = \frac{1}{4}$ ， $\dots$ ，求 A_{10} 坐標。

UQIX



解： (1) x 坐標 =

(2) y 坐標 =



例 2. (能力指標：幾何應用)

有長為 1 的繩子一條，切取 $\frac{2}{3}$ 為周長作一正三角形，令其面積為 S_1 ；從餘下的 $\frac{1}{3}$ 中切取 $\frac{2}{3}$ 為周長作第二個三角形，令其面積為 S_2 ；如此繼續為之，求 $S_1, S_2, S_3, \dots, S_n$ 的總和。

FVUQ



解： 1° 第一個三角形周長 = $\frac{2}{3}$ ，邊長 = $\frac{2}{9}$ ，面積 $S_1 = \frac{\sqrt{3}}{4} \left(\frac{2}{9}\right)^2$

第二個三角形周長 = $\frac{2}{9}$ ，邊長 = $\frac{2}{27}$ ，面積 $S_2 = \frac{\sqrt{3}}{4} \left(\frac{2}{27}\right)^2$

2° $S_1 + S_2 + S_3 + \dots + S_n$

$$= \frac{\frac{\sqrt{3}}{4} \left(\frac{2}{9}\right)^2 [1 - \left(\frac{1}{9}\right)^n]}{1 - \frac{1}{9}}$$

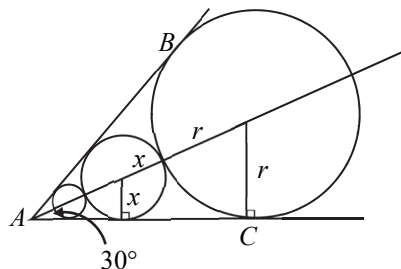
例 3. (能力指標：幾何應用)

如圖： $\angle BAC = 60^\circ$ ，最大圓 S_1 的面積為 1,000 平方公分，
求圓 $S_1, S_2, S_3, \dots, S_n$ 面積的總和。



解：1° 令最大圓半徑 r ，第二圓半徑 x

$\Rightarrow$



$$2^\circ S_1 + S_2 + S_3 + \dots + S_n$$

=

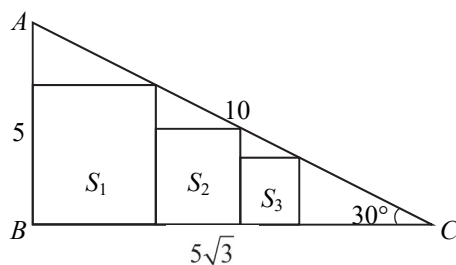
例 4. (能力指標：幾何應用)

如圖： $\triangle ABC$ 為直角 $\triangle$ ， $\angle C = 30^\circ$ ， $\overline{AC} = 10$ ， $S_1, S_2, S_3, \dots, S_n$
分別表內接正方形面積，試求 n 個內接正方形面積總和。



解：1° 令 S_1 邊長為 x

則



2° n 個正方形邊長為

$$\therefore S_1 + S_2 + S_3 + S_4 + \dots + S_n$$

=

例 5. (能力指標：幾何應用)



如圖，設銳角 $\triangle ABC$ 之底邊 $\overline{BC} = 5$ ，頂點 A 至 $\overline{BC}$ 之距離 12。
今於 $\overline{BC}$ 邊上作內接於 $\triangle ABC$ 之正方形，再作內接於 $\triangle AB'C'$ 之正方形....，求 n 個正方形之面積總和。

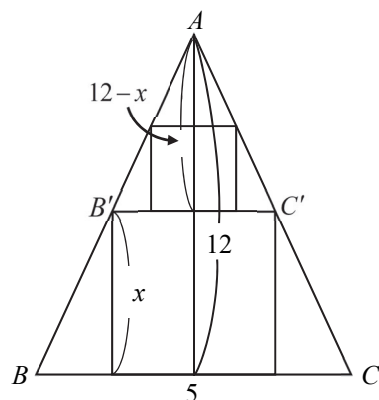
解：1° 令最大正方形邊長 x

$$\Rightarrow \frac{12}{5} = \frac{12-x}{x} \Rightarrow 60-5x=12x$$

$$\Rightarrow x = \frac{60}{17} = 5 \times \underbrace{\frac{12}{17}}_{\text{為縮小公比}}$$

2° n 個正方形邊長為

面積和 =



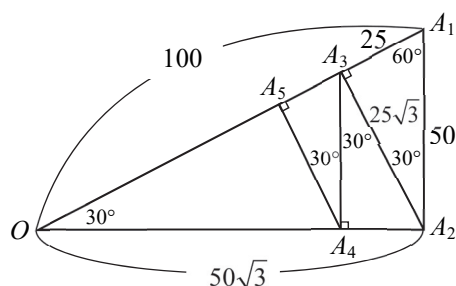
例 6. (能力指標：幾何應用)



如圖， $\triangle OA_1A_2$ 為直角 $\triangle$ ， $\angle A_2 = 90^\circ$ ， $\angle A_1OA_2 = 30^\circ$ ， $\overline{OA_1} = 100$ ， A_2 往 $\overline{OA_1}$ 作垂線得垂足 A_3 ， A_3 往 $\overline{OA_2}$ 作垂線得垂足 A_4 ，如此繼續作下去，求 $\overline{A_1A_2} + \overline{A_2A_3} + \overline{A_3A_4} + \cdots + \overline{A_nA_{n+1}}$ 的總和。

解： $\overline{A_1A_2} + \overline{A_2A_3} + \cdots + \overline{A_nA_{n+1}}$

=



例 7. (能力指標：幾何應用)

SDZS



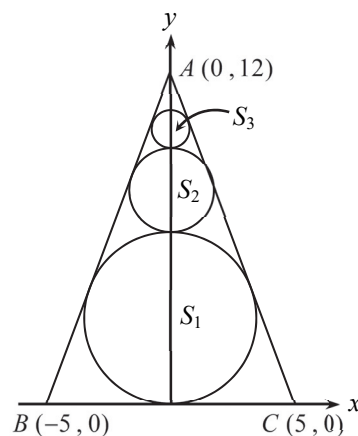
如右圖，在 $\triangle ABC$ 中作內切圓 S_1 ，再作圓 S_2 切圓 S_1 以及 $\overline{AB}$ ， $\overline{AC}$ 兩邊，再作圓 S_3 切圓 S_2 以及 $\overline{AB}$ ， $\overline{AC}$ 兩邊。

如此繼續作下去，得圓序列 $S_1, S_2, S_3, \dots$ ；設其面積分別為 $A_1, A_2, A_3, \dots, A_n$ 。

(1) 求 A_1 。

(2) 求級數 $A_1 + A_2 + A_3 + \dots + A_n$ 之和。

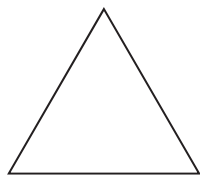
解：



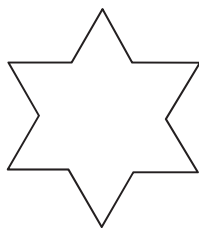
例 8. (能力指標：碎形)



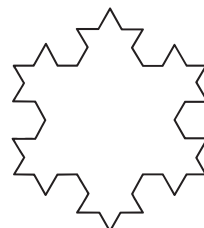
設 $T_1, T_2, T_3, \dots$ 為一群多邊形，其作法如下： T_1 為邊長等於 1 的正三角形；以 T_n 每一邊中間三分之一的線段為一邊向外作正三角形，然後將該三分之一線段抹去所得的多邊形為 T_{n+1} ， $n=1, 2, \dots$ (如圖所示)。令 a_n 表 T_n 的周長，請計算 T_3 的面積及 $\sum_{i=1}^n \frac{1}{a_i}$ 之和。



T_1



T_2



T_3

解：

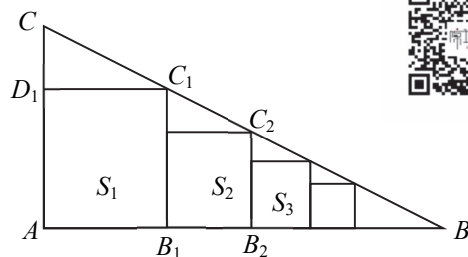


回家作業



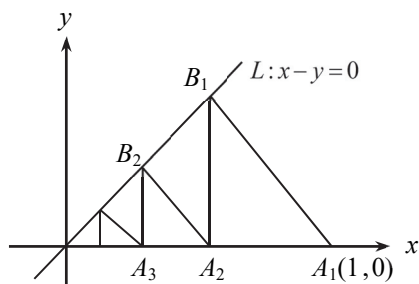
1. $\triangle ABC$ 是直角三角形，已知

$\overline{AB} = 24$, $\overline{AC} = 16$ ，在 $\triangle ABC$ 內作一個內接正方形 $AB_1C_1D_1$ ，其面積為 S_1 ，再在 $\triangle B_1BC_1$ 內作第二個內接正方形 $B_1B_2C_2D_2$ ，其面積為 S_2 ，仿此繼續進行，求 n 個正方形面積的和。



2. 在坐標平面上， $L: x - y = 0$ ，由點 $A_1(1, 0)$ 作 L 的垂線，交於 B_1 ，再由 B_1 作 x 軸的垂線，交於 A_2 ，又再由 A_2 作 L 的垂線，交於 B_2 ，如圖，依此類推，繼續得到 $A_3, B_3, A_4, B_4, \dots$ ，求級數

$\overline{A_1B_1} + \overline{B_1A_2} + \overline{A_2B_2} + \overline{B_2A_3} + \overline{A_3B_3} + \dots + \overline{A_nB_n} + \overline{B_nA_{n+1}}$ 之和。



簡答

1. $144 \left[1 - \left(\frac{9}{25} \right)^n \right]$ 2. $(\sqrt{2} + 1) - (\sqrt{2} + 1) \left(\frac{1}{2} \right)^n$



回家作業



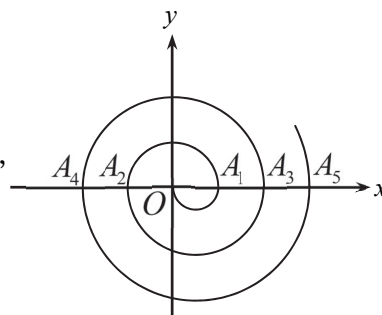
3. 有一隻烏龜由原點出發，其行走留下的軌跡

如右圖所示，設 A_1 的坐標為 $(1, 0)$ ， A_2 的坐標

為 $(-1, 0)$ ， A_3 的坐標為 $(2, 0)$ ， A_4 的坐標為

$(-2, 0)$ ，(每個 $\widehat{A_k A_{k+1}}$ 均為半圓， $k = 0, 1, 2, \dots$ ，

又 A_0 為 O 點)



(1) A_{2n} 的坐標為何？

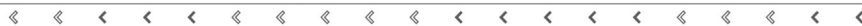
(2) A_{2n+1} 的坐標為何？

(3) 烏龜由原點到點 A_{2n} 所行走留下的軌跡長度為何？



3. (1) $(-n, 0)$ (2) $(n+1, 0)$ (3) $\frac{n(2n+1)\pi}{2}$

主題 16 數列級數綜合題型



例 1. (能力指標：等差拆項)

已知 $\langle a_k \rangle$ 為首項 $a_1 = 1$ 、公差 $d > 0$ 的等差數列，

若 $\frac{1}{a_1 a_2} + \frac{1}{a_2 a_3} + \cdots + \frac{1}{a_{13} a_{14}}$ 為整數，則公差 d 最小

的可能值為_____。

解：

UKAM



例 2. (能力指標：G.P.)

設 $\langle a_n \rangle$ 為一個首項不為 0 的等比數列，滿足 $2a_1 + a_2 = 0$ 且

$a_1 + a_2 + a_3 = 3$ ，則下列何者正確？

- (1) $a_1 = 2$ (2) 公比 $=\frac{1}{2}$ (3) $a_1 + a_2 + \cdots + a_9 = 170$
(4) $a_4 + a_5 + a_6 = -24$ (5) $a_2 + a_3 + a_4 = 14$

解：

FCJR



例 3. (能力指標：複利)



已知西瓜的成分分為水分和非水分，將某農場剛採收的西瓜送檢後發現，其中水分佔重量的99%，非水分佔重量的1%。

由以往的監測得知，西瓜採收後每經過一天，其水分會因為蒸發而減少為前一天的99%，非水分的部分則不會改變。若此農場採收 10000 公斤的西瓜，令 a_n 表示採收後經過 n 天的西瓜總重量(n 為正整數)。請選出下列正確的選項。

(1) $a_1 = 9801$ (公斤) (2) $a_2 = a_1 \times \frac{99}{100} + 100$

(3) $a_{n+1} = \frac{99}{100}a_n + 1, n \geq 1$ (4) $a_n = \left(\frac{99}{100}\right)^{n+1} \times 10000 + 100$

(5) 若經過一段時間後發現這批西瓜的水分僅剩96%，則此時西瓜總重量為 2500 公斤

解：

例 4. (能力指標：數列)



設 $a_1, a_2, a_3, \dots$ 為一實數數列，且對所有的正整數 n 滿足

$a_{n+1} = 1^3 + 2^3 + 3^3 + \dots + n^3 - a_n$ 。請問下列哪些選項是正確的？

- (A) 如果 $a_1 = 1$ ，則 $a_2 = 0$
- (B) 如果 a_1 是奇數，則此數列中有可能出現連續兩項都是偶數
- (C) 如果 a_1 是無理數，則此數列的每一項都是無理數
- (D) $a_1 \leq a_3 \leq \dots \leq a_{2n+1} \leq \dots$ ，(n 為正整數)
- (E) 如果 a_k 是奇數，則 $a_{k+2}, a_{k+4}, \dots, a_{k+2n}, \dots$ 都是奇數(n 為正整數)

解：

例 5. (能力指標：費氏數列)



費氏數列 $\langle F_n \rangle$ ， $F_1 = F_2 = 1$ ， $F_{n+2} = F_{n+1} + F_n$ ($n \in \mathbb{N}$)，

若 F_a, F_b, F_c 三項成等差(公差為正)且 $a + b + c = 1001$ ，

則 $2a + b - 3c$ 的值為_____。

解：

例 6. (能力指標：遞迴數列)



數列 $\langle a_n \rangle$ 中， $a_1 = \frac{1}{2}$ ，且 $a_{n+1} - a_n = \frac{1}{n^2 + 2n} a_n$ 對所有正整數 n 都成立，則下列哪些選項是正確的？

- (1) $\frac{a_{n+1}}{a_n} = \frac{(n+1)^2}{n(n+2)}$ (2) $a_{100} = \frac{100}{101}$
- (3) $a_1 \times a_2 \times \cdots \times a_{100} = \frac{1}{101}$ (4) $a_n < a_{n+1}$ 對所有正整數 n 都成立
- (5) $a_n < 1$ 對所有正整數 n 都成立

解：

例 7. (能力指標：遞迴關係)



有一數列

$$\langle a_1, a_2, a_3, a_4, \dots \rangle = \langle 12008, 120308, 1203308, \dots \rangle,$$

從第二項起的每一項均為在前一項的兩個 0 中間多放入一個 3 而得。試回答下列各問題：

- (1) 若數列 $\langle a_n \rangle$ 中的每一項滿足遞迴關係式 $a_n = A \cdot a_{n-1} + B (n \geq 2)$ ，其中 A 、 B 為常數，則 A 、 B 之值各為多少？
- (2) 試以數學歸納法證明：對於任何正整數 n ， a_n 一定是 19 的倍數。

解：

例 8. (能力指標：找規則)

設一數列 a_n ，滿足 $a_{n+2} = a_{n+1} - a_n$ ， $n \in N$ ，且 $a_{88} = 5$ ， $a_8 = 7$ ，
試求 $a_1 + a_2 + \cdots + a_{107} = \underline{\hspace{2cm}}$ 。



解：

例 9. (能力指標：等差級數)

設等差數列 $\{a_n\}$ 的前 n 項和為 S_n ，若 $S_4 \geq 10$ ， $S_5 \leq 15$ ，則 a_4 的
最大值為

- (1) 2 (2) 3 (3) 4 (4) 5 (5) 6

解：



例 10. (能力指標：遞迴關係)

已知 $a_1 = \frac{1}{4} + \frac{1}{9^{10}}$, $2a_{n+1} - 6a_n + 1 = 0, \forall n \in \mathbb{N}$,

則 $a_{25} =$ _____。

解：



例 11. (能力指標：數列)

設 $\langle a_n \rangle$ 為一等差數列， $\langle b_n \rangle$ 為一等比數列， m 、 k 為任意自然數，請選出下列敘述為真的選項：

(1) 若 $m = k + 3$ ，則 $a_2 + a_m = a_5 + a_k$

(2) 若 $m = k + 3$ ，則 $b_2 \times b_m = b_5 \times b_k$

(3) $3a_4 = a_2 + a_3 + a_7$

(4) $b_2 = \sqrt{b_1 \times b_3}$

(5) 此兩數列不可能是相同的數列

解：



例 12. (能力指標：相消級數)



小沂走進教室，發現黑板上寫了

121, 144, 169, 196, 225, $\dots$, 361, 400 共 10 個連續的完全

平方數，於是他把每個數字減去 1，改成

120, 143, 168, 195, 224, $\dots$, 360, 399。

之後小風走進來，又把每個數字改為倒數，變成

$\frac{1}{120}, \frac{1}{143}, \frac{1}{168}, \frac{1}{195}, \frac{1}{224}, \dots, \frac{1}{360}, \frac{1}{399}$ 。試求

(1) 小沂所寫的 10 個數字的總和為 _____。

(2) 小風所寫的 10 個數字的總和為 _____。

解：

例 13. (能力指標：Fractal 碎形)



如右圖，給定一個邊長為 2 的正方形，依下列步驟將其分割著色：

步驟 1：將其等分成 4 個正方形，並將左下角的正方形塗成灰色，
得到圖 1

步驟 2：將圖 1 中剩下的 3 個未塗色的正方形分別再等分成 4 個正方形，
並將其左下角的正方形塗成灰色，得到圖 2

依照此規律繼續分割與著色，並設 a_n 表示圖 n 中灰色正方形的總面積，
例如 $a_1 = 1$ ，關於數列 $\langle a_n \rangle$ ，選出正確的選項。

(1) $a_n = \left(\frac{7}{4}\right)^{n-1}, n \geq 1$

(2) $a_n = \frac{3n+1}{4}, n \geq 1$

(3) $a_n = 4 \left[1 - \left(\frac{3}{4}\right)^n \right], n \geq 1$

(4) $\begin{cases} a_1 = 1 \\ a_{n+1} = a_n + 3^n, n \geq 1 \end{cases}$

(5) $\begin{cases} a_1 = 1 \\ a_{n+1} = a_n + \left(\frac{3}{4}\right)^n, n \geq 1 \end{cases}$

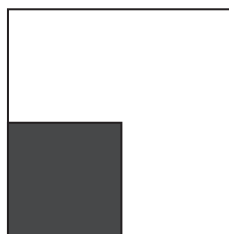


圖 1

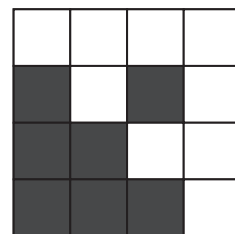


圖 2

解：

數列級數綜合題型解析

1.【答】： $\frac{1}{156}$

【解】：1° $\frac{1}{a_1} - \frac{1}{a_2} = \frac{a_2 - a_1}{a_1 a_2} = \frac{d}{a_1 a_2} \Rightarrow \frac{1}{a_1 a_2} = \frac{1}{d} \left(\frac{1}{a_1} - \frac{1}{a_2} \right)$

$$\begin{aligned} 2^\circ & \frac{1}{a_1 a_2} + \frac{1}{a_2 a_3} + \cdots + \frac{1}{a_{13} a_{14}} \\ &= \frac{1}{d} \left[\left(\frac{1}{a_1} - \frac{1}{a_2} \right) + \left(\frac{1}{a_2} - \frac{1}{a_3} \right) + \cdots + \left(\frac{1}{a_{13}} - \frac{1}{a_{14}} \right) \right] \\ &= \frac{1}{d} \left(\frac{1}{a_1} - \frac{1}{a_{14}} \right) = \frac{1}{d} \left(1 - \frac{1}{1+13d} \right) = \frac{1}{d} \cdot \frac{13d}{1+13d} = \frac{13}{1+13d} \end{aligned}$$

3° 欲求 d 最小 $\Rightarrow 1+13d$ 最小 $\Rightarrow \frac{13}{1+13d}$ 最大

令 $\frac{13}{1+13d} = 12 \Rightarrow 13 = 12 + 156d \Rightarrow d = \frac{1}{156}$

2.【答】：(4)

【解】：1° $2a_1 + a_2 = 0 \Rightarrow a_2 = -2a_1 \Rightarrow r = -2$

2° $a_1 + a_2 + a_3 = 3 \Rightarrow a_1 - 2a_1 + 4a_1 = 3 \Rightarrow 3a_1 = 3 \Rightarrow a_1 = 1$

(3) $a_1 + a_2 + \cdots + a_9 = \frac{a_1(1-r^9)}{1-r} = \frac{1-(-2)^9}{3} = \frac{2^9+1}{3} = 171$

(4) $a_4 + a_5 + a_6 = r^3 + r^4 + r^5 = -8 + 16 - 32 = -24$

(5) $a_2 + a_3 + a_4 = r + r^2 + r^3 = -2 + 4 - 8 = -6$

3.【答】：(3)(4)

【解】：1° 依題意 $a_n = 10000 \times \frac{1}{100} + 100000 \times \frac{99}{100} \times \left(\frac{99}{100} \right)^n$

$$= 100 + 10000 \times \left(\frac{99}{100} \right)^{n+1}$$

2° $a_1 = 100 + 9801 = 9901$

3° $a_2 = (a_1 - 100) \times \frac{99}{100} + 100 = \frac{99}{100} a_1 + 1$

4° $a_{n+1} = (a_n - 100) \times \frac{99}{100} + 100 = \frac{99}{100} a_n + 1$

5° $a_n = 100 + 100000 \times \frac{99}{100} \times 96\% = 100 + 99 \times 96 = 9604$

4.【答】：(A)(C)(D)

【解】：原式 $\Rightarrow a_{n+1} = \left[\frac{n(n+1)}{2}\right]^2 - a_n$

(A) $a_2 = \left[\frac{1 \times 2}{2}\right]^2 - 1 = 0$

(B) 令 $\langle b_n \rangle = \left[\frac{n(n+1)}{2}\right]^2$ ：若 b_n 為偶數，則 $\frac{n(n+1)}{2}$ 為偶數

$\Rightarrow n(n+1)$ 為 4 的倍數 $\Rightarrow n = 4k, 4k-1 (k \in N)$

$\therefore b_{4k}, b_{4k-1}$ 為偶數， b_{4k-2}, b_{4k-3} 為奇數 $\Rightarrow$ 奇偶性為四項一循環

$$\Rightarrow \begin{cases} a_2 = 1 - a_1 \Rightarrow a_2 \text{ 為偶數} \\ a_3 = 9 - a_2 \Rightarrow a_3 \text{ 為奇數} \\ a_4 = 36 - a_3 \Rightarrow a_4 \text{ 為奇數} \\ a_5 = 100 - a_4 \Rightarrow a_5 \text{ 為奇數} \end{cases} \Rightarrow \text{不可能連續出現兩項偶數}$$

(C) 承上，數列 $\langle b_n \rangle$ 的每一項皆為有理數，故正確

(D) $a_{n+1} + a_n = \left[\frac{n(n+1)}{2}\right]^2$

$\rightarrow a_{n+2} + a_{n+1} = \left[\frac{(n+1)(n+2)}{2}\right]^2$

$$a_{n+2} - a_n = (n+1)^3 \Rightarrow \langle a_n \rangle \text{ 為遞增數列}$$

(E) 承上，若 k 為偶數；則 a_{k+2} 為偶數

5.【答】：-7

【解】：
$$F_{n+2} = F_{n+1} + F_n$$

$$+) F_{n+2} + F_{n+1} = F_{n+3}$$

$$2F_{n+2} = F_{n+3} + F_n$$

$$\Rightarrow F_{n+2} = \frac{F_n + F_{n+3}}{2} \text{ 可知 } F_n, F_{n+2}, F_{n+3} \text{ 成等差}$$

令 $a = n, b = n+2, c = n+3$

且 $n + n+2 + n+3 = 1001 \Rightarrow n = 332$

故 $2a + b - 3c = 2n + n+2 - 3n-9 = -7$

6.【答】：(1)(2)(3)(4)(5)

$$\text{【解】：(1) } a_{n+1} - a_n = \frac{1}{n^2 + 2n} a_n \Rightarrow a_{n+1} = \frac{n^2 + 2n + 1}{n^2 + 2n} a_n = \frac{(n+1)^2}{n(n+2)} a_n$$

$$\Rightarrow \frac{a_{n+1}}{a_n} = \frac{(n+1)^2}{n(n+2)}$$

$$(2) a_2 = \frac{2 \cdot 2}{1 \cdot 3} a_1 = \frac{2 \cdot 2}{1 \cdot 3} \cdot \frac{1}{2} = \frac{2}{3}, a_3 = \frac{3 \cdot 3}{2 \cdot 4} a_2 = \frac{3 \cdot 3}{2 \cdot 4} \cdot \frac{2}{3} = \frac{3}{4}$$

$$\text{依此類推可得 } a_n = \frac{n}{n+1}$$

$$\therefore a_{100} = \frac{100}{101}$$

$$(3) a_1 \times a_2 \times \cdots \times a_{99} \times a_{100} = \frac{1}{2} \times \frac{2}{3} \times \cdots \times \frac{99}{100} \times \frac{100}{101} = \frac{1}{101}$$

$$(4) \text{假分數越加越大} \Rightarrow a_n < a_{n+1}$$

$$(5) a_n = \frac{n}{n+1} < 1$$

7.【答】：(1) $A=10, B=228$ (2) 略

$$\text{【解】：(1) } \begin{cases} 120308 = 12008A + B \\ 1203308 = 120308A + B \end{cases} \Rightarrow A=10, B=228$$

(2) $1^\circ n=1$ 時， $a_1=12008=19 \times 632$ 為 19 的倍數

2° 設 $n=k$ ($k \in \mathbb{N}$) 時， a_k 為 19 的倍數，令 $a_k=19t, t \in \mathbb{N}$

$$\text{當 } n=k+1 \text{ 時，} a_{k+1} = 10 \cdot a_k + 228 = 10 \cdot 19t + 19 \cdot 12 = 19(10t+12)$$

$\therefore a_{k+1}$ 亦為 19 的倍數

由數學歸納法知，對於所有正整數 n ， a_n 必為 19 的倍數

8.【答】：12

$$\text{【解】：} 1^\circ a_{n+2} = a_{n+1} - a_n \Rightarrow \begin{array}{cccccc|cc} \overbrace{a_1 \ a_2 \ a_3 \ a_4 \ a_5 \ a_6}^{6 \text{ 個一循環}} & & a_7 & a_8 \\ \hline a & b & b-a & -a & -b & a-b & a & b \end{array}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} a_{88} = 5 \\ a_8 = 7 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a_{6 \times 14 + 4} = a_4 = -a = 5 \\ a_{6 \times 1 + 2} = a_2 = b = 7 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a = -5 \\ b = 7 \end{cases}$$

$$\begin{aligned} 2^\circ a_1 + a_2 + \cdots + a_{107} &= \overbrace{(a_1 + \cdots + a_6) + (a_7 + \cdots + a_{12}) + \cdots + (a_{101} + \cdots + a_{106})}^{17 \text{ 組}} + (\text{五項和}) \\ &= b - a = 7 - (-5) = 12 \end{aligned}$$

9.【答】：(3)

$$\begin{aligned} \text{【解】：} 1^\circ & \begin{cases} (2a_1 + 3d) \frac{4}{2} \geq 10 \\ (2a_1 + 4d) \frac{5}{2} \leq 15 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 2a_1 + 3d \geq 5 \\ 2a_1 + 4d \leq 6 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} -2a_1 - 3d \leq -5 & (\text{乘 } k > 0) \\ 2a_1 + 4d \leq 6 & (\text{乘 } m > 0) \end{cases} \\ & \text{得 } \begin{cases} -2k + 2m = 1 \\ -3k + 4m = 3 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} k = 1 \\ m = \frac{3}{2} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} -2a_1 - 3d \leq -5 \\ 3a_1 + 6d \leq 9 \end{cases} \\ & \Rightarrow a_1 + 3d \leq 4 \Rightarrow a_4 \leq 4 \end{aligned}$$

10.【答】： $\frac{325}{4}$

$$\text{【解】：} 2a_{n+1} - 6a_n + 1 = 0 \Rightarrow a_{n+1} = 3a_n - \frac{1}{2}$$

$$\text{令 } (a_{n+1} - \alpha) = 3(a_n - \alpha) \Rightarrow a_{n+1} = 3a_n - 2\alpha \Rightarrow \alpha = \frac{1}{4}$$

$\langle a_{n+1} - \frac{1}{4} \rangle$ 為公比 3 的等比數列

$$\Rightarrow a_{25} - \frac{1}{4} = (a_1 - \frac{1}{4}) \times 3^{24}$$

$$\Rightarrow a_{25} = (\frac{1}{4} + \frac{1}{3^{20}} - \frac{1}{4}) \times 3^{24} + \frac{1}{4} = 81 + \frac{1}{4} = \frac{325}{4}$$

11.【答】：(1)(2)(3)

【解】：(1) 令公差為 d ，公比為 r

若 $m = k + 3$

$$a_2 + a_m = a_1 + d + a_1 + (m-1)d = 2a_1 + md = 2a_1 + (k+3)d$$

$$a_5 + a_k = a_1 + 4d + a_1 + (k-1)d = 2a_1 + (k+3)d \quad \text{正確}$$

(2) 若 $m = k + 3$

$$b_2 \times b_m = b_1 \cdot r \times b_1 \cdot r^{m-1} = b_1^2 \cdot r^m = b_1^2 \cdot r^{k+3}$$

$$b_5 \times b_k = b_1 \cdot r^4 \times b_1 \cdot r^{k-1} = b_1^2 \cdot r^{k+3} \quad \text{正確}$$

$$(3) a_2 + a_3 + a_7 = a_1 + d + a_1 + 2d + a_1 + 6d = 3(a_1 + 3d) = 3a_4 \quad \text{正確}$$

$$(4) b_2^2 = b_1 \times b_3 \Rightarrow b_2 = \pm \sqrt{b_1 \times b_3} \quad \text{錯誤}$$

$$(5) \text{若 } a_1 = 1, d = 0, b_1 = 1, r = 1 \text{ 兩數列相同, 錯誤}$$

12.【答】：(1) 2475 (2) $\frac{431}{9240}$

【解】：(1) $(11^2 - 1) + (12^2 - 1) + \cdots + (20^2 - 1)$
 $= (11^2 + 12^2 + \cdots + 20^2) - 10$
 $= (1^2 + 2^2 + \cdots + 20^2) - (1^2 + 2^2 + \cdots + 10^2) - 10$
 $= \frac{1}{6} \cdot 20 \cdot 21 \cdot 41 - \frac{1}{6} \cdot 10 \cdot 11 \cdot 21 - 10$
 $= 2475$

(2) $\frac{1}{11^2 - 1} + \frac{1}{12^2 - 1} + \cdots + \frac{1}{20^2 - 1}$
 $= \frac{1}{(11-1)(11+1)} + \frac{1}{(12-1)(12+1)} + \cdots + \frac{1}{(20-1)(20+1)}$
 $= \frac{1}{2} \left[\left(\frac{1}{10} - \frac{1}{12} \right) + \left(\frac{1}{11} - \frac{1}{13} \right) + \cdots + \left(\frac{1}{19} - \frac{1}{21} \right) \right]$
 $= \frac{1}{2} \left(\frac{1}{10} + \frac{1}{11} - \frac{1}{20} - \frac{1}{21} \right)$
 $= \frac{431}{9240}$

13.【答】：(3)(5)

【解】：1° $a_1 = 1$

$$a_2 = a_1 + 3 \times \left(\frac{1}{2} \right)^2 = a_1 + \frac{3}{4}$$

$$a_3 = a_2 + 3^2 \times \left(\frac{1}{2^2} \right)^2 = a_2 + \left(\frac{3}{4} \right)^2$$

⋮

$$a_n = a_{n-1} + 3^{n-1} \times \left(\frac{1}{2^{n-1}} \right)^2 = a_{n-1} + \left(\frac{3}{4} \right)^{n-1}$$

$$\begin{aligned} \Rightarrow a_n &= 1 + \left(\frac{3}{4} \right) + \cdots + \left(\frac{3}{4} \right)^{n-1} = 1 + \frac{\frac{3}{4} [1 - (\frac{3}{4})^{n-1}]}{1 - \frac{3}{4}} \\ &= 1 + 3 [1 - (\frac{3}{4})^{n-1}] = 4 - \frac{3^n}{4^{n-1}} = 4 - 4 \times \left(\frac{3}{4} \right)^n \\ &= 4 [1 - (\frac{3}{4})^n] \end{aligned}$$



(一) 康托集的數學

康托(Georg Cantor)是 19 世紀末 20 世紀初德國偉大的數學家，集合論的創立者。一個知名的例子是康托集(Cantor set)，這是康托在 1883 年介紹的一種點集。建構康托集的方法非常簡單。首先將 $[0, 1]$ 挖掉中間



$(\frac{1}{3}, \frac{2}{3})$ 的區域，再將剩下的兩個區間 $[0, \frac{1}{3}]$ 和 $[\frac{2}{3}, 1]$ 挖掉其中三分之一等分的中間區間，及挖掉 $(\frac{1}{9}, \frac{2}{9})$ 和 $(\frac{7}{9}, \frac{8}{9})$ 。然後以此類推，一直不斷執行挖掉的操作，最後剩下的集合稱為康托集。設總長度為 1，若 n 次步驟後挖掉長度總和

為 a_n ，其遞迴關係式為
$$\begin{cases} a_1 = \frac{1}{3} \\ a_n = x \cdot a_{n-1} + y \quad (n \geq 2) \end{cases}$$
，其中 x, y 是常數，求

$(x, y) = \underline{\hspace{2cm}}$ 。



常用公式

$-$ $+$ $\%$ $=$ Σ π ∞ $\sqrt{\quad}$



公式 1 等差(AP)

$$(1) a_n = a_1 + (n-1)d = a_p + (n-p)d$$

$$(2) S_n = (a_1 + a_n) \frac{n}{2} = [2a_1 + (n-1)d] \frac{n}{2}$$

$$(3) S_n, S_{2n} - S_n, S_{3n} - S_{2n} \text{ 成等差}$$

公式 2 等比(GP)

$$(1) a_n = a_1 \cdot r^{n-1} = a_p \cdot r^{n-p}$$

$$(2) S_n \begin{cases} na_1 & (r=1) \\ = \frac{a_1(1-r^n)}{1-r} = \frac{a_1(r^n-1)}{r-1} & (r \neq 1) \end{cases}$$

$$(3) S_n, S_{2n} - S_n, S_{3n} - S_{2n} \text{ 成等比}$$

公式 3 常用的級數總和公式

$$(1) \sum_{k=1}^n k = 1 + 2 + 3 + \cdots + n = \frac{n(n+1)}{2}$$

$$(2) \sum_{k=1}^n k^2 = 1^2 + 2^2 + 3^2 + \cdots + n^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$$

$$(3) \sum_{k=1}^n k^3 = 1^3 + 2^3 + 3^3 + \cdots + n^3 = \left[\frac{n(n+1)}{2} \right]^2$$

$$(4) \sum_{k=1}^n k(k+1) = 1 \cdot 2 + 2 \cdot 3 + \cdots + n(n+1) = \frac{n(n+1)(n+2)}{3}$$

$$(5) 1 \cdot n + 2 \cdot (n-1) + \cdots + (n-1) \cdot 2 + n \cdot 1 = \frac{n(n+1)(n+2)}{6}$$

公式 4 相消法則

$$(1) \frac{1}{k(k+1)} = \left(\frac{1}{k} - \frac{1}{k+1} \right)$$

$$(2) \frac{1}{k(k+1)(k+2)} = \frac{1}{2} \left[-\frac{1}{k(k+1)} - \frac{1}{(k+1)(k+2)} \right]$$

$$(3) \frac{1}{4k^2 - 1} = \frac{1}{(2k-1)(2k+1)} = \frac{1}{2} \left(\frac{1}{2k-1} - \frac{1}{2k+1} \right)$$

$$(4) \frac{1}{\sqrt{k+1} + \sqrt{k}} = (\sqrt{k+1} - \sqrt{k})$$

公式 5 a_n 求法

$$(1) \text{等差數列} : a_n = a_1 + (n-1)d$$

$$(2) \text{等比數列} : a_n = a_1 r^{n-1}$$

$$(3) S_n \text{ 理論} : \begin{cases} \textcircled{1} a_1 = S_1 \\ \textcircled{2} a_n = S_n - S_{n-1} \quad (n \geq 2) \end{cases}$$

$$(4) \text{二項遞迴} : a_{n+1} = pa_n + q \Rightarrow a_n = A + B \times p^n$$