

陳立數學高頻率命題

使用說明

- 精選各校試題，切中段考要點

「高頻率命題」為收集全國各高中歷屆段考試題，由專業師資分析整理，精選該主題必備試題，隨時掌握重要段考趨勢。

- 主題式的編排，配合課程重點

題目皆依陳立數學教材主題分類，題型明確，便於同學課後練習，迅速複習當週上課重點。

以學生學習角度設計的排版模式，讓同學快速提升學習效率。

- 課後搭配講義，週週搭配進度

陳立數學每次課程平均進度為 3~5 個主題，課後除了教材中的主題作業，更搭配此本高頻率命題，練習更多題型，確切掌握課程重點，創造卓越效果，讓學習事半功倍。

- 雲端數位影音，學習不落人後

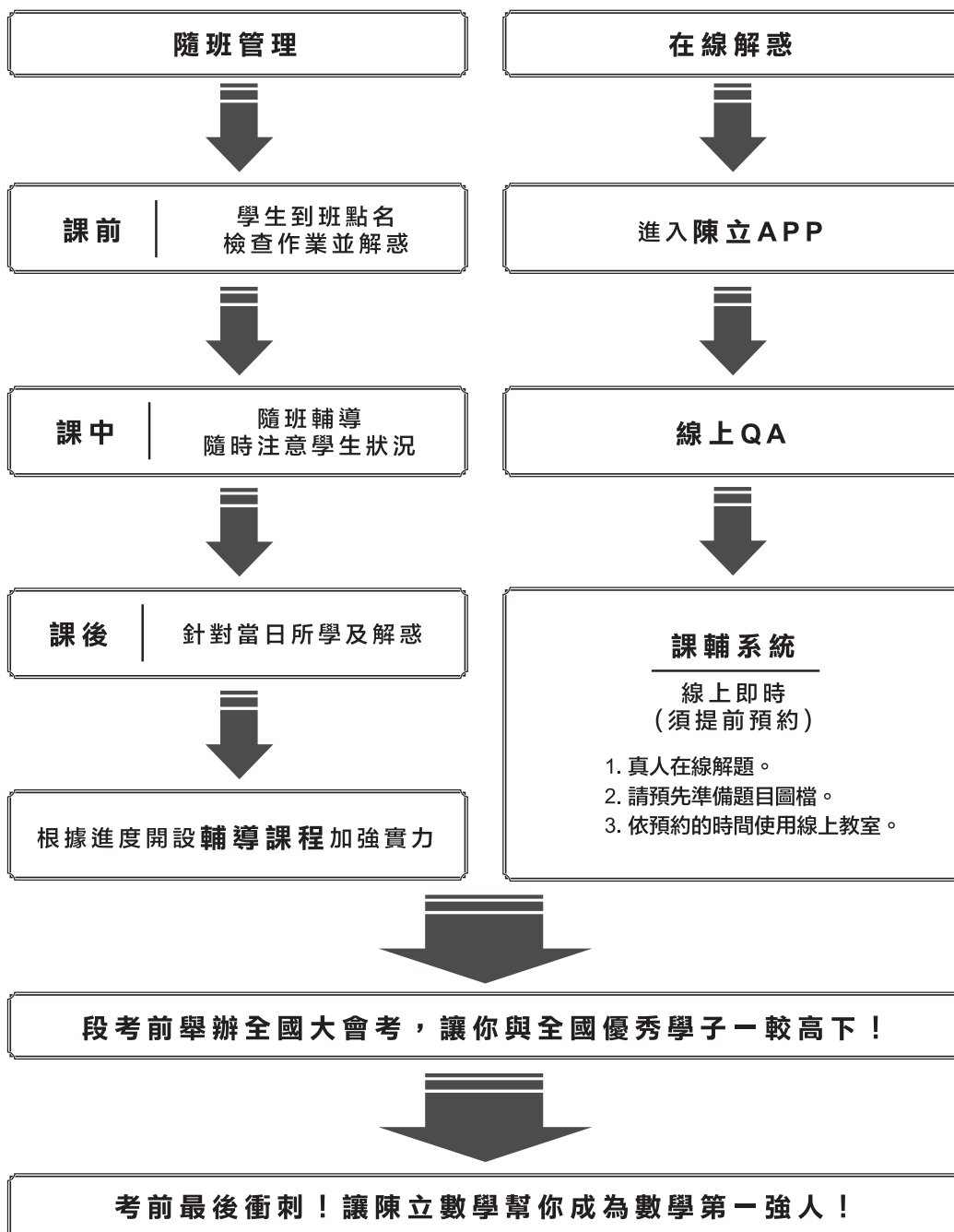
高頻率命題每個主題皆有附上 QR 碼，部分題目可連結影音講解，讓同學可以跟著解析一步步學習解題脈絡，可迅速解惑無需等待。不論身處何處都能於線上觀看最詳盡的解說，打破距離限制，享受最即時的影音教學。

善用專業教材・必能事半功倍

陳立教育集團

— 數 · 學 · 科 —
專業輔導系統

輔導無死角，線上再升級！



★ 多項式的運算與運用

主題 1	多項式加法、減法與乘法	6
主題 2	多項式除法	8
主題 3	多項式係數運算	12
主題 4	綜合除法與多項式變形	14
主題 5	餘式定理	18
主題 6	因式定理	22
主題 7	餘式的求法	24

★ 簡單多項式函數及其圖形

主題 8	一次函數及其圖形	31
主題 9	二次函數及其圖形	35
主題 10	拋物線與直線的關係	45
主題 11	二次函數最大、最小值	50
主題 12	二次函數恆正恆負	54

★ 多項式函數圖形與多項式不等式

主題 13	三次函數及其圖形	59
主題 14	二次不等式	63
主題 15	高次不等式	65
主題 16	分式不等式	69
主題 17	絕對值不等式 (數位延伸閱讀).....	75

★ 多項式的運算與運用

主題 1 多項式加法、減法與乘法

1. 兩多項式 $f(x) = 2x^3 - 5x^2 + 6x + 3$ 與

$$g(x) = a(x-1)(x-2)(x+1) + b(x-1)(x-2) + c(x-1) + d$$

相等，則數組 (a, b, c, d) 為 _____。



2. $f(x)$ 與 $g(x)$ 為兩多項式，若 $\deg(f(x)g(x)) = 6$ 且 $\deg(f(x) + g(x)) = 2$ ，

則 $\deg(f(x) - g(x)) = ?$

(A) 1 (B) 2 (C) 3 (D) 不一定



3. $(x^5 - 2x^4 - x^2 + 2x - 1)(5x^6 + 2x^5 - 3x^4 + 5x^2 - 1)$ 展開式中， x^5 項係數為？

(A) 5 (B) 14 (C) -9 (D) -5 (E) -3



1.【答】：(2,-1,5,6)

【解】： $f(1) = g(1) = d = 6$

$$f(2) = g(2) = c + d = 11 \Rightarrow c = 5$$

$$f(-1) = g(-1) = 6b - 2c + d = -10 \Rightarrow b = -1$$

$$f(x) \text{ 最高次項係數} = 2 \Rightarrow a = 2$$

$$\text{故 } (a, b, c, d) = (2, -1, 5, 6)$$

2.【答】：(C)

【解】： $\deg[f(x)g(x)] = 6$, $\deg[f(x) + g(x)] = 2$

可推得 $\deg f(x) = \deg g(x) = 3$ 且最高項係數為相反數

$$\text{故 } \deg[f(x) - g(x)] = 3$$

3.【答】：(C)

【解】： x^5 項係數為 $1 \times (-1) + 2 \times (-3) + (-1) \times 2 = -9$

主題 2 多項式除法

1. 設 a 、 b 為任意實常數，且 $a \neq 0$ 。已知多項式 $f(x)$ 除以 $(x-b)$ 的商式為 $Q(x)$ ，餘式為 r ，請選出正確的選項？

- (A) $[af(x)+b]$ 除以 $(x-b)$ 的商式為 $aQ(x)$ ，餘式為 $ar+b$
(B) $xf(x)$ 除以 $(x-b)$ 的商式為 $xQ(x)$ ，餘式為 br
(C) $f(ax)$ 除以 $(ax-b)$ 的商式為 $aQ(x)$ ，餘式為 r
(D) $f(\frac{b}{a}x)$ 除以 $(x-a)$ 的商式為 $\frac{b}{a}Q(\frac{b}{a}x)$ ，餘式為 r



2. 設 $f(x)$ 為一多項式，若多項式 $(x-1)f(x)$ 除以 x^2+x-1 的餘式為 $x-3$ ，則 $f(x)$ 除以 x^2+x-1 的餘式為_____。



3. 計算 $6x^3-5x^2+6x+3$ 除以 $3x+2$ 的商式為_____。



1.【答】：(A)(D)

【解】： $f(x) = (x-b)Q(x) + r$

$$(A) [af(x) + b] = (x-b)aQ(x) + ar + b$$

$$(B) xf(x) = x(x-b)Q(x) + rx = (x-b)(xQ(x) + r) + br$$

$$(C) f(ax) = (ax-b)Q(ax) + r$$

$$(D) f\left(\frac{b}{a}x\right) = \left(\frac{b}{a}x - b\right)Q\left(\frac{b}{a}x\right) + r = (x-a)\frac{b}{a}Q\left(\frac{b}{a}x\right) + r$$

2.【答】： $2x+5$

【解】：令 $f(x) = (x^2 + x - 1)q(x) + ax + b$

$$\Rightarrow (x-1)f(x) = (x-1)(x^2 + x - 1)q(x) + (x-1)(ax + b)$$

$$= (x-1)(x^2 + x - 1)q(x) + [ax^2 + (b-a)x - b]$$

$$= (x-1)(x^2 + x - 1)q(x) + [a(x^2 + x - 1) + (b-2a)x - b + a]$$

$$\Rightarrow \begin{cases} b-2a=1 \\ a-b=-3 \end{cases} \Rightarrow a=2, b=5$$

3.【答】： $2x^2 - 3x + 4$

【解】： $3x+2 \overline{) 6x^3 - 5x^2 + 6x + 3}$ 故商式為 $2x^2 - 3x + 4$

$$\begin{array}{r} 2x^2 - 3x + 4 \\ 6x^3 - 5x^2 + 6x + 3 \\ \underline{6x^3 + 4x^2} \\ -9x^2 + 6x \\ \underline{-9x^2 - 6x} \\ 12x + 3 \\ \underline{12x + 8} \\ -5 \end{array}$$

4. 已知 $(x^3 + ax^2 - x - 4) \div (bx^2 + x + c)$ 的商式是 $x - 3$ ，而餘式為 $x - 1$ ，求 $a + b + c =$ _____。



5. 將多項式 $f(x)$ 除以 $x^2 - 2x - 3$ 所得的商式為 $x^3 + 7$ ，餘式為 $r(x)$ ；又 $f(x)$ 除以 $r(x)$ 的商式為 $x^4 - 4x^3 + 5x^2 - 3x - 7$ ，餘式為 $h(x)$ ，試問 $r(x) + h(x) =$ _____。



6. 設 a, b 為實數。若多項式 $2x^3 - 3x^2 + 4x + a$ 除以 $2x^2 + x + b$ 的商為 $x - 2$ ，餘式為 $3x - 5$ ，求數對 $(a, b) =$ _____。



4.【答】：0

【解】： $x^3 + ax^2 - x - 4 = (bx^2 + x + c)(x - 3) + (x - 1)$
比較係數可知 $b = 1, a = -2, c = 1 \Rightarrow a + b + c = 0$

5.【答】： $x - 3$

【解】：可知 $r(x)$ 最多為一次式 $\Rightarrow h(x)$ 為常數

令 $r(x) = ax + b, h(x) = c$

則 $f(x) = (x^2 - 2x - 3)(x^3 + 7) + ax + b \cdots \textcircled{1}$

$= (x^4 - 4x^3 + 5x^2 - 3x - 7)(ax + b) + c \cdots \textcircled{2}$

分別以 $x = 1, 0, -1$ 代入 $\textcircled{1}, \textcircled{2}$

$$\text{得} \begin{cases} -32 + a + b = -8a - 8b + c \\ -21 + b = -7b + c \\ -a + b = -6a + 6b + c \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a = 1 \\ b = 2 \\ c = -5 \end{cases}$$

$\therefore r(x) + h(x) = (x + 2) + (-5) = x - 3$

6.【答】： $(-11, 3)$

【解】：長除法，商式為 $x - 2$ ，餘式 $(6 - b)x + a + 2b = 3x - 5$

可知 $b = 3, a = -11$

主題 3 多項式係數運算

1. 計算 $(1+2x+3x^2+4x^3+5x^4+6x^5)(x^{10}+3x^8+5x^6+7x^4+9x^2+11)$

展開式中，

- (1) 常數項為 _____，
- (2) x^5 項係數為 _____，
- (3) 各項係數和為 _____。



2. 多項式 $2x^4+7x^3+7x^2+2x+4$ 除以 $2x+1$ 可得商式 $Q(x)$ 及餘式 r ，
則 $Q(x)$ 的各項係數和為 _____。



1.【答】：(1) 11 (2) 116 (3) 756

【解】：(1) $f(0) = 11$

$$(2) x^5 \text{ 係數} = 2 \times 7 + 4 \times 9 + 6 \times 11 = 14 + 36 + 66 = 116$$

$$(3) f(1) = 21 \times 36 = 756$$

2.【答】：6

【解】：令 $f(x) = 2x^4 + 7x^3 + 7x^2 + 2x + 4$

$$f(x) = (2x+1)Q(x) + r \Rightarrow f\left(-\frac{1}{2}\right) = 4 = r$$

$$\Rightarrow f(x) = (2x+1)Q(x) + 4 \Rightarrow f(1) = 3 \times Q(1) + 4 = 22$$

$$\Rightarrow Q(1) = 6 \text{ 即為所求}$$

主題 4 綜合除法與多項式變形

1. $f(x) = 81x^4 - 162x^3 + 135x^2 - 60x + 15$
 $= a(3x-1)^4 + b(3x-1)^3 + c(3x-1)^2 + d(3x-1) + e$
試求 $a+b+c+d+e$ 之值為 _____。



2. 求 $3\left(\frac{-1+2\sqrt{7}}{3}\right)^4 + 2\left(\frac{-1+2\sqrt{7}}{3}\right)^3 - 12\left(\frac{-1+2\sqrt{7}}{3}\right)^2 - 5\left(\frac{-1+2\sqrt{7}}{3}\right) + 8$
之值為 _____。



1.【答】 :3

$$\text{【解】 : } f\left(\frac{2}{3}\right) = a + b + c + d + e = 81 \times \frac{16}{81} - 162 \times \frac{8}{27} + 135 \times \frac{4}{9} - 60 \times \frac{2}{3} + 15 = 3$$

2.【答】 : $-2\sqrt{7}$

$$\text{【解】 : 令 } f(x) = 3x^4 + 2x^3 - 12x^2 - 5x + 8$$

$$x = \frac{-1+2\sqrt{7}}{3} \Rightarrow (3x+1)^2 = 28 \Rightarrow 9x^2 + 6x - 27 = 0 \Rightarrow 3x^2 + 2x - 9 = 0$$

$$f(x) = (3x^2 + 2x - 9)(x^2 - 1) - 3x - 1$$

$$\Rightarrow f\left(\frac{-1+2\sqrt{7}}{3}\right) = -(-1+2\sqrt{7}) - 1 = -2\sqrt{7}$$

3. 已知 $f(x) = 2x^3 - 4x^2 - 3x + 7$ ，若將其表示成以下的形式：

$$f(x) = a(x-2)^3 + b(x-2)^2 + c(x-2) + d$$

(1) 求實數 a, b, c, d 的值。

(2) 求 $f(2.01)$ 的近似值到小數點以下第二位。(請在第三位四捨五入)



4. 設多項式 $f(x) = x^4 + x^3 - x^2 + 11x - 3$ ，則 $f(-1 + \sqrt{3})$ 之值 = _____。



3.【答】：(1) $a = 2, b = 8, c = 5, d = 1$ (2) 1.05

【解】：(1)

$$\begin{array}{r|rrrr}
 2 & -4 & -3 & 7 & \\
 & 4 & 0 & -6 & 2 \\
 \hline
 2 & 0 & -3 & 1 & \\
 & 4 & 8 & & \\
 \hline
 2 & 4 & & 5 & \\
 & 4 & & & \\
 \hline
 2 & & & 8 &
 \end{array} \Rightarrow a = 2, b = 8, c = 5, d = 1$$

$$(2) f(2.01) = 2(0.01)^3 + 8 \times (0.01)^2 + 5 \times (0.01) + 1 \doteq 1.05$$

4.【答】： $3\sqrt{3}$

$$\text{【解】：} x = -1 + \sqrt{3} \Rightarrow x^2 + 2x - 2 = 0$$

$$\Rightarrow x^4 + x^3 - x^2 + 11x - 3 = (x^2 + 2x - 2)(x^2 - x + 3) + 3x + 3$$

$$\Rightarrow f(-1 + \sqrt{3}) = 3(-1 + \sqrt{3}) + 3 = 3\sqrt{3}$$

主題 5 餘式定理

1. 下列何者是 $x^{103} + x^2 + 1$ 除以 $x-1$ 的餘式。

(A) 0 (B) 1 (C) -1 (D) 3 (E) 105。



2. $f(x)$ 以 $x^2 - 5x + 6$ 除之餘 $x + 3$ ，以 $x^2 - 6x + 8$ 除之餘 $2x + 1$ ，
則以 $x^2 - 7x + 12$ 除之餘式為 _____。



3. 已知多項式 $f(x)$ 除以 $(x^2 - 1)$ 餘 $x + 2$ ，且多項式 $g(x)$ 除以 $(x^2 - 3x + 2)$
餘 $2x - 1$ ，求 $f(x) + (2x + 1) \cdot g(x)$ 除以 $(x - 1)$ 的餘式為 _____。



1.【答】：(D)

【解】：令 $f(x) = x^{103} + x^2 + 1$

由餘式定理可得 $f(x)$ 除以 $x-1$ 的餘式 $= f(1) = 1^{103} + 1^2 + 1 = 3$

2.【答】： $3x-3$

【解】： $f(x) = (x^2 - 5x + 6)q_1(x) + x + 3 = (x-2)(x-3)q_1(x) + x + 3$

$$= (x^2 - 6x + 8)q_2(x) + 2x + 1 = (x-2)(x-4)q_2(x) + 2x + 1$$

設 $f(x) = (x^2 - 7x + 12)q_3(x) + ax + b = (x-3)(x-4)q_3(x) + ax + b$

則 $f(3) = 3a + b = 3 + 3 = 6$,

$$f(4) = 4a + b = 2 \times 4 + 1 = 9 \Rightarrow (a, b) = (3, -3)$$

$\therefore$ 餘式 $= 3x - 3$

3.【答】：6

【解】：所求為 $f(1) + (2+1)g(1) = 3 + 3 \times 1 = 6$

4. 設多項式函數 $f(x)$ 除以 $x+2$ 的餘式為 4，求 $(x+1) \cdot f(x)$ 除以 $2x+4$ 的餘式為_____。

FKMRF



5. 若 $f(x)$ 與 $g(x)$ 皆為多項式，已知 $3f(x) + g(x) = x^3 + 2x^2 - x - 1$ ，
且 $g(x)$ 除以 $x+1$ 的餘式為 -5 ，則 $f(x)$ 除以 $x+1$ 的餘式為_____。

FUXRB



4.【答】：-4

【解】：1° $\because f(x)$ 除以 $x+2$ 的餘式為 4 $\therefore$ 根據餘式定理可得 $f(-2)=4$

2° 令 $g(x)=(x+1) \cdot f(x)$

所求即為 $g(x)$ 除以 $2x+4$ 的餘式

根據餘式定理，

所求 $g(-2)=(-2+1) \cdot f(-2)=-4$

5.【答】：2

【解】： $g(-1)=-5$

$3f(x)+g(x)=x^3+2x^2-x-1$

$3f(-1)+g(-1)=1 \Rightarrow f(-1)=2$

主題 6 因式定理

1. 若 $f(x)$ 為三次多項式，且 $f(1) = f(2) = f(3) = 0$ ， $f(4) = 12$ ，則 $f(5)$ 之值等於下列哪一個選項？
(A) 0 (B) 12 (C) 24 (D) 48 (E) 120。



2. 已知 $100x^{100} + 99x^{99} + 98x^{98} + 97x^{97} + \cdots + 4x^4 + 3x^3 + 2x^2 + x - 50$ 被 $x+1$ 所整除，若商式為 $q(x)$ ，則 $q(x)$ 的所有係數和為何？



1.【答】 : (D)

【解】 : $1^\circ \because f(1) = f(2) = f(3) = 0$

$\therefore$ 根據因式定理可得 $f(x)$ 有 $x-1, x-2, x-3$ 的因式

2° 設 $f(x) = a(x-1)(x-2)(x-3)$

$$f(4) = 12 \Rightarrow 6a = 12, a = 2$$

$$\therefore f(x) = 2(x-1)(x-2)(x-3)$$

$$3^\circ f(5) = 2 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 = 48$$

2.【答】 : 2500

【解】 : 令原多項式 $= f(x)$, 則 $f(x) = (x+1)q(x)$

$$\Rightarrow f(1) = 2q(1) \Rightarrow (100 + 99 + \cdots + 1) - 50 = 2q(1)$$

$$\Rightarrow q(1) = \frac{1}{2} \left(\frac{100 \times 101}{2} - 50 \right) = 2500$$

主題 7 餘式的求法

1. 設 $\deg f(x) \geq 2$ ，已知多項式 $f(x)$ 除以 $x-2$ 與 $2x+3$ 的餘式分別為 -2 、 12 ，若 $f(x)$ 除以 $(x-2)(2x+3)$ 的餘式為 $ax+b$ ，則 $a-b$ 之值等於下列哪一個選項？

(A) -10 (B) 0 (C) 10 (D) 12 (E) 20 。



2. 若多項式 $f(x)$ 除以 $x-1$ 的餘式為 6 ；除以 $x+1$ 的餘式為 2 ，則 $f(x)$ 除以 $(x-1)(x+1)$ 的餘式為_____。



3. 已知多項式 $f(x)$ 除以 (x^2+x+2) 餘 $x+2$ ，且多項式 $g(x)$ 除以 (x^2+x+2) 餘 $2x-1$ ，求 $f(x) \cdot g(x)$ 除以 (x^2+x+2) 的餘式為_____。



1.【答】：(A)

【解】：令 $f(x) = (x-2)(2x+3)q(x) + ax + b$

$$\text{由餘式定理可得 } \begin{cases} f(2) = -2 \\ f(-\frac{3}{2}) = 12 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 2a + b = -2 \\ -\frac{3}{2}a + b = 12 \end{cases} \Rightarrow a = -4, b = 6$$

$$\therefore a - b = -10$$

2.【答】： $2x + 4$

【解】：令 $f(x) = (x-1)(x+1)q(x) + ax + b$

$$\begin{cases} f(1) = a + b = 6 \\ f(-1) = -a + b = 2 \end{cases} \Rightarrow (a, b) = (2, 4) \text{ 故餘式為 } 2x + 4$$

3.【答】： $x - 6$

【解】：令 $f(x) = \underbrace{(x^2 + x + 2)q_1(x)}_A + x + 2, g(x) = \underbrace{(x^2 + x + 2)q_2(x)}_B + 2x - 1$

$$f(x)g(x) = AB + A(2x-1) + B(x+2) + (x+2)(2x-1)$$

$$A, B \text{ 皆含有 } x^2 + x + 2, \text{ 故所求為 } 2x^2 + 3x - 2 = 2(x^2 + x + 2) + \underbrace{x - 6}_{\text{餘式}}$$

4. 若 $f(x)$ 除以 $x^2 - 2x + 3$ 的餘式為 $x - 3$ ，且 $f(x)$ 除以 $(x + 2)^2$ 的餘式為 $6x + 18$ ，則 $f(x)$ 除以 $(x + 2)(x^2 - 2x + 3)$ 的餘式為_____

XDMLG



5. 多項式 $f(x) = x^{113} - 2x^{35} + 3x^{18} - 4x$ ，則 $f(x)$ 除以 $x^2 - 1$ 的餘式為_____

YHAIE



6. 設 $f(x)$ 除以 $x^2 - 2x + 3$ 與 $x - 1$ 之餘式分別為 $4x + 6$ 與 2 ，求 $f(x)$ 除以 $(x - 1)(x^2 - 2x + 3)$ 之餘式為_____。

UVGDJ



4.【答】： $x^2 - x$

【解】： $f(x) = (x^2 - 2x + 3)(x + 2)g(x) + a(x^2 - 2x + 3) + (x - 3)$

$x = -2$ 代入 $\Rightarrow f(-2) = 11a - 5 = 6 \Rightarrow a = 1$

餘式為 $x^2 - 2x + 3 + x - 3 = x^2 - x$

5.【答】： $-5x + 3$

【解】：令 $f(x) = (x + 1)(x - 1)Q(x) + ax + b$

$$\Rightarrow \begin{cases} f(1) = a + b = -2 \\ f(-1) = -a + b = 8 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a = -5 \\ b = 3 \end{cases}$$

$\therefore r(x) = -5x + 3$

6.【答】： $-4x^2 + 12x - 6$

【解】： $f(x) = (x - 1)(x^2 - 2x + 3)q(x) + a(x^2 - 2x + 3) + 4x + 6$

$x = 1$ 代入 $\Rightarrow 2a + 10 = 2 \Rightarrow a = -4$

$\therefore$ 餘式 $= -4x^2 + 12x - 6$

7. 設 $g(x)$ 為三次以上的多項式，若已知 $g(1)=5$ ， $g(2)=6$ ， $g(-1)=15$ ，
則 $g(x)$ 除以 $(x-1)(x-2)(x+1)$ 的餘式為_____。



8. 設 $f(x)$ 為多項式，且次數大於三次，若 $f(x)$ 之常數項為 6，
且 $f(x)$ 除以 x^2+x-3 的餘式為 $2x+3$ ，則 $f(x)$ 除以 $x(x^2+x-3)$
的餘式為？



7.【答】： $2x^2 - 5x + 8$

【解】： $g(x) = (x-1)(x-2)(x+1)q(x) + a(x-1)(x-2) + b(x-1) + c$

$$g(1) = c = 5$$

$$g(2) = b + c = 6 \Rightarrow b = 1$$

$$g(-1) = 6a - 2b + c = 15 \Rightarrow a = 2$$

$$\therefore \text{餘式} = 2(x-1)(x-2) + (x-1) + 5 = 2x^2 - 5x + 8$$

8.【答】： $-x^2 + x + 6$

【解】：令 $f(x) = x(x^2 + x - 3)Q(x) + a(x^2 + x - 3) + 2x + 3$

$$\text{又 } f(0) = 6 = -3a + 3 \Rightarrow a = -1$$

$$\therefore \text{所求} = -x^2 - x + 3 + 2x + 3 = -x^2 + x + 6$$

★ 簡單多項式函數及其圖形

主題 8 一次函數及其圖形

1. 設 $f(x)$ 為一次函數，而且每當 x 增加 2 單位時，其相對應的函數值減少 1 單位，若 $f(3) = 0$ ，選出正確的選項：

- (A) $f(x)$ 的圖形之斜率為 2
- (B) $f(x)$ 的圖形為一由左上向右下傾斜之直線
- (C) $f(x)$ 的圖形不通過第四象限
- (D) $f(x)$ 的圖形與 y 軸交於點 $(0, 3)$
- (E) $f(5) = -5$



2. 設 $f(x)$ 為一次函數，而且每當 x 增加 1 單位時，其相對應的函數值減少 3 單位， $f(2) = 0$ 。選出正確的選項：

- (A) $f(x)$ 的圖形之斜率為 3
- (B) $f(x)$ 的圖形為一由左上向右下傾斜的直線
- (C) $f(x)$ 的圖形不通過第二象限
- (D) $f(x)$ 的圖形與 x 軸交於點 $(2, 0)$
- (E) $f(x)$ 的圖形與 y 軸交於點 $(0, 2)$



1.【答】：(B)

【解】：(A) 斜率 $= \frac{-1}{2}$

(B) 圖形為左上向右下

(C) 此直線 $x + 2y = 3$, x 截距 3, y 截距 $\frac{3}{2} \Rightarrow$ 不過第三象限

(D) $x + 2y = 3$, $x = 0$ 代入 $\Rightarrow$ 交點為 $(0, \frac{3}{2})$

(E) $x + 2y = 3$, $x = 5$ 代入 $\Rightarrow y = -1$

2.【答】：(B)(D)

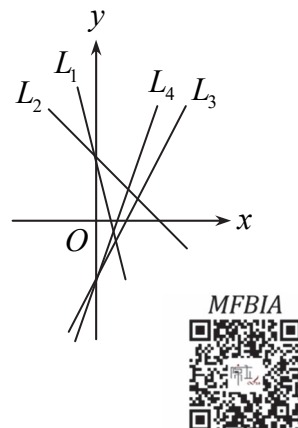
【解】： x 增加 1, y 減少 3 $\Rightarrow m = -3$ 且過 $(2, 0) \Rightarrow y - 0 = -3(x - 2)$

(A) 斜率為 -3

(B) 正確

(C)(D)(E) 直線過 $(2, 0)$, $(0, 6) \Rightarrow$ 不過第三象限

3. 如右圖，在坐標平面上有四條直線 L_1, L_2, L_3, L_4 ，斜率分別為 m_1, m_2, m_3, m_4 ，請比較 m_1, m_2, m_3, m_4 的大小：_____。

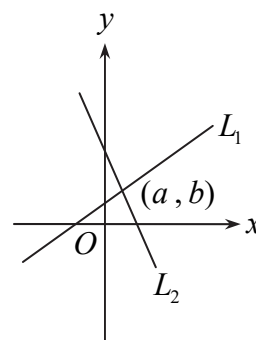


4. 若直線 L 通過 $A(k, -2), B(10, k)$ 且斜率為 3，求實數 k 之值為_____。



5. 已知坐標平面上兩直線 L_1, L_2 交於一點 (a, b) ，且其在平面上的配置關係如右圖。若 L_1 過點 $(a-7, b_1)$ ， L_2 過點 $(a+7, b_2)$ ，則 b_1 與 b_2 的大小關係為？

- (A) $b_1 > b_2$ (B) $b_1 < b_2$
(C) $b_1 = b_2$ (D) 無法判斷



3.【答】： $m_4 > m_3 > 0 > m_2 > m_1$

【解】：由圖形可知 $m_4 > m_3 > 0 > m_2 > m_1$

4.【答】：7

【解】： $\frac{k+2}{10-k} = 3 \Rightarrow k+2 = 30-3k \Rightarrow k = 7$

5.【答】：(A)

【解】：由圖形可知：

L_1 斜率為正, L_2 斜率為負, 且 L_2 較陡
故 $b_1 > b_2$

主題 9 二次函數及其圖形

1. 二次函數 $f(x)$ 滿足 $f(2) = f(-1) = -4$ ，且 $f(x)$ 有最大值 5，
若將 $f(x)$ 向左平移 3 單位，再向下平移 2 單位，得到新的二次
函數 $g(x)$ ，試求 $g(x) = \underline{\hspace{2cm}}$ 。



2. 設 $a > 0$ ，二次函數 $f(x) = ax^2 + bx + c$ 滿足 $f(3-x) = f(3+x)$ 。令 $P = f(0)$ ，
 $Q = f(\sqrt{50})$ ， $R = f(-\pi)$ ，則 P 、 Q 、 R 三數的大小關係是下列哪個選項？
(A) $P > Q > R$ (B) $Q > R > P$ (C) $Q > P > R$
(D) $R > Q > P$ (E) 無法確定



1.【答】： $-4(x + \frac{5}{2})^2 + 3$

【解】： $f(2) = f(-1) = -4 \Rightarrow x = \frac{1}{2}$ 為對稱軸 $\Rightarrow f(x) = a(x - \frac{1}{2})^2 + 5$

又 $f(2) = \frac{9}{4}a + 5 = -4 \Rightarrow a = -4 \Rightarrow f(x) = -4(x - \frac{1}{2})^2 + 5$

$f(x) \xrightarrow{\text{左3下2}} g(x) = -4(x + \frac{5}{2})^2 + 3$

2.【答】：(D)

【解】： $f(3-x) = f(3+x) \Rightarrow$ 對稱軸： $x = 3$ 又 $a > 0$ (開口朝上)

故 x 離 3 越遠，數值越大 $\Rightarrow R > Q > P$

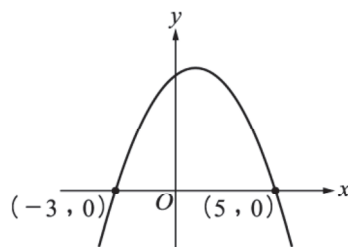
3. 二次函數 $y = ax^2 + bx + c$ ($a, b, c \in \mathbb{R}, a \neq 0$) 的圖形

如右圖，則下列敘述哪些正確？

(A) $a < 0$ 且 $b^2 - 4ac > 0$ (B) $b > 0$ 且 $c > 0$

(C) $a - 2b + 4c < 0$ (D) $16a + b + c > 0$

(E) $19a + 2b + c = 0$



DTDLC



4. 函數 $y = 3x^2 + 12x + a$ 的圖形沿著直線 $y = 3x + 2$ 向右上移動 $2\sqrt{10}$ 單位後，所得圖形為二次函數 $y = bx^2 + cx + 55$ 的圖形，則 $a + b + c =$ _____

BZGCM



3.【答】：(A)(B)(D)(E)

【解】：開口朝下： $a < 0$ ；頂點 x 坐標： $-\frac{b}{2a} > 0 \Rightarrow b > 0$

與 y 軸交點： $c > 0$ ；與 x 軸有兩交點： $b^2 - 4ac > 0$

$$(C) a - 2b + 4c = 4f\left(-\frac{1}{2}\right) > 0$$

$$(D) \text{ 令 } f(x) = t(x+3)(x-5) = tx^2 - 2tx - 15t$$

$$\Rightarrow a:b:c = 1:-2:-15 \text{ 且 } a < 0$$

$$16a + b + c = 16t - 2t - 15t = -t > 0$$

$$(E) 19a + 2b + c = 19t - 4t - 15t = 0$$

4.【答】：64

【解】：原式整理後 $\Rightarrow y = 3(x+2)^2 + a - 12$

1° 沿 $y = 3x + 2$ 向右上移動 $2\sqrt{10}$ 單位

$\Rightarrow$ 圖形向右移動 2 單位，向上移動 6 單位

2° 移動後開口大小相同 $\Rightarrow y = 3x^2 + a - 12 + 6 = bx^2 + cx + 55$

$$\Rightarrow b = 3, c = 0, a = 61 \Rightarrow a + b + c = 64$$

5. 已知 b 為實數且二次函數 $f(x) = x^2 + bx + 2014$ ，對於任意實數 t 都有

$f(4+t) = f(2-t)$ ，則 $f(x - \frac{103}{2014})$ 之最小值為 _____。



6. 二次函數 $y = 3x^2 + ax + b$ 之圖形過點 $(2, 41)$ ，且頂點在 $y = 2x - 3$ 上，

則數對 $(a, b) =$ _____。



7. 將 $y = x^2 + 4x - 1$ 的圖形向右平移 h 單位，再向上平移 k 單位後，恰與

$y = x^2 - 4x + 1$ 的圖形重合，則 $(h, k) =$ _____。



5.【答】：2005

【解】： $f(4+t) = f(2-t) \Rightarrow$ 對稱軸 $x = 3$

$$\Rightarrow f(x) = x^2 - 6x + 2014 = (x-3)^2 + 2005$$

$$f\left(x - \frac{103}{2014}\right) = \left(x - \frac{103}{2014} - 3\right)^2 + 2005 \Rightarrow \text{最小值 } 2005$$

6.【答】：(12,5) 或 (-32,93)

【解】：過 (2,41) $\Rightarrow 41 = 12 + 2a + b \Rightarrow b = 29 - 2a$

$$y = 3\left(x + \frac{a}{6}\right)^2 + b - \frac{a^2}{12}, \text{頂點 } \left(-\frac{a}{6}, b - \frac{a^2}{12}\right) \Rightarrow b - \frac{a^2}{12} = -\frac{a}{3} - 3$$

$$\Rightarrow b = 29 - 2a = -\frac{a}{3} - 3 + \frac{a^2}{12} \Rightarrow a^2 + 20a - 32 \times 12 = 0$$

$$\Rightarrow (a+32)(a-12) = 0 \Rightarrow (a,b) = (12,5) \text{ 或 } (-32,93)$$

7.【答】：(4,2)

【解】： $y = (x+2)^2 - 5$ 頂點 $(-2, -5)$; $y = (x-2)^2 - 3$ 頂點 $(2, -3)$

故 $(h,k) = (4,2)$

8. 已知二次函數的圖形通過 $(-1,0)$ 、 $(-9,0)$ 及 $(0,9)$ 三點，請寫出此函數圖形遞增時， x 的範圍為何？_____。



9. 若 $a < 0$ 、 $b > 0$ 、 $c < 0$ 、 $b^2 - 4ac > 0$ ，則二次函數 $f(x) = ax^2 + bx + c$ 的圖形不通過第_____象限。



10. 設 a, b, c 皆為實數且滿足 $|a+1| + 2(b+2)^2 + 3(c^2 + 2c + 2) = 3$ ，若 $f(x) = ax^2 + bx + c$ ，則 $y = f(x)$ 的圖形與 x 軸的交點坐標為_____。



8.【答】： $x \geq -5$

【解】：令 $f(x) = a(x+1)(x+9)$ ，又過 $(0, 9) \Rightarrow a = 1$

$$\text{故 } f(x) = x^2 + 10x + 9 = (x+5)^2 - 16$$

故當 $x \geq -5$ 時，此函數遞增

9.【答】：二

【解】：頂點 $(-\frac{b}{2a}, \frac{4ac-b^2}{4a}) \in$ 第一象限

$$a < 0 \Rightarrow \text{開口朝下}$$

$$c < 0 \Rightarrow y \text{ 軸截距} < 0$$

$$b^2 - 4ac > 0 \Rightarrow \text{與 } x \text{ 軸有兩交點}$$

故此二次函數圖形不過第二象限

10.【答】： $(-1, 0)$

【解】： $\because 3(c^2 + 2c + 2) = 3[(c+1)^2 + 1] \geq 3$

$$\therefore \text{唯一解} : \begin{cases} a+1=0 \\ b+2=0 \\ c^2+2c+2=1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a=-1 \\ b=-2 \\ c=-1 \end{cases}$$

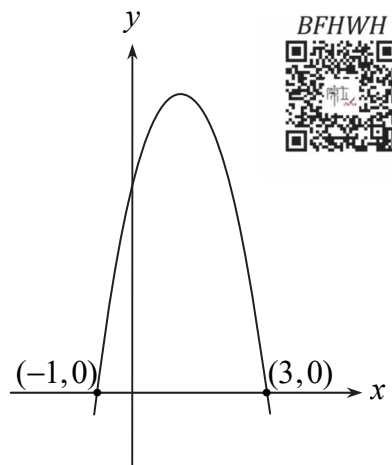
$$\Rightarrow f(x) = -x^2 - 2x - 1 = -(x+1)^2$$

$$\Rightarrow f(x) \text{ 與 } x \text{ 軸交 } (-1, 0)$$

11. 設 $f(x) = ax^2 + bx + c$ 的圖形如右，

試問下列敘述何者正確？

- (A) $a < 0$ (B) $b^2 - 4ac > 0$
(C) $2a + b = 0$ (D) $c < 0$
(E) $4a - 2b + c > 0$



12. 已知二次函數 $f(x) = ax^2 + bx + c$ ，對於任何實數 t ，都有 $f(2+t) = f(2-t)$ ，
且 $f(1) = 2$ ， $f(2) = -1$ ，試求數對 (a, b, c) 為 _____。



13. 二次函數 $f(x) = ax^2 + bx + c$ 通過四象限，試求點坐標 $P(\frac{c}{a}, \frac{b^2 - 4ac}{2ac})$ 在
第 _____ 象限。



11.【答】：(A)(B)(C)

【解】：(A)開口向下 $\Rightarrow a < 0$

(B)與 x 軸交於兩點 $\Rightarrow D = b^2 - 4ac > 0$

(C)頂點的 x 座標 $x = \frac{-b}{2a} = 1 \Rightarrow 2a + b = 0$

(D)與 y 軸交於 $(0, c) \Rightarrow c > 0$

(E) $f(-2) = 4a - 2b + c < 0$

12.【答】：(3, -12, 11)

【解】：由 $f(2+t) = f(2-t) \Rightarrow$ 對稱軸 $x = \frac{(2+t) + (2-t)}{2} = 2$

又 $f(2) = -1 \therefore$ 頂點 $(2, -1) \Rightarrow f(x) = a(x-2)^2 - 1$, 過 $(1, 2) \Rightarrow a = 3$

$\therefore f(x) = 3(x-2)^2 - 1 = 3x^2 - 12x + 11 \Rightarrow b = -12, c = 11$

13.【答】：三

【解】：必過四象限，則 $ac < 0$

故 $P(\frac{c}{a}, \frac{b^2 - 4ac}{2ac}) \Rightarrow (-, -)$ 在第三象限

∞ 主題 10 物線與直線的關係 ∞

1. [105 指考甲]

假設 a, b 皆為非零實數，且坐標平面上二次函數 $y = ax^2 + bx$ 與一次函數 $y = ax + b$ 的圖形相切。請選出切點所在位置為下列哪一個選項。

- (1) 在 x 軸上 (2) 在 y 軸上 (3) 在第一象限
(4) 在第四象限 (5) 當 $a > 0$ 時，在第一象限；當 $a < 0$ ，在第四象限。

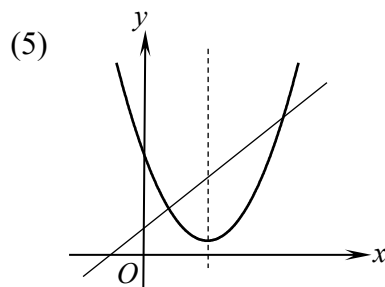
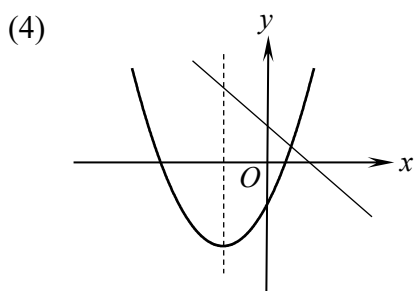
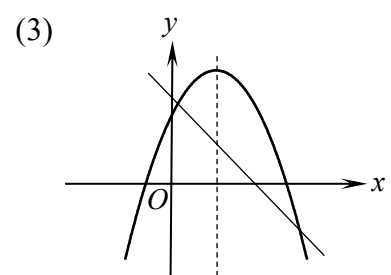
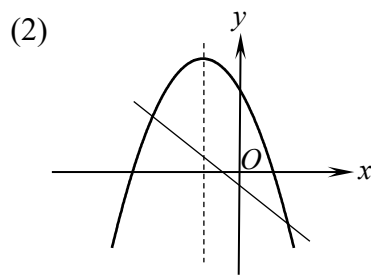
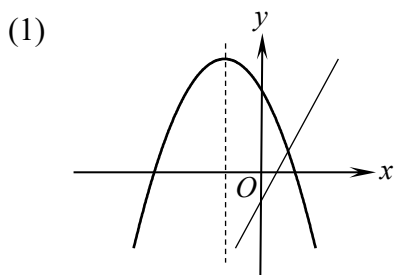
*2. $f(x) = 3x^2 + 9x + k$ 的圖形交 x 軸於 A 與 B 兩點，若 $\overline{AB} = 2$ ，求 k 之值。

3. 當 $x = \frac{1}{2}$ 時，二次函數 $y = f(x)$ 有最大值 25，又函數圖形 $y = f(x)$ 與 x 軸交於兩點，此兩點 x 坐標的平方和為 13，則 $f(x) = \underline{\hspace{2cm}}$ 。

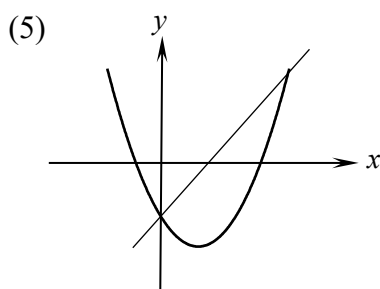
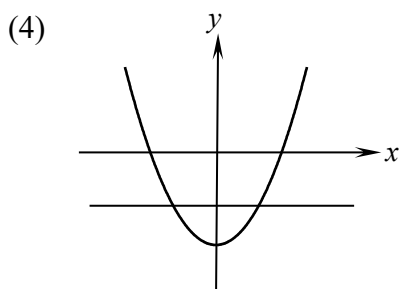
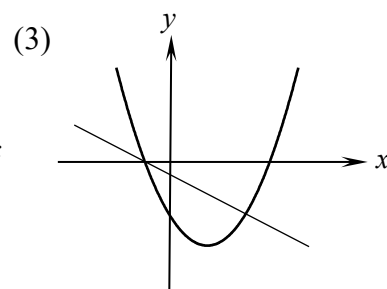
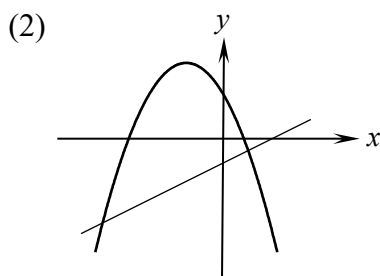
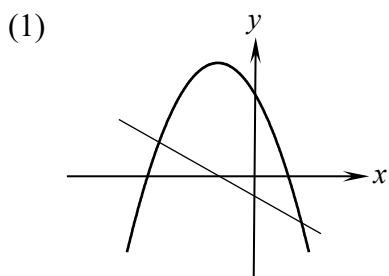
4. [103 學測]

坐標平面上，若直線 $y = ax + b$ (其中 a, b 為實數) 與二次函數 $y = x^2$ 的圖形恰交於一點，亦與二次函數 $y = (x-2)^2 + 12$ 的圖形恰交於一點，則 $a = \underline{\hspace{2cm}}$ ， $b = \underline{\hspace{2cm}}$ 。

*5. 設 a, b, c 皆為實數，則下列哪些圖形可能是一次函數 $y = ax + b$ 與二次函數 $y = ax^2 + bx + c$ 圖形的相交情形？



6. 設 a, b, c 皆為實數， $y = ax^2 + bx + c$ 與 $y = bcx + ab$ 的圖形相交情形可能是下列哪一個圖形？

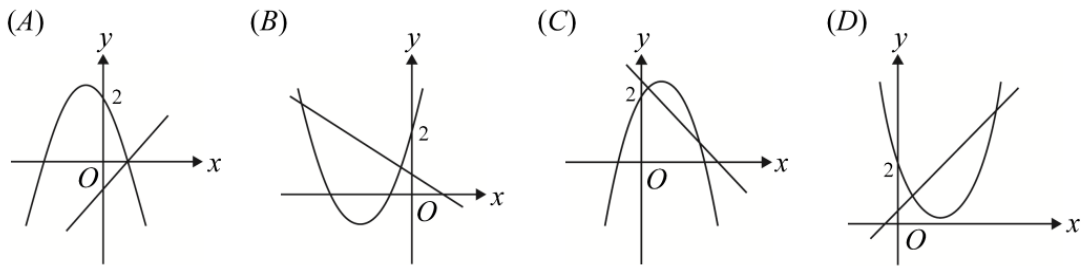


*7. [109 指考乙]

設 $f(x)$ 為二次實係數多項式函數且 $f(x) = 0$ 沒有實根。試選出正確的選項。

- (1) $f(0) > 0$
- (2) $f(1)f(2) > 0$
- (3) 若 $f(x) - 1 = 0$ 有實根，則 $f(x) - 2 = 0$ 有實根
- (4) 若 $f(x) - 1 = 0$ 有重根，則 $f(x) - \frac{1}{2} = 0$ 沒有實根
- (5) 若 $f(x) - 1 = 0$ 有兩相異實根，則 $f(x) - \frac{1}{2} = 0$ 有實根。

8. 給定 a, b 的值，在同一座標平面上函數 $y = ax + b$ 與 $y = ax^2 + bx + 2$ 的圖形可能是下列哪一個選項？_____。(單選)



9. [114 學測 A]

設 b, c 為實數。已知二次方程式 $x^2 + bx + c = 0$ 有實根，但二次方程式 $x^2 + (b+2)x + c = 0$ 沒有實根。試選出正確的選項。

- (1) $c < 0$
- (2) $b < 0$
- (3) $x^2 + (b+1)x + c = 0$ 有實根
- (4) $x^2 + (b+2)x - c = 0$ 有實根
- (5) $x^2 + (b-2)x + c = 0$ 有實根。

- *10. 設 $f(x) = 3x^2 + 6x + k$ 的圖形交 x 軸於 P, Q 兩點，交 y 軸於 R 點，若 $\overline{PQ} = 4$ ，則 $\triangle PQR$ 面積為_____。

簡 答

- | | | | | |
|--------|-------------------|----------------------|--------------|--------|
| 1. (1) | 2. $\frac{15}{4}$ | 3. $-4x^2 + 4x + 24$ | 4. 6, -9 | 5. (3) |
| 6. (5) | 7. (2)(3)(4) | 8. (C) | 9. (2)(4)(5) | 10. 18 |

主題 11 二次函數最大、最小值

1. 已知二次函數 $y = -2x^2 + 4x + 3$ 在 $-2 \leq x \leq 3$ 的最大值為 M ，最小值為 m ，則數對 (M, m) 為 _____。

ZBPVW



2. 設 x 為實數， $f(x) = x^2 - 2x + 2014$ ，則 $f(x + \frac{104}{2014})$ 之最小值為 _____。

PTCNH



3. 若 $k = |x^2 - 3x| - x + 1$ 有三個相異實數解，求 k 的範圍。

FPSVG



1.【答】：(5, -13)

【解】： $y = -2x^2 + 4x + 3 = -2(x-1)^2 + 5$

在 $-2 \leq x \leq 3$ 時, $Max = 5$, $min = -2(-3)^2 + 5 = -13$

2.【答】：2013

【解】： $f(x) = (x-1)^2 + 2013 \Rightarrow f(x + \frac{104}{2014}) = (x + \frac{104}{2014} - 1)^2 + 2013$

當 $x = 1 - \frac{104}{2014}$ 時, $f(x + \frac{104}{2014})$ 有最小值 = 2013

3.【答】： $k = 1$ 或 2

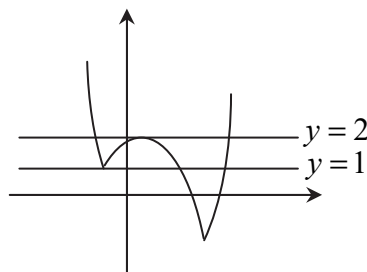
【解】：方程式的實數解個數：

$\begin{cases} y = |x^2 - 3x| - x + 1 \\ y = k \end{cases}$ 的交點個數

討論 1° $\begin{cases} x^2 - 3x \geq 0 \Rightarrow x \geq 3 \text{ 或 } x \leq 0 \\ y = x^2 - 4x + 1 = (x-2)^2 - 3 \end{cases}$

2° $\begin{cases} x^2 - 3x < 0 \Rightarrow 0 < x < 3 \\ y = -x^2 + 2x + 1 = -(x-1)^2 + 2 \end{cases}$

∴ 由圖可知 $k = 1$ 或 2



4. 若 x 為實數，則 $f(x) = (x^2 + 2x + 3)(x^2 + 2x - 1) - 2x^2 - 4x + 5$ 的最小值為 _____。



5. $\frac{1}{5} \leq m \leq 1$ ，直線 $y = mx + (m - 4 + \frac{1}{m})$ 與 x 軸交於 $A(\alpha, 0)$ ，若 α 之最大值為 M 、 α 之最小值為 m ，則 $M + m = ?$



6. 二次函數 $f(x) = ax^2 - 8bx - \frac{15}{b}$ 在 $x = -2$ 時有最大值 19，則數對 $(a, b) = \underline{\hspace{2cm}}$ 。



4.【答】：2

【解】：令 $t = x^2 + 2x = (x+1)^2 - 1 \geq -1$

則 $f(x) = (t+3)(t-1) - 2t + 5 = t^2 + 2 \quad (t \geq -1)$

∴ 最小值為 2

5.【答】：-3

【解】：以 $(\alpha, 0)$ 代入直線，得 $\alpha = -1 + \frac{4}{m} - \frac{1}{m^2}$

令 $t = \frac{1}{m}$ ，則 $\alpha = -1 + 4t - t^2, 1 \leq t \leq 5 \Rightarrow \alpha = -(t^2 - 4t + 4) + 3 = -(t-2)^2 + 3$

∴ 當 $t = 2$ 時， α 有最大值 $M = 3$

當 $t = 5$ 或 1 時， α 有最小值 $m = -6$

故 $M + m = 3 - 6 = -3$

6.【答】：(-6, 3)

【解】： $f(x) = a(x+2)^2 + 19 = ax^2 + 4ax + (4a+19)$

$$\begin{cases} -8b = 4a \\ 4a + 19 = \frac{15}{-b} \end{cases} \Rightarrow 8b^2 - 19b - 15 = 0 \Rightarrow b = 3 \text{ 或 } -\frac{5}{8} \text{ (不合)}$$

∴ $(a, b) = (-6, 3)$

主題 12 二次函數恆正恆負

1. 已知二次函數 $f(x)$ 的首項係數為 1，其圖形之對稱軸為 $x=1$ 且頂點在直線 $y=x+k$ 上。若 $y=f(x)$ 的圖形恆在直線 $y=kx$ 的上方，則實數 k 的範圍為_____。



2. 設二次函數 $y=ax^2+2x+4$ 的圖形恆在直線 $y=3x+6$ 的下方，則實數 a 的範圍為_____。



3. 已知對任意實數 x ， x^2-4x+k 的值恆為正數，求實數 k 的範圍為_____。



1.【答】： $-2 < k < 2$

【解】：頂點為 $(1, 1+k)$ 且首項係數為 1 $\Rightarrow y - (1+k) = (x-1)^2$
 $\Rightarrow x^2 - 2x + 1 + 1 + k > kx \Rightarrow x^2 - (2+k)x + 2+k > 0$ 恆成立
 $\Rightarrow D = (2+k)^2 - 4(2+k) < 0 \Rightarrow (k+2)(k-2) < 0 \Rightarrow -2 < k < 2$

2.【答】： $a < -\frac{1}{8}$

【解】： $ax^2 + 2x + 4 < 3x + 6 \Rightarrow ax^2 - x - 2 < 0$ 恆成立

$$\begin{cases} a < 0 \\ 1+8a < 0 \end{cases} \Rightarrow a < -\frac{1}{8}$$

3.【答】： $k > 4$

【解】： $D = (-4)^2 - 4k < 0 \Rightarrow k > 4$

4. 設 k 為實數且 $y = -x^2 + kx + 1$ 的圖形與直線 $y = 2$ 沒有交點，則實數 k 的範圍為 _____。



5. 設 k 為實數，若對任意的實數 x 而言， $y = -2x^2 - 8x + k$ 圖形永遠在直線 $y = -4x + 5$ 的下方且不相交，則 k 可為下列哪些選項之值？

(A) -3.5

(B) 3

(C) π (圓周率)

(D) $\sqrt{17 - 12\sqrt{2}}$

(E) $\frac{1000000\sqrt{6} + 234567\sqrt{7}}{1234567}$



4.【答】： $-2 < k < 2$

【解】： $y = -x^2 + kx + 1$ 首項係數 $< 0 \Rightarrow$ 開口向下
 $\Rightarrow -x^2 + kx + 1 < 2 \Rightarrow x^2 - kx + 1 > 0, \forall x \in R$ 恆成立
 $\Rightarrow D_x = k^2 - 4 < 0 \Rightarrow -2 < k < 2$

5.【答】：(A)(D)(E)

【解】： $-2x^2 - 8x + k < -4x + 5 \Rightarrow 2x^2 - 4x - (k - 5) > 0 \forall x \in R$ 恆成立
 $\Rightarrow D < 0 \Rightarrow k < 3$

(D) $\sqrt{17 - 12\sqrt{2}} = \sqrt{17 - 2\sqrt{72}} = 3 - 2\sqrt{2} < 3$

(E) $\sqrt{6}$ 至 $\sqrt{7}$ 之間 (內分點公式)

★ 多項式函數圖形與多項式不等式

主題 13 三次函數及其圖形

14 廣域特徵與局部特徵

1. 將 $f(x) = x^3 - 4x$ 向右平移 3 單位，向下平移 2 單位可得 $g(x)$ 求 $g(x)$ 及 $g(x)$ 的對稱中心。



2. 已知三次函數 $f(x) = x^3 - 3x^2 + 7x + 5 = a(x-h)^3 + p(x-h) + k$
- (1) 求 h, a, p, k 的值。
 - (2) 求 $f(x)$ 圖形的對稱中心。
 - (3) 求 $f(x)$ 在 (h, k) 時的一次近似函數 $g(x)$ 。
 - (4) 求 $f(1.001)$ 的近似值。(四捨五入到小數點後第三位)



1. 【答】： $g(x) = x^3 - 9x^2 + 23x - 17$; $(3, -2)$

$$\begin{aligned}\text{【解】：} g(x) &= (x-3)^3 - 4(x-3) - 2 \\ &= x^3 - 9x^2 + 27x - 27 - 4x + 12 - 2 \\ &= x^3 - 9x^2 + 23x - 17\end{aligned}$$

由 $f(x)$ 對稱中心 $(0, 0)$ 平移 $(3, -2)$ 得 $g(x)$ 對稱中心為 $(3, -2)$

2. 【答】： $(1) h=1, a=1, p=4, k=10$ $(2) (1, 10)$ $(3) g(x) = 4x + 6$ $(4) 10.004$

$$\text{【解】：} 1^\circ \text{ 取 } h = -\frac{-3}{3 \times 1} = 1, \text{ 且觀察 } x^3 \text{ 係數可知 } a = 1$$

$$\begin{aligned}2^\circ \quad & x^3 - 3x^2 + 7x + 5 \\ &= (x-1)^3 + p(x-1) + k \\ &= x^3 - 3x^2 + (3+p)x + (-1-p+k)\end{aligned}$$

$$\text{比較係數} \begin{cases} 3+p=7 \\ -1-p+k=5 \end{cases} \Rightarrow p=4, k=10$$

(1) 故 $h=1, a=1, p=4, k=10$

(2) 對稱中心 $(1, 10)$

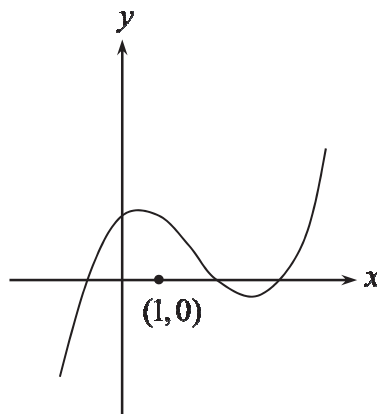
(3) 一次近似函數為 $g(x) = 4(x-1) + 10 = 4x + 6$

(4) $f(1.001) \approx g(1.001) = 4 \times 0.001 + 10 = 10.004$

3. 右圖為實係數三次多項式函數 $f(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d$ 部分圖形的示意圖。

若 $y = f(x)$ 的圖形在 $x = 0$ 附近的一次近似直線方程式為 $y = mx + d$ ，則 m 之值為下列哪一個選項？

- (1) 1 (2) a (3) b
(4) c (5) d



4. 設三次函數 $f(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d$ 的對稱中心為 $(-1, -5)$ ，且 $y = f(x)$ 的圖形通過點 $(0, -13)$ 、 $(2, 19)$ ，則序對 $(a, b, c, d) =$ _____。

3.【答】：(4)

【解】： $f(x)$ 在 $x=0$ 的一次近似 $\Rightarrow y = cx + d$
故 $m = c$ 選 (4)

4.【答】：(2, 6, -4, -13)

【解】：1° 由對稱中心為 $(-1, -5)$

$$\text{令 } f(x) = a(x+1)^3 + m(x+1) - 5$$

$$\text{由 } \begin{cases} a + m - 5 = -13 \\ 27a + 3m - 5 = 19 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a + m = -8 \\ 9a + m = 8 \end{cases} \Rightarrow (a, m) = (2, -10)$$

$$\begin{aligned} 2^\circ \text{ 由 } f(x) &= ax^3 + 3ax^2 + (3a + m)x + (a + m - 5) \\ &= 2x^3 + 6x^2 - 4x - 13 \end{aligned}$$

$$(a, b, c, d) = (2, 6, -4, -13)$$

主題 14 二次不等式

1. 設 a, b 為實數，且二次不等式 $ax^2 + bx + 6 < 0$ 的解為 $x < -1$ 或 $x > 2$ ，則 $x^2 + 2ax + 3b \leq 0$ 的解為 _____。



2. 設 $f(x)$ 為二次實係數多項式，不等式 $f(x) < 0$ 的解為 $x < -4$ 或 $x > -2$ ，則 $f(2x-1) \geq 0$ 解的範圍為 _____。



3. 求不等式 $4x^2 - 12x + 9 > 0$ 的解為 _____。



1.【答】： $x=3$

【解】： $x < -1$ or $x > 2 \Rightarrow (x+1)(x-2) > 0$

$$\Rightarrow x^2 - x - 2 > 0 \Rightarrow -3x^2 + 3x + 6 < 0$$

$$\Rightarrow (a, b) = (-3, 3)$$

$$x^2 + 2ax + 3b = x^2 - 6x + 9 \leq 0 \Rightarrow x = 3$$

2.【答】： $-\frac{3}{2} \leq x \leq -\frac{1}{2}$

【解】： $f(x) < 0$ 解為 $x < -4$ 或 $x > -2 \Rightarrow f(x) \geq 0$ 解為 $-4 \leq x \leq -2$

$$\Rightarrow f(2x-1) \geq 0 \Rightarrow -4 \leq 2x-1 \leq -2 \Rightarrow -\frac{3}{2} \leq x \leq -\frac{1}{2}$$

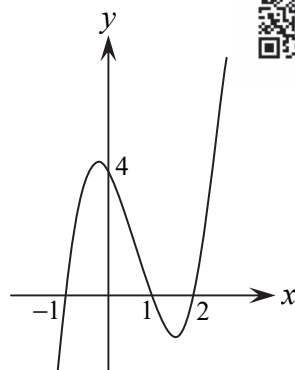
3.【答】： $x \neq \frac{3}{2}$

【解】：原式 $\Rightarrow (2x-3)^2 > 0 \Rightarrow x \neq \frac{3}{2}$

主題 15 高次不等式

1. 已知 $f(x)$ 為三次實係數多項式，且 $y = f(x)$ 的圖形與其通過的四點如下圖所示，下列敘述哪些是正確的？

- (A) 多項式 $f(x) = (x+1)(x-1)(x-2)$
(B) 方程式 $f(x) = 0$ 的解為 $x = -1$ 或 1 或 2
(C) 方程式 $f(x) = x$ 有三個相異實根
(D) 不等式 $f(2x) \leq 0$ 的解為 $x \leq -2$ 或 $2 \leq x \leq 4$
(E) 若不等式 $f(x) \geq 4$ 的解為 $a \leq x \leq b$ 或 $x \geq c$ ，
則 $a + b + c = 2$



2. 設 $(x-1)^1(x-2)^2(x-3)^3(x-5)^5 \leq 0$ ，則實數 x 的範圍為_____。



3. 不等式 $x(x+1)^4(x-7)(x-6)^2(x+2)^3(x^2-3x+4) \geq 0$ 的解為_____



1. 【答】 : (B)(C)(E)

【解】 : (A) 令 $f(x) = k(x-1)(x-2)(x+1)$ 且過 $(0, 4)$

$$\Rightarrow 4 = 2k \Rightarrow k = 2 \text{ 故 } f(x) = 2(x-1)(x-2)(x+1)$$

(B) 解為 $x = -1, 1, 2$

(C) 正確

$$(D) f(2x) \leq 0 \Rightarrow 1 \leq 2x \leq 2 \text{ 或 } 2x \leq -1 \Rightarrow \frac{1}{2} \leq x \leq 1 \text{ 或 } x \leq -\frac{1}{2}$$

$$(E) f(x) \geq 4 \Rightarrow 2(x-1)(x-2)(x+1) \geq 4 \Rightarrow x^3 - 2x^2 - x \geq 0 \Rightarrow 3 \text{ 根和} = 2 \\ \text{故 } a+b+c = 2$$

2. 【答】 : $x \leq 1$ 或 $3 \leq x \leq 5$ 或 $x = 2$

$$\text{【解】 : } (x-1)^1(x-2)^2(x-3)^3(x-5)^5 \leq 0$$

$$\Rightarrow (x-2)^2(x-3)^2(x-5)^4 \cdot (x-1)(x-3)(x-5) \leq 0$$

$$\Rightarrow x \leq 1 \text{ 或 } 3 \leq x \leq 5 \text{ 或 } x = 2, 3, 5$$

$$\Rightarrow x \leq 1 \text{ 或 } 3 \leq x \leq 5 \text{ 或 } x = 2$$

3. 【答】 : $x \geq 7$ 或 $-2 \leq x \leq 0$ 或 $x = 6$

$$\text{【解】 : 原式 : } (x^2 - 3x + 4)(x+1)^4(x-6)^2(x+2)^2(x-7)(x+2) \cdot x \geq 0$$

$$\Rightarrow x(x-7)(x+2) \geq 0 \text{ 或 } x = -1, 6, -2 \Rightarrow x \geq 7 \text{ 或 } -2 \leq x \leq 0 \text{ 或 } x = 6$$

4. 設 a, b, c 為實數，若 $x^3 + ax^2 + bx + c \leq 0$ 的解為 $x \leq -1$ 或 $2 \leq x \leq 4$ ，
求 $a + b + c =$ _____。

PHWQE



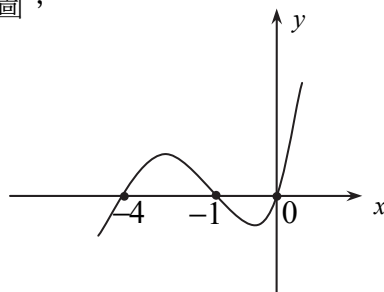
5. 若不等式 $(x+2)(x-1)(x^2 - mx + m) > 0$ 的解為 $x > 1$ 或 $x < -2$ ，
則 m 值的範圍為_____。

UXHWA



6. 已知三次函數 $y = f(x+2)$ 的圖形如右圖，
則不等式 $(x-3)f(x) < 0$
的解取值範圍為_____

UDDFY



4.【答】：5

$$\text{【解】：} x \leq -1, 2 \leq x \leq 4 \Rightarrow (x+1)(x-2)(x-4) \leq 0$$

$$\Rightarrow x^3 - 5x^2 + 2x + 8 \leq 0$$

$$\therefore a = -5, b = 2, c = 8 \Rightarrow a + b + c = 5$$

5.【答】： $0 < m < 4$

【解】： $\because (x+2)(x-1)(x^2 - mx + m) > 0$ 之解為 $x > 1$ 或 $x < -2$

$\therefore x^2 - mx + m > 0$ 對所有的實數 x 恆成立

$$\Rightarrow D_x = (-m)^2 - 4m < 0$$

$$\Rightarrow m(m-4) < 0$$

$$\Rightarrow 0 < m < 4$$

6.【答】： $-2 < x < 1$ 或 $2 < x < 3$

【解】：1° 令另一函數 $g(x) \Rightarrow y = g(x) = f(x+2) \Rightarrow f(x) = g(x-2)$

$$\text{由圖 } y = g(x) = x(x+1)(x+4) \Rightarrow y = f(x) = (x-2)(x-1)(x+2)$$

$$2^\circ (x-3)(x-2)(x-1)(x+2) < 0$$

$$\therefore -2 < x < 1 \text{ 或 } 2 < x < 3$$

主題 16 分式不等式

1. 下列敘述哪些是正確的？

LHKMK



- (A) 不等式 $(x-1)(x-2) > 0$ 與不等式 $\frac{x-1}{x-2} > 0$ 有相同的解
- (B) 不等式 $x^2 + x + 1 > 0$ 與不等式 $x^3 - 1 > x - 1$ 有相同的解
- (C) 不等式 $x^2 + 2x + 2 < 0$ 的解為 $-1-i < x < -1+i$ 有相同的解
- (D) 不等式 $\frac{x}{x^2 - 2x + 3} < 2$ 與不等式 $2x^2 - 5x + 6 > 0$ 有相同的解
- (E) 不等式 $\frac{x-3}{x+2} \leq 0$ 與不等式 $(x+2)(x-3)^3 \leq 0$ 有相同的解

2. 下列敘述哪些是正確的？

TUJS



- (A) 不等式 $2x^2 + x + 1 > 0$ 和 $x^2 - 4x + 10 \geq 0$ 的解相同
- (B) 不等式 $(x^2 + 2)(x-3)(x-1)^2 > 0$ 和 $(x-3)^3(x-1)^4 > 0$ 的解相同
- (C) 不等式 $\frac{(x^2+1)(x-2)(x-3)}{(x-1)^2} \geq 0$ 和 $(x^2-1)(x-2)(x-3)(x-1)^2 \geq 0$ 的解相同
- (D) 不等式 $\frac{3x^2+7x-1}{2x^2+x+2} \geq 1$ 和 $3x^2+7x-1 \geq 2x^2+x+2$ 的解相同
- (E) 不等式 $\frac{x^2-3x+1}{x+2} \geq 1$ 和 $x^2-3x+1 \geq x+2$ 的解相同

1. 【答】 : (A)(D)

【解】 : (A) $(x-1)(x-2) > 0$ 與 $\frac{x-1}{x-2} > 0$ 為同義不等式，有相同的解。

(B) $x^3 - 1 > x - 1 \Rightarrow x^3 - x > 0 \Rightarrow x(x-1)(x+1) > 0 \Rightarrow x > 1$ 或 $0 < x < 1$

但 $x^2 + x + 1 > 0 \Rightarrow x \in R$,

故 $x^3 - 1 > x - 1$ 與 $x^2 + x + 1 > 0$ 沒有相同解

(C) $\underbrace{x^2 + 2x + 2}_{\Delta < 0, \text{恆正}} < 0 \Rightarrow x$ 無解

(D) $\frac{x}{\underbrace{x^2 - 2x + 3}_{\Delta < 0, \text{恆正}}} < 2 \Rightarrow x < 2x^2 - 4x + 6 \Rightarrow 2x^2 - 5x + 6 > 0$, 正確

(E) $\frac{x-3}{x+2} \leq 0 \Rightarrow (x-3)(x+2) < 0$ 或 $x = 3$

$\Rightarrow -2 < x < 3$ 或 $x = 3 \Rightarrow -2 < x \leq 3$

$(x+2)(x-3)^3 \leq 0 \Rightarrow (x+2)(x-3) \leq 0 \Rightarrow -2 \leq x \leq 3$

2. 【答】 : (A)(B)(D)

【解】 : (A) $2x^2 + x + 1 > 0 \Rightarrow D < 0$ 故 $x \in R$

$x^2 - 4x + 10 \geq 0 \Rightarrow (x-2)^2 + 6 \geq 0$ 故 $x \in R$

(B) 前式: $x^2 + 2 > 0 \Rightarrow$ 解為 $x > 3$

後式: $x > 3$

(C) 若 $x = 1$ 則不合

(D) $2x^2 + x + 2$ 恆正, 解相同

(E) $x \leq 2$ 時不合

3. 設 $f(x) = (x-1)(x^2+2x-3)$ ，下列哪些不等式與 $f(x) \leq 0$ 有相同解？

(A) $(x-1)(x^2+2x-3)(x^2+2) \leq 0$

(B) $\frac{(x-1)}{(x^2+2x-3)} \leq 0$

(C) $(x-1)^{12}(x^2+2x-3)^{45} \leq 0$

(D) $(1-x)^2(x+3) \leq 0$

(E) $\frac{(x-1)(x^2+2x-3)}{x^2+x+1} \leq 0$

PBJYU



4. 分式不等式 $\frac{x^2+2x-3}{x^2+x-2} \leq 1$ 之解為_____

MEIRQ



5. 小將在不等式單元的練習中，有一分析過程如右，

已知 4 個步驟中有一計算欠周詳：

(1) 挑選並說明小將

開始錯誤的步驟及原因。

(2) 重新計算並修正不等式

$\frac{x^2-3}{x} \geq 2$ 的解。

題： $\frac{x^2-3}{x} \geq 2$

解：①不等式兩邊乘 x 得 $x^2-3 \geq 2x$

②移項整理得 $x^2-2x-3 \geq 0$

③因式分解得 $(x-3)(x+1) \geq 0$

④故當 $x \geq 3$ 或 $x \leq -1$ 時，原式成立

NYQPZ



3. 【答】 : (A)(D)(E)

【解】 : $f(x) = (x-1)(x^2 + 2x - 3) \leq 0$

$$\Rightarrow f(x) = (x-1)(x+3)(x-1) \leq 0$$

$$\Rightarrow x \leq -3 \text{ 或 } x = 1$$

$$(A)(x-1)(x^2 + 2x - 3)(x^2 + 2) \leq 0 \Rightarrow x \leq -3 \text{ 或 } x = 1$$

$$(B)x^2 + 2x - 3 \neq 0, x \neq 1 \text{ 或 } -3 \Rightarrow x < -3$$

$$(C)(x-1)^{12}(x^2 + 2x - 3)^{45} \leq 0 \Rightarrow x^2 + 2x - 3 \leq 0 \text{ 或 } x = 1 \Rightarrow -3 \leq x \leq 1$$

$$(D)(1-x)^2(x+3) \leq 0 \Rightarrow x \leq -3 \text{ 或 } x = 1$$

$$(E) \frac{(x-1)(x^2 + 2x - 3)}{\underbrace{x^2 + x + 1}_{\text{恆正}}} \leq 0 \Rightarrow (x-1)(x^2 + 2x - 3)(x^2 + x + 1) \leq 0$$

$$\Rightarrow x \leq -3 \text{ 或 } x = 1$$

4. 【答】 : $x < -2$

【解】 : $\frac{x^2 + 2x - 3}{x^2 + x - 2} \leq 1 \Rightarrow \frac{x^2 + 2x - 3 - (x^2 + x - 2)}{x^2 + x - 2} \leq 0$

$$\Rightarrow (x-1)(x^2 + x - 2) \leq 0$$

$$\Rightarrow (x-1)^2(x+2) \leq 0 \text{ 又分母 } \neq 0$$

$$\Rightarrow x < -2$$

5. 【答】 : (1)見詳解 (2) $-1 \leq x < 0$ 或 $x \geq 3$

【解】 : (1)第①步驟欠周詳

因為無法確定 x 為正或負，

兩邊同乘 x 無法確定是否變號

$$(2) \frac{x^2 - 3}{x} \geq 2 \Rightarrow \frac{x^2 - 3}{x} - 2 \geq 0 \Rightarrow \frac{x^2 - 2x - 3}{x} \geq 0$$

$$\Rightarrow (x^2 - 2x - 3) \cdot x \geq 0 \text{ 且 } x \neq 0 \Rightarrow x(x+1)(x-3) \geq 0 \text{ 且 } x \neq 0$$

$$\Rightarrow -1 \leq x < 0 \text{ 或 } x \geq 3$$

6. 求不等式 $\frac{x-1}{(x-3)(x+2)} \geq \frac{x-3}{x+2}$ 的解為 _____。



7. 若「 x 為整數」，則滿足不等式： $\frac{(x-8)^4(x+1)^3(x-5)(x+5)}{(x+3)} \leq 0$
的 x 共有 _____ 個。



8. 若二次不等式 $ax^2 + bx + c < 0$ 之解為 $-2 < x < 5$ ，則 $\frac{cx+2a}{ax+b} \geq 0$ 之解
為 _____



6. 【答】 : $3 < x \leq 5$ 或 $-2 < x \leq 2$

$$\begin{aligned}\text{【解】 : 原式} &\Rightarrow \frac{(x^2 - 6x + 9) - (x - 1)}{(x - 3)(x + 2)} \leq 0 \\ &\Rightarrow \begin{cases} (x + 2)(x - 3)(x^2 - 7x + 10) \leq 0 \\ x \neq 3, -2 \end{cases} \\ &\Rightarrow \begin{cases} (x + 2)(x - 3)(x - 2)(x - 5) \leq 0 \\ x \neq 3, -2 \end{cases} \\ &\Rightarrow 3 < x \leq 5 \text{ 或 } -2 < x \leq 2\end{aligned}$$

7. 【答】 : 10

$$\begin{aligned}\text{【解】 : 原式} &\Rightarrow \begin{cases} (x - 8)^4(x + 1)^3(x - 5)(x + 5)(x + 3) \leq 0 \\ x \neq -3 \end{cases} \\ &\Rightarrow -1 \leq x \leq 5, -5 \leq x < -3, x = 8 \\ &\therefore x \text{ 為整數} \Rightarrow \text{共 10 個}\end{aligned}$$

8. 【答】 : $\frac{1}{5} \leq x < 3$

$$\begin{aligned}\text{【解】 : } -2 < x < 5 &\Rightarrow t(x + 2)(x - 5) < 0, t > 0 \\ &\Rightarrow tx^2 - 3tx - 10t < 0 \Rightarrow \text{以 } a = t, b = -3t, c = -10t \\ \text{代入得 } \frac{-10tx + 2t}{tx - 3t} &\geq 0 \Rightarrow (5x - 1)(x - 3) \leq 0 \text{ 且 } x \neq 3 \\ &\Rightarrow \frac{1}{5} \leq x < 3\end{aligned}$$

主題 17 絕對值不等式〔數位延伸閱讀〕

1. 不等式 $x^2 - x + 9 > 6|x - \frac{1}{2}|$ 的解為 _____。



1.【答】： $x < -3$ 或 $-2 < x < 3$ 或 $x > 4$

$$\begin{aligned} \text{【解】} : 1^\circ \begin{cases} x \geq \frac{1}{2} \\ x^2 - x + 9 > 6(x - \frac{1}{2}) \end{cases} &\Rightarrow \begin{cases} x \geq \frac{1}{2} \\ x^2 - 7x + 12 > 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x \geq \frac{1}{2} \\ x > 4 \text{ 或 } x < 3 \end{cases} \\ &\Rightarrow x > 4 \text{ 或 } \frac{1}{2} \leq x < 3 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} 2^\circ \begin{cases} x < \frac{1}{2} \\ x^2 - x + 9 > 6(\frac{1}{2} - x) \end{cases} &\Rightarrow \begin{cases} x < \frac{1}{2} \\ x^2 + 5x + 6 > 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x < \frac{1}{2} \\ x > -2 \text{ 或 } x < -3 \end{cases} \\ &\Rightarrow -2 < x < \frac{1}{2} \text{ 或 } x < -3 \end{aligned}$$

$\therefore$ 由 $1^\circ, 2^\circ$ 討論可得 $x > 4$ 或 $-2 < x < 3$ 或 $x < -3$

綜合練習

1. 設 $a > 0$ ，二次函數 $f(x) = ax^2 + bx + c$ 滿足 $f(3-x) = f(3+x)$ 。

令 $P = f(0)$ ， $Q = f(\sqrt{50})$ ， $R = f(-\pi)$ ，則 P 、 Q 、 R 三數的大小關係是下列哪個選項？

- (A) $P > Q > R$ (B) $Q > R > P$ (C) $Q > P > R$
(D) $R > Q > P$ (E) 無法確定

2. 已知 x 為實數，試求

- (1) $|x-2| + |x+3|$ 的最小值。
(2) 函數 $f(x) = |x^2 + x + 1| + |x-2| + |x+3|$ 的最小值。

3. 設 a, b, c 皆為實數且滿足 $|a+1| + 2(b+2)^2 + 3(c^2 + 2c + 2) = 3$ ，若

$f(x) = ax^2 + bx + c$ ，則 $y = f(x)$ 的圖形與 x 軸的交點坐標為 _____。

1.【答】:(D)

【解】: $f(3-x) = f(3+x) \Rightarrow$ 對稱軸: $x=3$ 又 $a>0$ (開口朝上)

故 x 離 3 越遠, 數值越大 $\Rightarrow R>Q>P$

2.【答】:(1) 5 (2) $\frac{23}{4}$

【解】:(1) 折點: $-3, 2$, 由中位數法則可知當 $-3 \leq x \leq 2$ 時
有最小值 5

(2) $x \geq 2$ 時, $f(x) = x^2 + 3x + 2 = (x + \frac{3}{2})^2 - \frac{1}{4} \Rightarrow$ 有最小值 $f(2) = 12$

$-3 \leq x < 2$ 時, $f(x) = x^2 + x + 6 = (x + \frac{1}{2})^2 + \frac{23}{4} \Rightarrow$ 有最小值 $f(-\frac{1}{2}) = \frac{23}{4}$

$x < -3$ 時, $f(x) = x^2 - x = (x - \frac{1}{2})^2 - \frac{1}{4} \Rightarrow$ 有最小值 $f(-3) = 12$

由以上可知 $\Rightarrow \min = \frac{23}{4}$

3.【答】:(-1, 0)

【解】: $\because 3(c^2 + 2c + 2) = 3[(c+1)^2 + 1] \geq 3$

$$\therefore \text{唯一解} : \begin{cases} a+1=0 \\ b+2=0 \\ c^2+2c+2=1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a=-1 \\ b=-2 \\ c=-1 \end{cases}$$

$$\Rightarrow f(x) = -x^2 - 2x - 1 = -(x+1)^2$$

$\Rightarrow f(x)$ 與 x 軸交 $(-1, 0)$

4. 若 $f(x)$ 為 n 次多項式， $n \geq 3$ ，且滿足 $f(0) = 1, f(1) = 5, f(2) = 7, f(3) = 15$ ，求 $f(x^2 + 2)$ 偶次項係數和 = _____。

5. 若 x 為實數，則 $f(x) = (x^2 + 2x + 3)(x^2 + 2x - 1) - 2x^2 - 4x + 5$ 的最小值為 _____。

6. 已知 $f(x) = x^2 + 6x + 13$ ，則 $f(x^2 + 2x + 3)$ 在 $-2 \leq x \leq 2$ 時的最大值為 M ，最小值為 m ，求數對 (M, m) 為 _____。

4.【答】:15

$$\text{【解】: 所求} = \frac{f(1^2 + 2) + f((-1)^2 + 2)}{2} = f(3) = 15$$

5.【答】:2

$$\text{【解】: 令 } t = x^2 + 2x = (x+1)^2 - 1 \geq -1$$

$$\text{則 } f(x) = (t+3)(t-1) - 2t + 5 = t^2 + 2 \quad (t \geq -1)$$

$\therefore$ 最小值為 2

6.【答】:(200,29)

$$\text{【解】: } 1^\circ \text{ 令 } x^2 + 2x + 3 = t = (x+1)^2 + 2$$

當 $x = -1$, t 有最小值為 2

當 $x = 2$, t 有最大值為 11

$$2^\circ f(x) = x^2 + 6x + 13 = (x+3)^2 + 4 \Rightarrow f(t) = (t+3)^2 + 4, 2 \leq t \leq 11$$

$\therefore$ 當 $t = 11$ 時, 有最大值為 200

當 $t = 2$ 時, 有最小值為 29

7. 已知方程式 $\frac{x}{x-3} + \frac{x-3}{x} = \frac{a-3x}{x^2-3x}$ 恰有一實根，則滿足條件的實數 a 的值 _____ 個。

8. k 為實數，函數 $y = (k+4)x^2 + (k+1)x + 1$ 的圖形恰通過三個象限，求 k 的範圍？

9. 設 k 為實數，若對任意的實數 x 而言， $y = -2x^2 - 8x + k$ 圖形永遠在直線 $y = -4x + 5$ 的下方且不相交，則 k 可為下列哪些選項之值？

(A) -3.5

(B) 3

(C) π (圓周率)

(D) $\sqrt{17-12\sqrt{2}}$

(E) $\frac{1000000\sqrt{6} + 234567\sqrt{7}}{1234567}$

7.【答】:3

$$\begin{aligned}\text{【解】: } 1^\circ \quad x \neq 0 \text{ 或 } 3, \text{ 則同乘 } x^2 - 3x &\Rightarrow x^2 + (x-3)^2 = a - 3x \\ &\Rightarrow 2x^2 - 3x + (9-a) = 0\end{aligned}$$

$$\because \text{恰一實根 (重根)} \therefore D = 0 \Rightarrow a = \frac{63}{8}$$

$$2^\circ \quad x = 0 \Rightarrow a = 9$$

$$3^\circ \quad x = 3 \Rightarrow a = 18$$

$\therefore$ 綜合以上，得 a 有 3 個

8.【答】: $-4 \leq k < -3$ 或 $k > 5$

【解】: 1° 二次函數圖形通過三個象限 $\Rightarrow$ 兩相異實根且兩根同號或一根為 0

$$\begin{aligned}\Rightarrow &\begin{cases} D = (k+1)^2 - 4(k+4) > 0 \\ \text{兩根積} = \frac{1}{k+4} \geq 0 \\ x^2 \text{ 項係數 } k+4 \neq 0 \end{cases} \\ \Rightarrow &\begin{cases} k > 5 \text{ 或 } k < -3 \\ k \geq -4 \\ k \neq -4 \end{cases} \Rightarrow -4 < k < -3 \text{ 或 } k > 5\end{aligned}$$

2° 討論 $k = -4 \Rightarrow y = -3x + 1$ 為不過原點之直線
也恰通過三個象限 $\Rightarrow k = -4$ (合)

$\therefore -4 \leq k < -3$ 或 $k > 5$

9.【答】: (A)(D)(E)

$$\begin{aligned}\text{【解】: } -2x^2 - 8x + k < -4x + 5 &\Rightarrow 2x^2 - 4x - (k-5) > 0 \quad \forall x \in R \text{ 恆成立} \Rightarrow D < 0 \\ &\Rightarrow k < 3\end{aligned}$$

$$(D) \quad \sqrt{17-12\sqrt{2}} = \sqrt{17-2\sqrt{72}} = 3-2\sqrt{2} < 3$$

(E) $\sqrt{6}$ 至 $\sqrt{7}$ 之間 (內分點公式)

10. 若將二次函數 $y = f(x) = ax^2 + bx + c$ 的圖形向下平移 1 單位後，發現其與 x 軸所截出之線段長變為原本的 2 倍，則 $f(x)$ 的圖形頂點之 y 坐標為

_____。

11. 若函數 $g(x) = x^3 + x^2 - |x - 1|$ 為函數 $f(x)$ 之圖形向左平移 2 單位，再向下平移 1 單位而得到的函數，求函數 $f(x) =$ _____。(不須展開)

12. n 次多項式 $f(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + a_{n-2} x^{n-2} + \cdots + a_2 x^2 + a_1 x + a_0$ ，
其中各項係數皆為正整數或 0，若 $f(0) = 2$ ， $f(1) = 7$ ， $f(7) = 3439$ ，
則試求出 $f(x)$ 。

10.【答】: $-\frac{1}{3}$

【解】: 令 $f(x)$ 與 x 軸所截線段為 ℓ , 移動後為 ℓ'

$$\Rightarrow \ell = \frac{2\sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}, \ell' = \frac{2\sqrt{b^2 - 4a(c-1)}}{2a}$$

$$\ell' = 2\ell \Rightarrow \frac{\sqrt{b^2 - 4a(c-1)}}{a} = \frac{2\sqrt{b^2 - 4ac}}{a}$$

$$\Rightarrow b^2 - 4ac + 4a = 4(b^2 - 4ac)$$

$$\Rightarrow b^2 - 4ac = \frac{4}{3}a$$

$$f(x) \text{ 頂點之 } y \text{ 座標} = \frac{4ac - b^2}{4a} \Rightarrow \frac{-\frac{4}{3}a}{4a} = -\frac{1}{3}$$

11.【答】: $(x-2)^3 + (x-2)^2 - |x-3| + 1$

$$\begin{aligned} \text{【解】: } g(x) \text{ 平移 } (2, 1) &\Rightarrow f(x) = (x-2)^3 + (x-2)^2 - |(x-2)-1| + 1 \\ &= (x-2)^3 + (x-2)^2 - |x-3| + 1 \end{aligned}$$

12.【答】: $x^4 + 3x^3 + x + 2$

【解】: $\because$ 多項式的係數均為正整數或 0, 且 $7^4 = 2401, 7^5 = 16807, f(7) = 3439$

$\therefore$ 多項式的最高次數為 4 次式

$$\text{令 } f(x) = ax^4 + bx^3 + cx^2 + dx + e, a, b, c, d, e \in N \cup \{0\}$$

$$\begin{cases} f(0) = 2 \\ f(1) = 7 \\ f(7) = 3439 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} e = 2 \\ a + b + c + d + e = 7 \\ 2401a + 343b + 49c + 7d + e = 3439 \end{cases}$$

$$\Rightarrow (a, b, c, d, e) = (1, 3, 0, 1, 2)$$

$$\therefore f(x) = x^4 + 3x^3 + x + 2$$

13. 設 $f(x) = 1 \times \frac{(x-1)(x-2)(x-3)}{(0-1)(0-2)(0-3)} + 4 \times \frac{x(x-2)(x-3)}{(1-0)(1-2)(1-3)} + 9 \times \frac{x(x-1)(x-3)}{(2-0)(2-1)(2-3)} + 16 \times \frac{x(x-1)(x-2)}{(3-0)(3-1)(3-2)}$, 則 $f(99) =$ _____

14. 設 a, b, c 為實數, $f(x) = ax^2 - 4x + 6$, $g(x) = 3x^2 + bx + c$, 若 $f(4) = g(4) - 8$, $f(6) = g(6) - 12$, $f(9) = g(9) - 18$, 則 $f(2014) - g(2014) =$ _____

15. 對於函數 $f(x)$, 若存在實數 x_0 , 使得 $f(x_0) = x_0$ 成立, 則稱 x_0 為函數 $f(x)$ 的固定點。例如: $f(x) = x^2 - 2x - 4$ 的固定點為 4 和 -1; 已知對於任意實數 b , 二次函數 $f(x) = ax^2 + (1+2b)x + (1-b)$ 恆有兩個相異固定點, 則實數 a 的範圍為 _____。

13.【答】：10000

【解】：觀察得 x^3 係數為 0

$$\Rightarrow \text{設 } f(x) = ax(x-1) + bx + c$$

以 (0,1)(1,4)(2,9)(3,16) 代入得

$$f(x) = x^2 + 2x + 1 = (x+1)^2$$

$$f(99) = 100^2 = 10000$$

14.【答】：-4028

【解】： $\because \deg f(x) = \deg g(x) = 2$

$\therefore$ 題幹的三個條件可保證 $f(x) = g(x) - 2x$

$$\Rightarrow f(2014) - g(2014) = -2 \times 2014 = -4028$$

15.【答】：-4 < a < 0

【解】：題意即 $ax^2 + (1+2b)x + (1-b) = x \Rightarrow ax^2 + 2bx + (1-b) = 0$

對任意實數 b 皆有兩相異解

$$\Rightarrow D = 4b^2 + 4ab - 4a > 0 \Rightarrow b^2 + ab - a > 0 \cdots (*)$$

(*) 式為 b 之二次式，若任意實數 b 代入皆成立

$$\Rightarrow (*) \text{ 式之 } D = a^2 + 4a < 0 \Rightarrow -4 < a < 0$$

16. 已知實係數二次多項式函數 $y = f(x)$ 的圖形與 x 軸交於 $(1, 0)$ 、 $(2, 0)$ 兩點；
實係數二次多項式函數 $y = g(x)$ 的圖形與 x 軸相交於 $(2, 0)$ 、 $(3, 0)$ 兩點。則
下列哪些選項可能為 $f(x) + g(x) > 0$ 的解

- (1) $x > 3$ 或 $x < 1$ (2) x 為任意實數 (3) $x \neq 2$
(4) 無解 (5) $\frac{3}{2} < x < 2$

17. 設 a, b 為實數，已知 $x^2 - x - 1$ 整除 $ax^{17} + bx^{16} + 3$ ，則 $a =$ _____。

16.【答】：(3)(4)(5)

【解】：令 $f(x) = a(x-1)(x-2)$, $g(x) = b(x-2)(x-3)$, $a, b \neq 0$

$$\Rightarrow f(x) + g(x) = (x-2)[(a+b)x - a - 3b]$$

$$\text{若 } a+b=0 \Rightarrow f(x) + g(x) = a(x-2)$$

$$\Rightarrow f(x) + g(x) > 0 \text{ 的解為 } x > 2 \text{ 或 } x < 2$$

$$\text{若 } a+b \neq 0 \Rightarrow f(x) + g(x) = 0 \Rightarrow x = 2 \text{ or } \frac{a+3b}{a+b}$$

$$\text{當 } a+b > 0, \text{ 且 } \frac{a+3b}{a+b} = 2 \text{ 時, } f(x) + g(x) > 0 \text{ 的解為 } x \neq 2$$

$$\text{當 } a+b < 0, \text{ 且 } \frac{a+3b}{a+b} = \frac{3}{2} \text{ 時, } f(x) + g(x) > 0 \text{ 的解為 } \frac{3}{2} < x < 2$$

$$\text{當 } a+b < 0, \text{ 且 } \frac{a+3b}{a+b} = 2 \text{ 時, } f(x) + g(x) > 0 \text{ 無解}$$

故選(3)(4)(5)

17.【答】：2961

【解】：由長除法或綜合除法可得 $ax^{17} + bx^{16} + 3$ 除以 $x^2 - x - 1$ 的餘式為 $(1597a + 987b)x + (2584a + 1597b + 3)$

$$\Rightarrow \begin{cases} 1597a + 987b = 0 \\ 2584a + 1597b + 3 = 0 \end{cases} \Rightarrow a = 2961, b = -4791$$

18. 已知三次實係數多項式 $f(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d$ 的圖形如右圖，則下列哪些關係式正確？

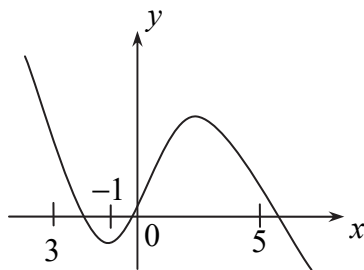
(A) $a - b + c - d < 0$

(B) $a > 0$

(C) $b > 0$

(D) $c > 0$

(E) $d > 0$



19. 設 α, β, γ 為 $x^3 + 2x^2 + 3x + 4 = 0$ 的三根，試求以 $\frac{1}{\alpha-1}, \frac{1}{\beta-1}, \frac{1}{\gamma-1}$ 為三根之新方程式為何？

18.【答】：(C)(D)(E)

【解】：(A) $f(-1) = -a + b - c + d < 0 \Rightarrow a - b + c - d > 0$

(B) 圖形右下降 $\Rightarrow a < 0$

設三根 $\alpha, \beta, \gamma, \alpha < \beta < \gamma$

由圖可知 $-3 < \alpha < -1, -1 < \beta < 0, \gamma > 5$

(C) 三根之和 $= \frac{-b}{a}$

$$\begin{cases} -3 < \alpha < -1 \\ -1 < \beta < 0 \\ 5 < \gamma \end{cases} \Rightarrow 1 < \alpha + \beta + \gamma \therefore \frac{-b}{a} > 0 \Rightarrow b > 0$$

(D) $d = f(0) > 0$

$\because a < 0, b > 0, d > 0$ 又 $a - b + c - d > 0 \therefore c > 0$

(E) $d = f(0) > 0$

19.【答】： $10x^3 + 10x^2 + 5x + 1 = 0$

【解】：1° 由根與係數關係可得：
$$\begin{cases} \alpha + \beta + \gamma = -2 \\ \alpha\beta + \beta\gamma + \gamma\alpha = 3 \\ \alpha\beta\gamma = -4 \end{cases}$$

2° 可將多項式改寫為： $x^3 + 2x^2 + 3x + 4 = (x - \alpha)(x - \beta)(x - \gamma)$

令 $x = 1$ 代入左右兩式 $\Rightarrow 10 = (1 - \alpha)(1 - \beta)(1 - \gamma)$

3° 找出新三根之和、兩兩乘積和、三根之積

$$\text{三根之和 } \frac{1}{\alpha - 1} + \frac{1}{\beta - 1} + \frac{1}{\gamma - 1} = -1$$

$$\text{兩兩乘積和 } \frac{1}{(\alpha - 1)(\beta - 1)} + \frac{1}{(\beta - 1)(\gamma - 1)} + \frac{1}{(\gamma - 1)(\alpha - 1)} = \frac{1}{2}$$

$$\text{三根之積 } \frac{1}{(\alpha - 1)(\beta - 1)(\gamma - 1)} = -\frac{1}{10}$$

$\therefore$ 所求 $\Rightarrow 10x^3 + 10x^2 + 5x + 1 = 0$

【另】：利用連續綜合除法可得：

$$f(x) = x^3 + 2x^2 + 3x + 4 = (x - 1)^3 + 5(x - 1)^2 + 10(x - 1) + 10$$

已知 α, β, γ 為 $x^3 + 2x^2 + 3x + 4 = 0$ 之三根

$\Rightarrow \alpha - 1, \beta - 1, \gamma - 1$ 為 $x^3 + 5x^2 + 10x + 10 = 0$ 之三根

$\Rightarrow \frac{1}{\alpha - 1}, \frac{1}{\beta - 1}, \frac{1}{\gamma - 1}$ 為 $10x^3 + 10x^2 + 5x + 1 = 0$ 之三根

20. 設 α, β, γ 為 $x^3 - 2x^2 - 5x + 1 = 0$ 的三根，求下列各小題之值：

(1) $\alpha^2 + \beta^2 + \gamma^2$ 。

(2) $\alpha^3 + \beta^3 + \gamma^3$ 。

(3) $(\alpha^2 - 2\alpha - 6)(\beta^2 - 2\beta - 6)(\gamma^2 - 2\gamma - 6)$ 。

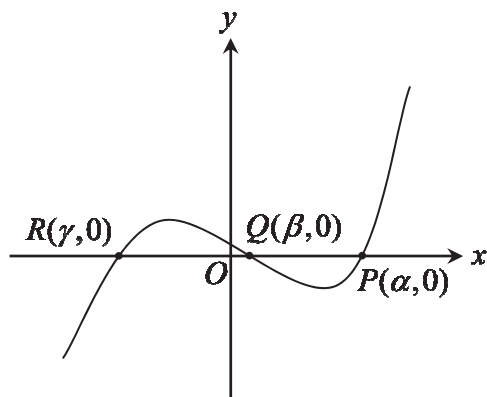
21. 三次函數 $f(x) = x^3 - 7x + t$ ，(其中 t 為實數) 的圖形如右，則下列選擇何者正確？

(A) $t > 0$

(B) 方程式 $f(x) - x^2 = 0$ 恰有三個實根

(C) $\alpha + \beta + \gamma > 0$

(D) $f(\frac{\alpha + 2\gamma}{3}) > 0$



20.【答】：(1)14 (2)35 (3)-3

【解】 $\because \alpha, \beta, \gamma$ 為 $x^3 - 2x^2 - 5x + 1 = 0$ 之三根

$$\Rightarrow \begin{cases} \alpha + \beta + \gamma = 2 \\ \alpha\beta + \beta\gamma + \gamma\alpha = -5 \\ \alpha\beta\gamma = -1 \end{cases}$$

$$\text{令 } f(x) = x^3 - 2x^2 - 5x + 1 = (x - \alpha)(x - \beta)(x - \gamma)$$

$$(1) \alpha^2 + \beta^2 + \gamma^2 = (\alpha + \beta + \gamma)^2 - 2(\alpha\beta + \beta\gamma + \gamma\alpha) = 14$$

$$(2) \alpha^3 + \beta^3 + \gamma^3 = (\alpha + \beta + \gamma)(\alpha^2 + \beta^2 + \gamma^2 - \alpha\beta - \beta\gamma - \gamma\alpha) + \alpha\beta\gamma = 35$$

$$(3) (\alpha^2 - 2\alpha - 6)(\beta^2 - 2\beta - 6)(\gamma^2 - 2\gamma - 6)$$

$$= \frac{1}{\alpha\beta\gamma} (\alpha^3 - 2\alpha^2 - 6\alpha)(\beta^3 - 2\beta^2 - 6\beta)(\gamma^3 - 2\gamma^2 - 6\gamma)$$

$$\text{又 } x^3 - 2x^2 - 5x + 1 = 0 \Rightarrow x^3 - 2x^2 - 6x = -1 - x$$

$$\text{原式} = \frac{1}{\alpha\beta\gamma} (\alpha^3 - 2\alpha^2 - 6\alpha)(\beta^3 - 2\beta^2 - 6\beta)(\gamma^3 - 2\gamma^2 - 6\gamma)$$

$$= \frac{1}{\alpha\beta\gamma} (-1 - \alpha)(-1 - \beta)(-1 - \gamma) = \frac{1}{\alpha\beta\gamma} f(1) = -3$$

21.【答】：(A)(B)(D)

【解】：(A) $f(0) = t > 0$

(B) 繪圖可知 $f(x)$ 與 $y = x^2$ 有 3 交點 $\Rightarrow$ 恰有 3 實根

(C) $\alpha + \beta + \gamma = 0$

(D) $\because \alpha + \beta + \gamma = 0$ 且 $\alpha, \beta > 0, \gamma < 0 \Rightarrow |\gamma| > \alpha$

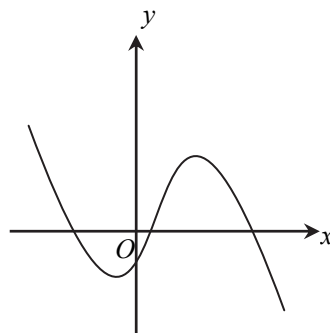
$$\text{又 } \gamma < \frac{\alpha + 2\gamma}{3} < \frac{\alpha + \gamma}{2} < 0$$

且在區間 $(\gamma, 0)$ 間， $y = f(x)$ 之圖形皆位於 x 軸上方

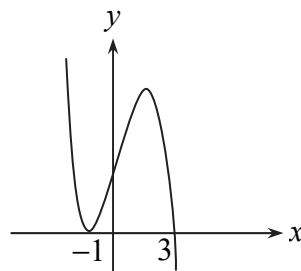
$$\Rightarrow f\left(\frac{\alpha + 2\gamma}{3}\right) > 0$$

22. 右圖是三次函數 $f(x) = px^3 + qx^2 + rx + s$ 的圖形，請問下列選項哪些是正確的？

- (A) $g(x) = rx + s$ 為 $f(x)$ 在 $x = 0$ 附近的一次近似
- (B) $p > 0$
- (C) $q > 0$
- (D) $r > 0$
- (E) $s > 0$



23. 三次函數 $y = f(2x-1)$ 的圖形如右所示，則 $f(x) > 0$ 的解為 _____。



24. 已知 $f(x) = x^4 + (4-k)x^3 + (5-4k)x^2 + (4-4k)x + 4$ ， k 為實數，且 $f(x) \leq 0$ 的解為 $x = -2$ ，則滿足此條件 k 的範圍為 _____。

22.【答】：(A)(C)(D)

【解】：(A) 正確

(B) 右下降 $\Rightarrow p < 0$

(C) 由圖形可知, 三根和 $= \frac{-q}{p} > 0 \Rightarrow q < 0$

(D) 由一次近似 $y = rx + s$ 斜率可知, $r > 0$

(E) $s = f(0) < 0$

23.【答】： $x < 5, x \neq -3$

【解】： $f(2x-1) > 0 \Rightarrow x < 3, x \neq -1$

令 $2x-1=t \Rightarrow x = \frac{t+1}{2}$ 帶入上式得

$$f(t) > 0 \Rightarrow \frac{t+1}{2} < 3, \frac{t+1}{2} \neq -1 \Rightarrow t < 5, t \neq -3$$

$$f(x) > 0 \Rightarrow x < 5, x \neq -3$$

24.【答】： $-2 < k < 2$

【解】： $f(x) \leq 0$ 的解為 $x = -2 \Rightarrow$ 表圖形在 x 軸上方且切 x 軸於 $x = -2$

$$\therefore (x+2)^2 \text{ 為 } f(x) \text{ 的因式} \Rightarrow f(x) = (x+2)^2(x^2 - kx + 1)$$

$$f(x) \leq 0 \text{ 的解為 } x = -2 \Rightarrow x^2 - kx + 1 > 0 \text{ 恆成立}$$

$$\Rightarrow D = k^2 - 4 < 0 \Rightarrow -2 < k < 2$$

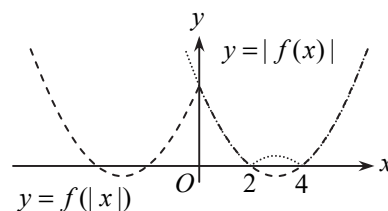
25. 設 $f(x) = x^2 - 6x + 8$ ，則不等式 $f(|x|) \geq |f(x)|$ 的解為_____。

26. 關於三次函數 $f(x) = -x^3 + 3x^2 - x + 2$ 的圖形下列敘述哪些正確？

- (A) $y = f(x)$ 圖形的最右方是上升的。
- (B) 若 $g(x) = f(x+2)$ ，則將 $y = f(x)$ 的圖形向右平移 2 單位可得 $y = g(x)$ 的圖形。
- (C) 若 $y = f(x)$ 的圖形可由 $y = ax^3 + px$ 的圖形 (a, p 為實數) 經適當平移後得到，則 $a = -1$ 。
- (D) 若 $y = f(x)$ 的圖形可由 $y = ax^3 + px$ 的圖形 (a, p 為實數) 經適當平移後得到，則 $p = 3$ 。
- (E) $y = f(x)$ 圖形為點對稱圖形。

25.【答】： $0 \leq x \leq 2$ 或 $x \geq 4$

【解】：令 $f(x) = 0 \Rightarrow x = 2$ 或 4 。繪圖如右，
 虛線為 $y = f(|x|)$ ，圓點線為 $y = |f(x)|$ 。
 由圖可知，當 $0 \leq x \leq 2$ 或 $x \geq 4$ 時，
 $f(|x|) \geq |f(x)|$



26.【答】：(C)(E)

【解】：(A) 因為 $a = -1 < 0$ ，所以圖形為右下降

(B) 應該是向左平移2單位

(C)(D)

$y = f(x)$ 對稱中心的 $x = \frac{-3}{3 \cdot (-1)} = 1 \Rightarrow$ 則

$$y = f(x) = -(x-1)^3 + 2(x-1) + 3$$

所以 $y = f(x)$ 可由 $y = -x^3 + 2x$ 平移得到 $\Rightarrow a = -1, p = 2$

(E) 對稱中心為 (1,3)