

陳立數學高頻率命題

使用說明

- 精選各校試題，切中段考要點

「高頻率命題」為收集全國各高中歷屆段考試題，由專業師資分析整理，精選該主題必備試題，隨時掌握重要段考趨勢。

- 主題式的編排，配合課程重點

題目皆依陳立數學教材主題分類，題型明確，便於同學課後練習，迅速複習當週上課重點。

以學生學習角度設計的排版模式，讓同學快速提升學習效率。

- 課後搭配講義，週週搭配進度

陳立數學每次課程平均進度為 3~5 個主題，課後除了教材中的主題作業，更搭配此本高頻率命題，練習更多題型，確切掌握課程重點，創造卓越效果，讓學習事半功倍。

- 雲端數位影音，學習不落人後

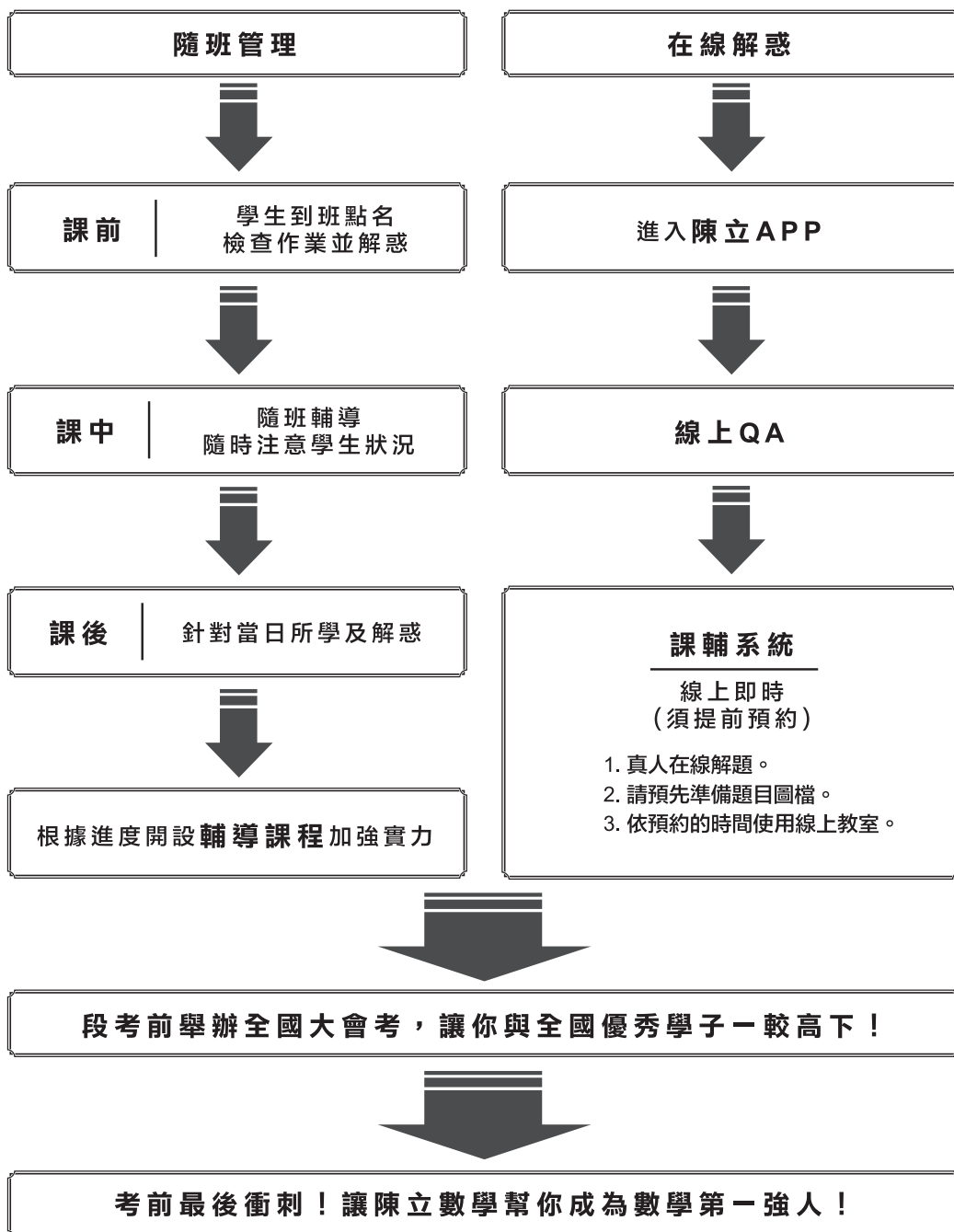
高頻率命題每個主題皆有附上 QR 碼，部分題目可連結影音講解，讓同學可以跟著解析一步步學習解題脈絡，可迅速解惑無需等待。不論身處何處都能於線上觀看最詳盡的解說，打破距離限制，享受最即時的影音教學。

善用專業教材・必能事半功倍

陳立教育集團

— 數 · 學 · 科 —
專業輔導系統

輔導無死角，線上再升級！



★ 數與數線

主題 1	有理數	6
主題 2	無理數	14
主題 3	實數	26
主題 4	數線	28
主題 5	絕對值	34
主題 6	折線函數圖形	42
主題 7	算幾不等式	46
主題 8	實數範圍與區間	56

★ 式的運算

主題 9	乘法公式	61
主題 10	因式分解	69
主題 11	平方根	73
主題 12	特殊方根的處理	77
主題 13	有理化分母	86

★ 指數

主題 14	指數定義及基本運算	93
主題 15	指數比較大小	99
主題 16	科學記號	101

★ 常用對數

主題 17	常用對數	104
-------	------------	-----

★ 數與數線

主題 1 有理數

⊙基礎精選⊙

1. 觀念是非題：

- (1) () 所謂稠密性為：任意兩個相異整數間至少存在一個整數。
- (2) () 循環小數 $0.5\overline{43}$ 不是有理數。



2. 下列何者可化為有限小數？

- (A) $\frac{283}{350}$ (B) $\frac{63}{128}$ (C) $\frac{147}{168 \times 125}$ (D) $\frac{149}{21 \times 40}$ (E) $\frac{56}{25^9}$



1.【答】：(1)× (2)×

【解】：(1) 有理數稠密性：任意兩個相異的有理數之間至少存在一個有理數
實數稠密性：任意兩個相異的實數之間至少存在一個實數
整數並沒有稠密性

$$(2) \text{ 循環小數可轉換為有理數 } 0.\overline{543} = \frac{543-5}{990} = \frac{538}{990}$$

2.【答】：(B)(C)(E)

【解】：若 $\frac{b}{a}$ 為有限小數 $(a, b) = 1, a, b \in \mathbb{Z} \Leftrightarrow a$ 之質因數只含 2 或 5

$$(A) \frac{283}{350} = \frac{283}{2 \cdot 5^2 \cdot 7}$$

$$(B) \frac{63}{128} = \frac{63}{2^7}$$

$$(C) \frac{147}{168 \times 125} = \frac{7}{8 \cdot 125} = \frac{7}{2^3 \cdot 5^3}$$

$$(D) \frac{149}{21 \times 40} = \frac{149}{2^3 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 7}$$

$$(E) \frac{56}{25^9} = \frac{56}{5^{18}}$$

3. 下列有關循環小數的敘述，請選出正確的選項：

(A) $0.\bar{3} + 0.\bar{4} = 0.\bar{7}$

(B) $0.\bar{7} + 0.\bar{3} = 1$

(C) $0.\bar{5} + 0.\bar{5} = 1.\bar{1}$

(D) $0.\bar{7} + 0.\bar{3} = 0.\bar{4} + 0.\bar{6}$

(E) $0.4\bar{9} = 0.5$



[數位延伸]

4. $2 + \frac{1}{1 + \frac{1}{5}} = \frac{17}{6}$ ，稱 $\langle 2, 1, 5 \rangle$ 為 $\frac{17}{6}$ 之連分數表示法，則 $\frac{3431}{2397}$

之連分數表示法為 _____



3.【答】：(A)(C)(D)(E)

【解】：(A) $0.\bar{3} + 0.\bar{4} = \frac{3}{9} + \frac{4}{9} = \frac{7}{9} = 0.\bar{7}$

(B) $0.\bar{7} + 0.\bar{3} = \frac{7+3}{9} > 1$

(C) $0.\bar{5} + 0.\bar{5} = \frac{10}{9} = 1.\bar{1}$

(D) $0.\bar{7} + 0.\bar{3} = \frac{7+3}{9} = \frac{4+6}{9} = 0.\bar{4} + 0.\bar{6}$

(E) $0.4\bar{9} = 0.4 + 0.0\bar{9} = 0.4 + \frac{9}{90} = 0.5$

4.【答】：<1, 2, 3, 7>

【解】： $\frac{3431}{2397} = 1 + \frac{1034}{2397} = 1 + \frac{1}{\frac{2397}{1034}} = 1 + \frac{1}{2 + \frac{329}{1034}} = 1 + \frac{1}{2 + \frac{1}{3 + \frac{47}{329}}} = 1 + \frac{1}{2 + \frac{1}{3 + \frac{1}{7}}}$

故 $\frac{3431}{2397}$ 的連分數表示法為 <1, 2, 3, 7>

5. 已知 $9900 = 4950 \times 2$ 。將分數 $\frac{2357}{4950}$ 化成小數時，小數點後第 103 位數字為 _____。



[數位延伸]

6. $a, b, c \in Z$ 且 $|a-1| + 2|b-2| + 3|a-c| = 2$ ，求數對 (a, b, c) 有 _____ 組解。



5.【答】: 6

【解】: $\frac{2357}{4950} = \frac{4714}{9900} = 0.47\overline{61} \quad \therefore (103-2) \div 2 \dots 1 \Rightarrow \text{數字為 } 6$

6.【答】: 4

【解】:

$$\textcircled{1} \begin{cases} |a-1|=0 \\ |b-2|=1 \\ |a-c|=0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a=c=1 \\ b=1, 3 \end{cases} \Rightarrow 2 \text{ 組}$$

$$\textcircled{2} \begin{cases} |a-1|=2 \\ |b-2|=0 \\ |a-c|=0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a=c=-1, 3 \\ b=2 \end{cases} \Rightarrow 2 \text{ 組} \quad \therefore \text{共 } 4 \text{ 組}$$

★能力進階★

HILJY



1. a 、 b 均為自然數，有一最簡分數 $\frac{b}{a}$ ， $\frac{b}{a}$ 與 $\frac{b+1}{a+1}$ 相差 $\frac{1}{28}$ 且 $\frac{b}{a}$

與 $\frac{b-1}{a-1}$ 相差 $\frac{1}{21}$ ，則 $\frac{b}{a} = ?$

2. 已知 a 為整數，若 $\frac{1}{3} \leq \frac{12}{a} \leq \frac{1}{2}$ ，且 $\frac{12}{a}$ 可化為有限小數，則符合條件的 a 值有幾個？

(1) 1 (2) 2 (3) 3 (4) 4 (5) 5

1.【答】： $\frac{5}{7}$ 或 $\frac{9}{7}$

【解】：(1) 若 $\frac{b}{a}$ 為真分數 $\Rightarrow \frac{b-1}{a-1} < \frac{b}{a} < \frac{b+1}{a+1}$

$$\Rightarrow \begin{cases} \frac{b+1}{a+1} - \frac{b}{a} = \frac{1}{28} \\ \frac{b}{a} - \frac{b-1}{a-1} = \frac{1}{21} \end{cases} \xrightarrow{\text{通分}} \begin{cases} \frac{ab+a-ab-b}{(a+1)a} = \frac{1}{28} \\ \frac{ab-b-ab+a}{(a-1)a} = \frac{1}{21} \end{cases} \quad \text{兩式相除}$$

$$\Rightarrow \frac{a-1}{a+1} = \frac{21}{28} = \frac{3}{4} \Rightarrow 3a+3=4a-4 \Rightarrow a=7$$

$$\text{代回可得} \begin{cases} a=7 \\ b=5 \end{cases}$$

(2) 若 $\frac{b}{a}$ 為假分數 $\Rightarrow \frac{b+1}{a+1} < \frac{b}{a} < \frac{b-1}{a-1}$

$$\Rightarrow \begin{cases} \frac{b-1}{a-1} - \frac{b}{a} = \frac{1}{21} \\ \frac{b}{a} - \frac{b+1}{a+1} = \frac{1}{28} \end{cases} \xrightarrow{\text{通分}} \begin{cases} \frac{ab-a-ab+b}{(a-1)a} = \frac{1}{21} \\ \frac{ab+b-ab-a}{(a+1)a} = \frac{1}{28} \end{cases} \quad \text{兩式相除}$$

$$\Rightarrow \frac{a+1}{a-1} = \frac{28}{21} = \frac{4}{3} \Rightarrow 3a+3=4a-4 \Rightarrow a=7$$

$$\text{代回可得} \begin{cases} a=7 \\ b=9 \end{cases}$$

2.【答】：(4)

【解】： $\frac{1}{3} = \frac{12}{a} \Rightarrow a=36, \frac{1}{2} = \frac{12}{a} \Rightarrow a=24$, 可知 $24 \leq a \leq 36$

又 $\frac{12}{a}$ 為有限小數 $\Rightarrow a=24, 25, 30, 32$ 共 4 個

主題 2 無理數

◎基礎精選◎

1. 是非觀念題：

(1) () 設 $a, b \in R$ ，若 $a+b$ 為有理數， $a \cdot b$ 為有理數，則 $a-b$ 為有理數。

(2) () 若 $a > 0, b > 0$ ，則 $\sqrt{a+b-2\sqrt{ab}} = \sqrt{a} - \sqrt{b}$

(3) () 設 $a+b \in Q$ 且 $a-b \notin Q$ ，則 $a \notin Q$ 。



2. 設 k 為一整數。已知 $\frac{k}{4} < \sqrt{29} < \frac{k+1}{4}$ ，則 k 的值為

(A) 20 (B) 21 (C) 22 (D) 23 (E) 24



3. 將 $\sqrt{n}$ 化為小數表示，再四捨五入取至整數，得值為 11，則這樣的正整數 n 有 _____ 個。



1.(1)【答】：×

【解】：取 $a = \sqrt{2}, b = -\sqrt{2}$

$$a + b = 0 \in Q$$

$$a \cdot b = -2 \in Q$$

$$\text{但 } a - b = 2\sqrt{2} \notin Q$$

1.(2)【答】：×

【解】：應為 $|\sqrt{a} - \sqrt{b}|$

1.(3)【答】：○

2.【答】：(B)

$$\text{【解】：} k < 4\sqrt{29} < k+1 \Rightarrow k < \sqrt{464} < k+1$$

$$\text{故 } k = 21$$

3.【答】：22

$$\text{【解】：} 10.5 \leq \sqrt{n} < 11.5 \Rightarrow 110.25 \leq n < 132.25$$

$$\Rightarrow n \text{ 有 } 132 - 110 = 22 \text{ 個}$$

4. 若 $a \in R$ ，則下列那些可保證 $a \in Q$ ？

- (A) $a^6 \in Q$ 且 $a^{15} \in Q$ (B) $a^3 \in Q$ 且 $a^{10} \in Q$ (C) $a^{84} \in Q$ 且 $a^{95} \in Q$
(D) $a^{119} \in Q$ 且 $a^{85} \in Q$ (E) $a^{91} \in Q$ 且 $a^{52} \in Q$

UNTTR



5. 設 a, b 為有理數， c, d 為無理數，且 $a \neq 0$ ，判斷下列何者為正確？

- (A) $a+c$ 為無理數 (B) $c+d$ 為無理數 (C) ac 為無理數
(D) cd 為無理數 (E) $\frac{b}{a}$ 為有理數。

DCKSV



6. $x, y \in Q$ ， a, b 是無理數，則下列那些是正確的？

- (A) ax 是無理數 (B) $xy \in Q$ (C) $a+b$ 是無理數
(D) $\frac{a+x}{3}$ 是無理數 (E) $|a|+|b|$ 是無理數

XHCTG



4.【答】：(B)(C)

【解】：次方互質即可。 $(6, 15) = 3$ 只可保證 $a^3 \in Q$

$$\text{例如：(B) } a = \frac{(a^3)^7}{(a^{10})^2} \in Q$$

5.【答】：(A)(C)(E)

【解】：(B) 令 $c = \sqrt{2}, d = -\sqrt{2}$, 則 $c + d = 0 \in Q$

(D) 令 $c = \sqrt{2}, d = \sqrt{2}$, 則 $cd = 2 \in Q$

6.【答】：(B)(D)

【解】：(A) 令 $x = 0$, 則 $ax = 0 \in Q$

(C) $\sqrt{2} + (-\sqrt{2}) = 0 \in Q$

(E) 令 $(a, b) = (\sqrt{2}, 2 - \sqrt{2}) \Rightarrow |a| + |b| = 2 \in Q$

7. a, b, c, d 均為有理數，且 $abcd \neq 0$ ， x, y 均為無理數，則下列敘述何者恆真？

- (A) $a+bx$ 為無理數
- (B) xy 為無理數
- (C) 若 $a+b\sqrt{3}=c+d\sqrt{3}$ ，則 $a=c, b=d$
- (D) $\frac{x}{a}+\frac{y}{b}$ 為無理數
- (E) 若 $a+x=b+y$ ，則 $a=b, x=y$

MEWTB



8. 有關實數的特性，下列何者正確？

- (A) a, b 都是無理數，則 $a+b$ 為無理數
- (B) $a+b, ab$ 都是有理數，則 a, b 都是有理數
- (C) 若 a, b 為無理數，則 $a+b, a-b$ 至少有一個無理數
- (D) P 是質數，則 $\sqrt{P}$ 一定是無理數
- (E) a, b, c 為實數，若 $a+b, b+c, c+a$ 皆為有理數，則 a, b, c 皆為有理數。

CYUTA



9. 設 x, y 為有理數，若 $(\sqrt{2}-1)x+(\sqrt{9+4\sqrt{2}})y=-3x+6\sqrt{2}$ ，則 $x+y=$ _____。

DQXVC



7.【答】：(A)(C)

【解】：(B) 令 $x = y = \sqrt{2}$ ，則 $xy = 2 \in Q$

(D) 令 $x = y = \sqrt{2}$ ， $a = 1$ ， $b = -1$ ，則 $\frac{x}{a} + \frac{y}{b} = 0 \in Q$

(E) 令 $a = 1$ ， $b = 2$ ， $x = \sqrt{2} + 1$ ， $y = \sqrt{2}$ ，則 $a + x = b + y = 2 + \sqrt{2}$ ，
但 $a \neq b$ 且 $x \neq y$

8.【答】：(C)(D)(E)

【解】：(A) $\sqrt{2} + (-\sqrt{2}) = 0 \in Q$

(B) 令 $a = \sqrt{2}$ ， $b = -\sqrt{2}$ 即為反例

(C) 設 $a + b$ 與 $a - b$ 都是有理數

$$\Rightarrow a = \frac{(a+b) + (a-b)}{2} \in Q, b = \frac{(a+b) - (a-b)}{2} \in Q, \text{ 矛盾}$$

$\therefore$ 假設錯誤 $\therefore a + b$ 與 $a - b$ 至少有一個是無理數

(D) P 是質數，且必不能分解成完全平方數，故 $\sqrt{P}$ 為無理數。

(E) $\because a + b \in Q, b + c \in Q, c + a \in Q$

$$\Rightarrow a + b + c = \frac{(a+b) + (b+c) + (c+a)}{2} \in Q$$

$$\Rightarrow a = (a + b + c) - (b + c) \in Q$$

同理 $b \in Q, c \in Q$

9.【答】：2

$$\text{【解】} : (\sqrt{2} - 1)x + (2\sqrt{2} + 1)y = -3x + 6\sqrt{2} \Rightarrow \begin{cases} -x + y = -3x \\ \sqrt{2}x + 2\sqrt{2}y = 6\sqrt{2} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = -2 \\ y = 4 \end{cases}$$

$$\therefore x + y = 2$$

10. 若 $\sqrt{17-4\sqrt{4+2\sqrt{3}}}$ 之整數部分是 a ，小數部分是 b ，若 $a-b$ 之值為 $p+q\sqrt{r}$ ， p, q, r 皆為整數，則三元數組 (p, q, r) 之值為 _____。



11. 若 $\sqrt{2-\sqrt{3}}+\sqrt{2+\sqrt{3}}+\sqrt{4-\sqrt{15}}+\sqrt{4+\sqrt{15}}=\sqrt{a}+\sqrt{b}$ ，其中 a, b 為大於 0 的實數且 $a > b$ ，則數對 $(a, b) =$ _____。



10.【答】：(5, -2, 3)

$$\begin{aligned}\text{【解】} : \sqrt{17-4\sqrt{4+2\sqrt{3}}} &= \sqrt{17-4(\sqrt{3}+1)} = \sqrt{13-4\sqrt{3}} \\ &= \sqrt{13-2\sqrt{12}} = 2\sqrt{3}-1 = 2\ldots\end{aligned}$$

$$\text{得 } a=2, b=2\sqrt{3}-3 \quad \text{故 } a-b=5-2\sqrt{3}$$

$$\text{因此, } p=5, q=-2, r=3$$

11.【答】：(10, 6)

$$\begin{aligned}\text{【解】} : &\sqrt{2-\sqrt{3}} + \sqrt{2+\sqrt{3}} + \sqrt{4-\sqrt{15}} + \sqrt{4+\sqrt{15}} \\ &= \frac{1}{\sqrt{2}}(\sqrt{4-2\sqrt{3}} + \sqrt{4+2\sqrt{3}} + \sqrt{8-2\sqrt{15}} + \sqrt{8+2\sqrt{15}}) \\ &= \frac{1}{\sqrt{2}}[(\sqrt{3}-1) + (\sqrt{3}+1) + (\sqrt{5}-\sqrt{3}) + (\sqrt{5}+\sqrt{3})] = \sqrt{6} + \sqrt{10}\end{aligned}$$

$$\text{故 } (a, b) = (10, 6)$$

【另解】

$$\begin{aligned}\text{令 } x &= \sqrt{2-\sqrt{3}} + \sqrt{2+\sqrt{3}} \\ \Rightarrow x^2 &= 2-\sqrt{3}+2+\sqrt{3}+2\cdot\underbrace{\sqrt{2-\sqrt{3}}\cdot\sqrt{2+\sqrt{3}}}_1 = 6\end{aligned}$$

$$\Rightarrow x = \sqrt{6}$$

$$\text{同理可計算得 } \sqrt{4-\sqrt{15}} + \sqrt{4+\sqrt{15}} = \sqrt{10}$$

$$\text{故此題 } (a, b) = (10, 6)$$

★能力進階★



1. 已知 a, b 均為有理數，若 $\frac{3+a\sqrt{3}}{2+5\sqrt{3}}$ 與 $\frac{b-\sqrt{2}}{2+\sqrt{2}}$ 均為有理數，則數對 $(a, b) = \underline{\hspace{2cm}}$

2. 已知 $\sqrt{720} = 26.8\dots$ ，欲使 $\sqrt{720a}, \sqrt{\frac{720}{b}}, \sqrt{720+c}, \sqrt{720-d}$ 均為正整數，當 a, b, c, d 均為最小正整數時，求 $\sqrt{a+b+c+d+1} = ?$



1.【答】： $(\frac{15}{2}, -2)$

【解】：由題意可得 $\frac{3+a\sqrt{3}}{2+5\sqrt{3}}=m, \frac{b-\sqrt{2}}{2+\sqrt{2}}=n, m, n$ 為有理數

$$\Rightarrow \begin{cases} 3+a\sqrt{3}=m(2+5\sqrt{3}) \\ b-\sqrt{2}=n(2+\sqrt{2}) \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 3=2m, a=5m \\ b=2n, -1=n \end{cases}$$

$$\Rightarrow (a, b) = (\frac{15}{2}, -2)$$

2.【答】：8

【解】： $\sqrt{720a} = \sqrt{4^2 \times 3^2 \times 5 \times a}$ 為正整數 $\therefore a = 5$

$$\sqrt{\frac{720}{b}} = \sqrt{\frac{4^2 \times 3^2 \times 5}{b}} \text{ 為正整數 } \therefore b = 5$$

$$\because \sqrt{720} = 26.8\cdots \Rightarrow 27^2 = 729, 26^2 = 676$$

當 $\sqrt{720+c}$ 為正整數，則 $c = 729 - 720 = 9$

當 $\sqrt{720-d}$ 為正整數，則 $d = 720 - 676 = 44$

$$\therefore \sqrt{a+b+c+d+1} = \sqrt{5+5+9+44+1} = \sqrt{64} = 8$$

3.(1) 設 a, b, c, d 都是有理數，而 x 是無理數，試證：

若 $a+bx=c+dx$ ，則 $a=c$ 且 $b=d$ 。

(2) 承第(1)小題，如果 a, b, c, d 都是實數，而 x 是無理數，且 $a+bx=c+dx$ ，則 $a=c$ 且 $b=d$ 是否仍成立？若成立請證明，若不成立請舉反例說明。



3.【證】：(1)令 $b \neq d$ ，則 $x = \frac{c-a}{b-d} \in Q$ ，矛盾 $\therefore b = d \Rightarrow a = c$

(2)不成立，令 $a = 0$ ， $b = 1$ ， $c = \sqrt{2}$ ， $d = \sqrt{2} - 1$ ， $x = \sqrt{2} + 1$

則 $a + bx = c + dx = \sqrt{2} + 1$ ，但 $a \neq c$ 且 $b \neq d$

主題 3 實數

◎基礎精選◎

1. 關於實數 x, y, m, n ，僅得知 $x > y$ 與 $m > n > 0$ 。

下列選項中的敘述，必定正確的是：

- (A) $x + m > y + n$ (B) $x - m > y - n$ (C) $mx > ny$
(D) $\frac{x}{m} > \frac{y}{n}$ (E) $\frac{1}{x} < \frac{1}{y}$



2. x, y, z 都為非零實數且 $x^2 + 2y^2 + z^2 + 2xy - 2yz = 0$ ，則 $\frac{y-x}{y+z} = ?$



3. a, b, c 為實數，滿足方程式 $3a^2 + 2b^2 + c^2 + 6a - 4b + 5 = 0$ ，則 $a + b + c = \underline{\hspace{2cm}}$ 。



1.【答】 : (A)

【解】 : (A) 正確

(B) 反例: $x = 3, y = 1, m = 100, n = 1 \Rightarrow x - m < y - n$

(C) 反例: $x = -1, y = -2, m = 2, n = 1 \Rightarrow mx = ny$

(D) 反例: $x = 3, y = 1, m = 6, n = 1 \Rightarrow \frac{x}{m} < \frac{y}{n}$

(E) 反例: $x = 1, y = -2 \Rightarrow \frac{1}{x} > \frac{1}{y}$

2.【答】 : 1

【解】 : 原式 $\Rightarrow (x+y)^2 + (y-z)^2 = 0$

$$\Rightarrow x = -y, y = z$$

$$\therefore \text{故所求} = \frac{y+y}{y+y} = 1$$

3.【答】 : 0

【解】 : $3(a+1)^2 + 2(b-1)^2 + c^2 = 0$

$$\therefore a + b + c = -1 + 1 + 0 = 0$$

主題 4 數線

◎基礎精選◎

1. 已知 a, b 都是實數且 $a < b$ ，則下列敘述哪些正確？

(A) $\frac{2a+3b}{5} < \frac{3a+2b}{5}$

(B) $\frac{2a+b}{3} < \frac{3a+2b}{5}$

(C) $\frac{2a+3b}{5} < \frac{2a+4b}{5}$

(D) $\frac{2a+b}{4} < \frac{3a+2b}{5}$

(E) $\frac{3a+2b}{5} < \frac{3a+4b}{7}$



2. 數線上三點 $A(2)$ 、 $B(-1)$ 、 $C(x)$ ，且 $\overline{AC} : \overline{BC} = 1:2$ ，請求出 x 的值。



1.【答】：(B)(E)

【解】：由內分點性質可知選 (B)(E)

2.【答】：1, 5

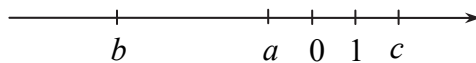
【解】：

$$(1) \begin{array}{c} \textcircled{2} \\ \textcircled{1} \end{array} \begin{array}{c} (-1) \quad (2) \\ B \quad C \quad A \end{array} \Rightarrow x = \frac{-1+4}{1+2} = 1$$

$$(2) \begin{array}{c} \textcircled{2} \\ \textcircled{1} \end{array} \begin{array}{c} (-1) \quad 2 \\ B \quad A \quad C \end{array} \Rightarrow 2 = \frac{-1+x}{2}, x = 5$$

$$\therefore x = 1, 5$$

3. 已知實數 a, b, c 在數線上的位置如右：



代數式： $\sqrt{b^2} - |a+b| + \sqrt{(b-c)^2} + |c+b| = ?$

TSTAG



4. 設 x 為實數，且 $|x+1| : |x-8| = 5:4$ ，試求 x 值？

MTWAU



3.【答】： $a-2b$

$$\begin{aligned}\text{【解】} &: \sqrt{b^2} - |a+b| + \sqrt{(b-c)^2} + |c+b| \\ &= -b - (-a-b) + c - b + (-c-b) \\ &= -b + a + b + c - b - c - b = a - 2b\end{aligned}$$

4.【答】：44 或 4

【解】：依幾何意義為 x 到 $-1, 8$ 的距離比為 $5:4$ 的分點

$$\text{Case 1: 若 } x \text{ 為內分點: } x = \frac{5 \times 8 + 4 \times (-1)}{5 + 4} = 4$$

$$\text{Case 2: 若 } x \text{ 為外分點: } x = \frac{5 \times 8 - 4 \times (-1)}{5 - 4} = 44$$

【另解】

$$|x+1| : |x-8| = 5:4$$

$$\Rightarrow 5|x-8| = 4|x+1| \text{ 兩邊平方得}$$

$$25(x-8)^2 = 16(x+1)^2$$

$$\Rightarrow 25(x^2 - 16x + 64) = 16(x^2 + 2x + 1)$$

$$\Rightarrow 9x^2 - 432x + 1584 = 0$$

$$\Rightarrow x^2 - 48x + 176 = 0$$

$$\Rightarrow x = 44 \text{ 或 } 4$$

★能力進階★

1. 已知兩實數 a, b ，其中 $a < 0$ 且 $b > 0$ ，則下列哪些選項的關係式必定會成立？

(A) $\frac{2a+b}{3} < \frac{a+2b}{3}$

(B) $\frac{2a+b}{3} < \frac{4a+b}{5}$

(C) $\frac{-2a-3b}{5} < \frac{-3a-2b}{5}$

(D) $\frac{-a-b}{5} < \frac{a+3b}{2}$

(E) $\frac{a+b}{3} < \frac{a+2b}{4}$



2. 數線上，有 $A(a)$ ， $B(b)$ ， $C(\frac{a+4b}{5})$ ， $D(\frac{4b-a}{3})$ 四點且 A 點在 B 點左方，

試選出正確的選項：

(1) B 點在 C 點左方

(2) D 點在 C 點右方

(3) $\overline{AC} : \overline{BC} = 1 : 4$

(4) $\overline{AD} : \overline{BD} = 4 : 1$

(5) $\overline{BC} : \overline{BD} = 3 : 5$

1.【答】 (A)(C)(E)

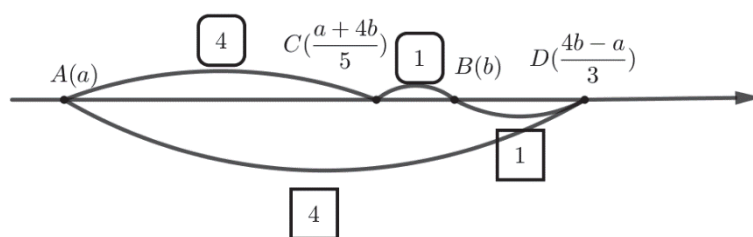
【解】 (D) 左 - 右 = $\frac{7a+17b}{10} > 0 \Rightarrow 7a+17b > 0$ 條件不足，原式不一定恆成立

(E) $\frac{a+2b}{4} - \frac{a+b}{3} = \frac{-a+2b}{12} \because a < 0, b > 0 \therefore \frac{-a+2b}{12} > 0$ 成立

2.【答】 : (2)(4)(5)

【解】 : 1° 由 $A(a)$ 、 $B(b)$ 、 $C(\frac{1 \cdot a + 4 \cdot b}{1+4})$ 、 $D(\frac{4 \cdot b - 1 \cdot a}{4-1})$ 可經內分點公式

得下圖



$$(5) \quad \overline{BC} : \overline{BD} = \overline{AB} \times \frac{1}{5} : \overline{AB} \times \frac{1}{3} = 3 : 5$$

主題 5 絕對值

◎基礎精選◎

1. 不等式 $2 \leq |2x-1| \leq 5$ 的解在數線上的圖形為 $\overline{AB}$ 與 $\overline{CD}$ ，
則 $\overline{AB} + \overline{CD} =$ _____



2. 已知 a, b 均為實數，若絕對值不等式 $|ax+8| \geq b$ 之解為 $x \geq 6$ 或 $x \leq 2$ ，
則數對 (a, b) 為 _____。



3. 設 x 為實數，請求出滿足方程式 $|x+1| + |2x-3| = 10$ 的解 $x =$ _____。



1.【答】 : 3

【解】 : $2 \leq |2x-1| \leq 5$

$$|2x-1| \leq 5, -4 \leq 2x \leq 6, -2 \leq x \leq 3$$

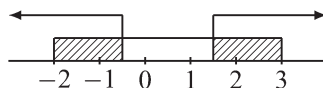
$$|2x-1| \geq 2, 2x \geq 3 \text{ 或 } 2x \leq -1$$

$$x \geq \frac{3}{2} \text{ 或 } x \leq -\frac{1}{2}$$

$$\therefore \overline{AB} + \overline{CD} = 3$$

【另解】 : $1 \leq x - \frac{1}{2} \leq \frac{5}{2} \Rightarrow x \text{ 到 } \frac{1}{2} \text{ 的距離介於 } 1 \text{ 與 } \frac{5}{2} \text{ 之間}$

$$\therefore \overline{AB} + \overline{CD} = \left(\frac{5}{2} - 1\right) \times 2 = 3$$



2.【答】 : $(-2, 4)$

【解】 : $x \geq 6 \text{ 或 } x \leq 2 \Rightarrow |x-4| \geq 2$

$$\Rightarrow |2x-8| \geq 4 \Rightarrow |-2x+8| \geq 4$$

$$\text{故 } (a, b) = (-2, 4)$$

3.【答】 : $4, \frac{-8}{3}$

【解】 : ① $x \geq \frac{3}{2} \Rightarrow x+1+2x-3=10, x=4$

② $-1 \leq x < \frac{3}{2} \Rightarrow x+1+3-2x=10 \Rightarrow x=-6 \text{ (不合)}$

③ $x < -1 \Rightarrow -x-1+3-2x=10 \Rightarrow x = \frac{-8}{3} \quad \therefore x = 4, \frac{-8}{3}$

4. $x \in R$, 解 $2 < |-2x+3| \leq 9$ 。_____



5. $x \in R$, 解 $|x^2 - 4| = 3x$ 。_____



6. 解 $|2x-6| \geq |x-6|$, 答: _____。



4.【答】： $\frac{5}{2} < x \leq 6$ 或 $-3 \leq x < \frac{1}{2}$

【解】： $2 < 2x-3 \leq 9$ 或 $-9 \leq 2x-3 < -2 \quad \therefore \frac{5}{2} < x \leq 6$ 或 $-3 \leq x < \frac{1}{2}$

5.【答】：1, 4

【解】：(1) 若 $x^2 - 4 \geq 0 \Rightarrow x^2 - 4 = 3x$
 $\Rightarrow x^2 - 3x - 4 = 0 \Rightarrow x = 4$ 或 -1 (-1 不合)
 (2) 若 $x^2 - 4 < 0 \Rightarrow -x^2 + 4 = 3x$
 $\Rightarrow x^2 + 3x - 4 = 0 \Rightarrow x = -4$ 或 1 (-4 不合)
 $\therefore x = 4$ 或 1

6.【答】： $x \geq 4$ 或 $x \leq 0$

【解】：(1) $\begin{cases} x \geq 6 \\ 2x-6 \geq x-6 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x \geq 6 \\ x \geq 0 \end{cases} \Rightarrow x \geq 6$
 (2) $\begin{cases} 3 \leq x < 6 \\ 2x-6 \geq -x+6 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 3 \leq x < 6 \\ x \geq 4 \end{cases} \Rightarrow 4 \leq x < 6$
 (3) $\begin{cases} x < 3 \\ -2x+6 \geq -x+6 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x < 3 \\ x \leq 0 \end{cases} \Rightarrow x \leq 0$

$\therefore$ 由 (1)(2)(3) 知 $x \geq 4$ 或 $x \leq 0$

【另解】

$\therefore$ 不等式左右兩邊皆為正數或 0

$\therefore$ 左右兩邊同時平方

$(2x-6)^2 \geq (x-6)^2 \Rightarrow (2x-6)^2 - (x-6)^2 \geq 0$
 $\Rightarrow (3x-12) \cdot x \geq 0 \Rightarrow x \geq 4$ 或 $x \leq 0$

7. 解不等式 $|x+2|+2|x-4|\leq 15$ ，可得 x 的範圍為_____。



8. 已知小丸子、小玉、花輪三人住在同一直線街道上。將他們的家標示在座標上，小丸子家標示為 $A(-1)$ ，小玉家標示為 $B(3)$ ，花輪家標示為 $C(x)$ ，若不確定花輪家在哪，只知花輪家到小丸子家的距離與花輪家到小玉家的距離和為 6，試求以下問題：

- (1) 請將上述句子轉換成 x 的方程式。
- (2) 請解出上述之方程式。

7.【答】： $-3 \leq x \leq 7$

【解】： $1^\circ x \geq 4 \Rightarrow 3x - 6 \leq 15 \Rightarrow x \leq 7$ 故 $4 \leq x \leq 7$

$2^\circ -2 \leq x < 4 \Rightarrow x + 2 - 2x + 8 \leq 15 \Rightarrow x \geq -5$ 故 $-2 \leq x < 4$

$3^\circ x < -2 \Rightarrow -x - 2 - 2x + 8 \leq 15 \Rightarrow 3x \geq -9$ 故 $-3 \leq x < -2$

由以上 $\Rightarrow -3 \leq x \leq 7$

8.【答】： $(1) |x+1| + |x-3| = 6$ (2) $x = -2$ 或 4

【解】： $(1) |x - (-1)| + |x - 3| = 6$

$\Rightarrow |x+1| + |x-3| = 6$

$(2) 1^\circ$ 當 $x \geq 3 \Rightarrow 2x - 2 = 6 \Rightarrow x = 4$

2° 當 $-1 \leq x < 3 \Rightarrow 4 = 6 \Rightarrow$ 無解

3° 當 $x < -1 \Rightarrow -x - 1 + 3 - x = 6 \Rightarrow x = -2$

綜合 $1^\circ 2^\circ 3^\circ \Rightarrow x = 4$ or -2

★能力進階★

1. 試求滿足不等式 $\sqrt{4x^2 - 12x + 9} + \sqrt{x^2 + 4x + 4} \leq \sqrt{x^2 - 10x + 25}$ 之實數 x 的範圍為 _____。



2. 已知 a, m 為實數且不等式 $|ax + 3| \leq 1$ 的解為 $m \leq x \leq 2$ ，求 $(a, m) =$ _____。



3. 滿足不等式 $2|x - 2| - |x + 1| \leq 5$ 的整數 x ，共有 _____ 個。



1.【答】： $-2 \leq x \leq \frac{3}{2}$

【解】： $\sqrt{4x^2 - 12x + 9} + \sqrt{x^2 + 4x + 4} \leq \sqrt{x^2 - 10x + 25}$

$$\Rightarrow |2x-3| + |x+2| \leq |x-5|$$

$$\Rightarrow |2x-3| + |-x-2| \leq |x-5| \dots\dots\dots \textcircled{1}$$

$$\text{又由絕對值不等式可得：}|2x-3| + |-x-2| \geq |x-5| \dots\dots\dots \textcircled{2}$$

由①②可得 $|2x-3| + |-x-2| = |x-5|$ 為絕對值不等式等號成立時：

$$(2x-3)(-x-2) \geq 0 \Rightarrow (2x-3)(x+2) \leq 0 \Rightarrow -2 \leq x \leq \frac{3}{2}$$

2.【答】： $(-2, 1)$

【解】： $|ax+3| \leq 1 \Rightarrow -1 \leq ax+3 \leq 1 \Rightarrow -4 \leq ax \leq -2$

由於不知道 a 的正負，故討論解不等式：

Case 1: 若 $a > 0 \Rightarrow \frac{-4}{a} \leq x \leq \frac{-2}{a} \Rightarrow$ 與題給之解比較得 $\frac{-2}{a} = 2$
 $\Rightarrow a = -1$ (不合)

Case 2: 若 $a < 0 \Rightarrow \frac{-2}{a} \leq x \leq \frac{-4}{a} \Rightarrow$ 與題給之解比較得 $\frac{-4}{a} = 2 \Rightarrow a = -2$
 代入回不等式， $1 \leq x \leq 2 \Rightarrow m = 1$

綜合 Case1.2. 可得 $(a, m) = (-2, 1)$

3.【答】:11

【解】:1° $\begin{cases} x \geq 2 \\ 2x-4-x-1 \leq 5 \end{cases} \Rightarrow 2 \leq x \leq 10 \Rightarrow x = 2, 3, 4, \dots, 10$ 共 9 個

2° $\begin{cases} -1 \leq x < 2 \\ 4-2x-x-1 \leq 5 \end{cases} \Rightarrow -\frac{2}{3} \leq x < 2 \Rightarrow x = 0, 1$ 共 2 個

3° $\begin{cases} x < -1 \\ 4-2x+x+1 \leq 5 \end{cases} \Rightarrow x \geq 0$ (無解)

$\therefore$ 共 11 個

主題 6 折線函數圖形

◎基礎精選◎

1. 畫出函數 $f(x) = |x+1| + |x-2|$ 的圖形，並求其最小值。



2. 求 $f(x) = 2|x-2| + |x+3|$ 的最小值。



1.【答】 :3

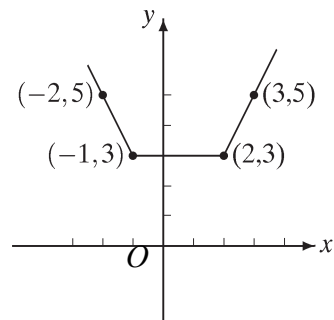
【解】 : $f(-2) = 1 + 4 = 5$

$$f(-1) = 0 + 3 = 3$$

$$f(2) = 3 + 0 = 3$$

$$f(3) = 4 + 1 = 5$$

$$\therefore \text{最小值} = 3$$



2.【答】 :5

【解】 : $f(x) = |x - 2| + |x - 2| + |x + 3|$

根據中位數法則得知最小值為 $f(2) = 5$

★能力進階★

1. k 為實數且方程式 $|x-7|+|x-11|=k$ 恰有二相異實數解，
則 k 之範圍為何？



2. 試問哪些選項中的方程式有解？

(1) $|x+2|-|x-1|=-3$

(2) $|x+2|-|x-1|=4$

(3) $|x+2|+|x-1|=2$

(4) $|x+2|+|x-1|=3$

(5) $|x+2|+|x-1|=4$

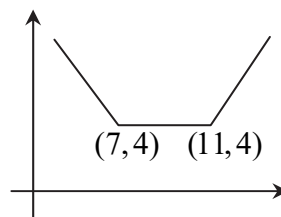
1.【答】： $k > 4$

【解】：考慮折線函數 $y = |x - 7| + |x - 11|$ (奇尖偶平)

$$\begin{cases} y = |x - 7| + |x - 11| \\ y = k \end{cases}$$

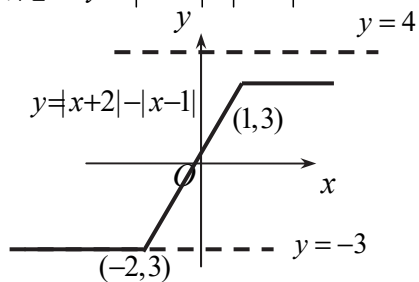
又原式之實數解個數

兩圖之交點個數為 2 個時 $\Rightarrow k > 4$



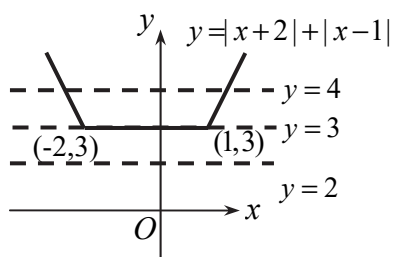
2.【答】：(1)(4)(5)

【解】： $y = |x + 2| - |x - 1|$



可知(1) 正確(2) 錯誤

$$y = |x + 2| + |x - 1|$$



可知(3) 錯誤(4)(5) 正確

主題 7 算幾不等式 $A \geq G$

◎基礎精選◎

1. 觀念是非題：

() 若 a, b 均為大於 0 的實數，則 $\frac{a-2}{b} + \frac{b}{a-2}$ 的最小值為 2。



2. 若 a, b 均大於 0，試求 $(a+4b)(\frac{9}{a} + \frac{1}{b})$ 的最小值為 _____。



3. 現有一長為 $20m$ 的鐵絲，將此鐵絲折成一個矩形，試問此矩形面積的最大值與此時的長與寬？



1.【答】：×

【解】：反例：取 $a=1, b=1$ 則 $\frac{1-2}{1} + \frac{1}{1-2} = -2 < 2$

2.【答】：25

【解】： $(a+4b)(\frac{9}{a} + \frac{1}{b}) = 13 + \frac{a}{b} + \frac{36b}{a} \geq 13 + 2 \cdot \sqrt{\frac{a}{b} \times \frac{36b}{a}} = 25$

3.【答】：面積 $25m^2$ ，長 $5m$ ，寬 $5m$

【解】：設長 x ，寬 $y \Rightarrow 2(x+y) = 20 \Rightarrow x+y=10$ ($x>0, y>0$)

利用算幾不等式 $\frac{x+y}{2} \geq \sqrt{xy} \Rightarrow xy \leq 25$

$\Rightarrow xy$ 最大值 = 25

等號成立於 $x=y=5$

4. 兩正數 a, b 滿足 $a^2 + 4b^2 = 8$ ，則 ab 之最大值為 _____。



5. 若函數 $f(x) = \frac{x^2 + 6x + 8}{x}$, $x > 0$ ，在 $x = a$ 時產生最小值 b ，求數對 $(a, b) =$ _____。



6. 阿花要用鐵絲網在河岸邊圍出一塊的長方形花圃(靠河的一邊不需使用鐵絲網，以 Γ 字型方式圍出長方形)，若花圃面積為 512 平方公尺，則至少要 _____ 公尺的鐵絲網。



4.【答】:2

【解】:由算幾不等式可得

$$\frac{a^2 + 4b^2}{2} \geq \sqrt{a^2 \cdot 4b^2} \Rightarrow 4 \geq 2ab \Rightarrow ab \leq 2$$

$\therefore$ 最大值為 2

5.【答】 : $(2\sqrt{2}, 4\sqrt{2} + 6)$

$$\text{【解】 : } f(x) = \frac{x^2 + 6x + 8}{x} = x + \frac{8}{x} + 6 \geq 2\sqrt{x \times \frac{8}{x}} + 6 = 4\sqrt{2} + 6$$

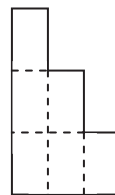
當極值發生時, $x = \frac{8}{x} \Rightarrow x = 2\sqrt{2}$ (取正)

6.【答】 : 64

【解】 : 設長 a , 寬 $b \Rightarrow ab = 512$

所求為 $a + 2b \geq 2\sqrt{2ab} \Rightarrow a + 2b \geq 64$

7. 小芬想用鐵絲圍出如圖的一塊鋸齒形狀的區域，
且此區域若按照虛線可分為面積相等的六塊長方形，
但小芬只有 60 公分的鐵絲可用，請問可以圍出最大的
面積是_____平方公分。



8. 請同學仔細閱讀後並回答下述問題：

某日，老師出了一個證明題，題目如下：

已知 $a, b, c \in R$ ，試證明 $a^2 + b^2 + c^2 \geq ab + bc + ca$ 。

收卷之後，老師發現某同學的作答方式如下：

$$\text{根據算幾不等式：}\frac{a^2 + b^2}{2} \geq \sqrt{a^2 b^2} = ab \Rightarrow a^2 + b^2 \geq 2ab$$

$$\text{故可得：} a^2 + b^2 \geq 2ab, \text{同理可得：} b^2 + c^2 \geq 2bc, c^2 + a^2 \geq 2ca$$

$$\text{將上述三式相加可得：} 2a^2 + 2b^2 + 2c^2 \geq 2ab + 2bc + 2ca$$

$$\Rightarrow a^2 + b^2 + c^2 \geq ab + bc + ca \text{ 故得證}$$

- (1) 此證明不正確，試說出哪裡有錯？
(2) 此不等式該如何證明？(可修正以上證法或利用自己的方法證明)



7.【答】：150

【解】：設長方形的寬為 x ，長為 $y \Rightarrow 6x + 6y = 60$

由算幾不等式： $\frac{6x+6y}{2} \geq \sqrt{6x \times 6y} \Rightarrow \sqrt{xy} \leq 5 \Rightarrow xy \leq 25$

所求為 $6xy \leq 150$ ，故最大面積為 150

8.【答】：如下

【解】：(1) $\frac{a^2+b^2}{2} \geq \sqrt{a^2b^2} = |ab|$ (原式未加絕對值)

(2) 修改：根據算幾不等式：

$$\frac{a^2+b^2}{2} \geq \sqrt{a^2b^2} = |ab| \geq ab \Rightarrow a^2+b^2 \geq 2ab \text{ (等號依然成立)}$$

故可得： $a^2+b^2 \geq 2ab$ ，同理可得： $b^2+c^2 \geq 2bc$ ， $c^2+a^2 \geq 2ca$

將上述三式相加可得： $2a^2+2b^2+2c^2 \geq 2ab+2bc+2ca$

$\Rightarrow a^2+b^2+c^2 \geq ab+bc+ca$ 故得證

另解： $a^2+b^2+c^2-ab-bc-ca = \frac{1}{2}(2a^2+2b^2+2c^2-2ab-2bc-2ca)$

$$= \frac{1}{2}[(a^2-2ab+b^2)+(b^2-2bc+c^2)+(c^2-2ca+a^2)]$$

$$= \frac{1}{2}[(a-b)^2+(b-c)^2+(c-a)^2] \geq 0$$

$$\Rightarrow a^2+b^2+c^2 \geq ab+bc+ca$$

★能力進階★

1. 若 x 為非零實數，且 $k = x + \frac{1}{x}$ ，試求 k 的範圍。



2. 設 $ab > 0$ ， $p = \frac{a+b}{2}$ ， $q = \sqrt{ab}$ ， $r = \frac{2ab}{a+b}$ ， $s = \frac{ab}{a+b}$ ，則下列敘述

何者為真？

- (A) 若 a, b 同為正數，則 $p \geq r$ 恆成立
- (B) 若 a, b 同為正數時， $p \geq q$ 恆成立
- (C) $q \geq r$ 恆成立
- (D) 當 a, b 同為負數時， $p = s$ 可能成立
- (E) 當 a, b 同為負數時，四數之大小關係為 $q > s > p > r$



1.【答】： $k \geq 2$ 或 $k \leq -2$

【解】：1° 若 $x > 0$ ，由算幾不等式 $\Rightarrow \frac{x + \frac{1}{x}}{2} \geq \sqrt{x \times \frac{1}{x}} \Rightarrow x + \frac{1}{x} \geq 2$

2° 若 $x < 0$ ，令 $t = -x > 0$

由算幾不等式 $t + \frac{1}{t} \geq 2 \Rightarrow -x + \frac{1}{-x} \geq 2 \Rightarrow x + \frac{1}{x} \leq -2$

$\therefore$ 由 1°, 2° 討論可得 $k \geq 2$ 或 $k \leq -2$

2.【答】：(A)(B)(C)

【解】：(A) $p - r = \frac{a+b}{2} - \frac{2ab}{a+b} = \frac{(a+b)^2 - 4ab}{2(a+b)} = \frac{(a-b)^2}{2(a+b)} \geq 0 \dots (\circ)$

(B) 當 $a, b \in R^+$ ，算幾不等式 $\frac{a+b}{2} \geq \sqrt{ab}$ 恆成立 $\dots (\circ)$

(C) ① 當 $a, b > 0$ ， $\sqrt{ab} - \frac{2ab}{a+b} = \frac{\sqrt{ab}(a+b) - 2ab}{a+b} = \frac{\sqrt{ab}(a+b-2\sqrt{ab})}{a+b}$
 $= \frac{\sqrt{ab}(\sqrt{a}-\sqrt{b})^2}{a+b} \geq 0$ 故 $\sqrt{ab} \geq \frac{2ab}{a+b}$

② 當 $a, b < 0$ ， $\sqrt{ab} \geq \frac{2ab}{a+b}$ 成立 ($\because a+b < 0$) $\dots (\circ)$

(D) 假設 $p = s \Rightarrow \frac{a+b}{2} = \frac{ab}{a+b} \Rightarrow (a+b)^2 = 2ab \Rightarrow a^2 + b^2 = 0$

$\because a, b < 0 \therefore$ 不成立 $\dots (\times)$

(E) $q > 0; p, r, s < 0$

① $q > s$ 成立

② $s - p = \frac{ab}{a+b} - \frac{a+b}{2} = \frac{2ab - (a+b)^2}{2(a+b)} = \frac{-a^2 - b^2}{2(a+b)} > 0 \Rightarrow s > p$

③ $p - r = \frac{a+b}{2} - \frac{2ab}{a+b} = \frac{(a+b)^2 - 4ab}{2(a+b)} = \frac{(a-b)^2}{2(a+b)} < 0 \Rightarrow p < r$

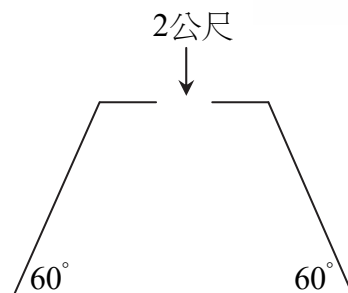
④ $s = \frac{ab}{a+b} > \frac{2ab}{a+b} = r \therefore q > s > r > p \dots (\times)$

選 (A)(B)(C)

3. 設 x 為正實數，則當 $x = \alpha$ 時， $x^2 - x + \frac{16}{x^2 - x + 2}$ 有最小值 m ，
則數對 $(\alpha, m) = \underline{\hspace{2cm}}$ 。



4. 一農夫想用 70 公尺長之竹籬圍成一底角為 60° 的等腰梯形菜園，
並在其中上底正中央留著寬 2 公尺的出入口，如圖所示。問此農
夫所能圍成的最大面積為 平方公尺。



3.【答】：(2,6)

【解】：原求值式： $x^2 - x + \frac{16}{x^2 - x + 2} = x^2 - x + 2 + \frac{16}{x^2 - x + 2} - 2$

$$\left(\begin{array}{l} \because x^2 - x + 2 = \left(x - \frac{1}{2}\right)^2 + \frac{7}{4} \geq 0 \\ \therefore \text{符合算幾不等式適用條件} \end{array} \right)$$

$$\geq 2\sqrt{(x^2 - x + 2) \times \frac{16}{x^2 - x + 2}} - 2 = 6$$

等號成立時，該求值式有最小值 6

$$\text{此時 } x^2 - x + 2 = \frac{16}{x^2 - x + 2} \Rightarrow (x^2 - x + 2)^2 = 16 \Rightarrow x^2 - x + 2 = 4$$

$$\Rightarrow x = 2 \text{ 或 } -1 (\text{不合})$$

$$\text{故 } (\alpha, m) = (2, 6)$$

4.【答】： $162\sqrt{3}$

【解】：1° 如圖所示，設 $\overline{AB} = \overline{EF} = 2x$ ， $\overline{BC} = \overline{DE} = x$ ， $\overline{AF} = \overline{CD} = y$

$$\text{由竹籬總長 70 公尺得 } 2x + 2x + x + x + 2y - 2 = 70 \Rightarrow 3x + y = 36$$

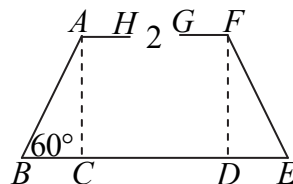
$$2^\circ \text{ 梯形面積為 } \frac{(y + 2x + y) \cdot \sqrt{3}x}{2} = \sqrt{3}x(x + y)$$

3° 根據算幾不等式

$$\frac{2x + (x + y)}{2} \geq \sqrt{2x(x + y)} \Rightarrow x(x + y) \leq 162$$

$$\Rightarrow \sqrt{3}x(x + y) \leq 162\sqrt{3}$$

$\therefore$ 面積最大為 $162\sqrt{3}$



主題 8 實數範圍與區間

⊙基礎精選⊙

1. 設 x, y 皆為實數，滿足 $|x-1| \leq 2, |2y-7| \leq 5$ ，則下列哪些敘述是正確的？

(A) $-1 \leq 3x+2 \leq 11$

(B) $-1 \leq xy \leq 18$

(C) $1 \leq x^2 \leq 9$

(D) $-5 \leq 3xy-3x+2y-2 \leq 55$



2. 已知 $-2 \leq x \leq 5, 1 \leq y < 2$ ，則可推得 $x^2 + y^{-2}$ 的範圍為 _____。



1.【答】:(A) (D)

$$\text{【解】:} \because |x-1| \leq 2, |2y-7| \leq 5$$

$$\therefore -1 \leq x \leq 3, 1 \leq y \leq 6$$

$$(A) -1 \leq 3x+2 \leq 11$$

$$(B) -6 \leq xy \leq 18$$

$$(C) 0 \leq x^2 \leq 9$$

$$(D) 3xy - 3x + 2y - 2 = (3x+2)(y-1)$$

$$\text{又 } -1 \leq 3x+2 \leq 11, 0 \leq y-1 \leq 5$$

$$\text{故 } -5 \leq (3x+2)(y-1) \leq 55$$

$$2. \text{【答】: } \frac{1}{4} < x^2 + y^{-2} \leq 26$$

$$\text{【解】: } \begin{cases} -2 \leq x \leq 5 \\ \frac{1}{2} < y^{-1} \leq 1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 0 \leq x^2 \leq 25 \\ \frac{1}{4} < y^{-2} \leq 1 \end{cases} \Rightarrow \frac{1}{4} < x^2 + y^{-2} \leq 26$$

★能力進階★

1. 線性函數 $f(x) = ax + b$ ，其中 a 與 b 均為整數，且滿足 $6 \leq f(3) \leq 10, 12 \leq f(8) \leq 20$ ，若 $f(9)$ 的最大值為 M ，最小值為 m ，求數對 $(M, m) = \underline{\hspace{2cm}}$ 。



1.【答】: $(\frac{114}{5}, \frac{62}{5})$

【解】: $\begin{cases} 6 \leq 3a+b \leq 10 \\ 12 \leq 8a+b \leq 20 \end{cases}$ 而 $f(9) = 9a+b$

$\Rightarrow$ 希望用 $3a+b, 8a+b$ 組合出 $9a+b$

$$k(3a+b)+t(8a+b)=9a+b \Rightarrow \begin{cases} 3k+8t=9 \\ k+t=1 \end{cases} \Rightarrow k=-\frac{1}{5}, t=\frac{6}{5}$$

$$\begin{cases} 6 \leq 3a+b \leq 10 \\ 12 \leq 8a+b \leq 20 \end{cases} \times \begin{pmatrix} -\frac{1}{5} \\ \frac{6}{5} \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{cases} -2 \leq -\frac{3}{5}a - \frac{1}{5}b \leq -\frac{6}{5} \\ \frac{72}{5} \leq \frac{48}{5}a + \frac{6}{5}b \leq 24 \end{cases}$$

$$\text{二式相加} \Rightarrow \frac{62}{5} \leq 9a+b \leq \frac{114}{5} \Rightarrow \text{則}(M, m) = (\frac{114}{5}, \frac{62}{5})$$

★ 式的運算

主題 9 乘法公式

⊙基礎精選⊙

[數位延伸]

1.
$$\frac{(2010^6 + 2010^5 + 2010^4 + 2010^3 + 2010^2 + 2011) \times 2009 + 1}{2010^6}$$

= _____。



2. $x = \frac{\sqrt{3} - \sqrt{2}}{\sqrt{3} + \sqrt{2}}$ ，求 $x^2 + \frac{1}{x^2} =$ _____。



3. 設 $x = \sqrt{3} + \sqrt{2}$ ， $y = \sqrt{3} - \sqrt{2}$ ，求 $x^3 + y^3 =$ _____。



1.【答】：2010

【解】：令 $x = 2010$

$$\begin{aligned}\Rightarrow \text{原式} &= \frac{(x^6 + x^5 + x^4 + x^3 + x^2 + x + 1)(x - 1) + 1}{x^6} \\ &= \frac{(x^7 - 1) + 1}{x^6} = x = 2010\end{aligned}$$

2.【答】：98

$$\begin{aligned}\text{【解】：} x^2 + \frac{1}{x^2} &= \left(x + \frac{1}{x}\right)^2 - 2 = \left(\frac{\sqrt{3} - \sqrt{2}}{\sqrt{3} + \sqrt{2}} + \frac{\sqrt{3} + \sqrt{2}}{\sqrt{3} - \sqrt{2}}\right)^2 - 2 \\ &= ((\sqrt{3} - \sqrt{2})^2 + (\sqrt{3} + \sqrt{2})^2)^2 - 2 = 10^2 - 2 = 98\end{aligned}$$

3.【答】： $18\sqrt{3}$

$$\begin{aligned}\text{【解】：} x^3 + y^3 &= (x + y)^3 - 3xy(x + y) \\ &= (2\sqrt{3})^3 - 3 \times 1 \times 2\sqrt{3} = 18\sqrt{3}\end{aligned}$$

4. 若 $x=1+\sqrt{2}+\sqrt{3}$ 、 $y=1+\sqrt{2}-\sqrt{3}$ ，則：

(1) $x-y=\alpha$ 、 $x\cdot y=\beta$ ，求數對 $(\alpha,\beta)=?$

(2) $x^3-y^3=?$



5. 已知 $x+\frac{1}{x}=4$ ，求 $x^3+\frac{1}{x^3}=_____$ 。



6. 試 $x>0$ 且 $5x^2-8x-\frac{8}{x}+\frac{5}{x^2}+6=0$ ，則 $x+\frac{1}{x}=?$

(A) 1 (B) 2 (C) 3 (D) 4 (E) 5



4.【答】：(1) $(2\sqrt{3}, 2\sqrt{2})$ (2) $24\sqrt{3} + 12\sqrt{6}$

【解】：(1) $x - y = 2\sqrt{3}$, $xy = (1 + \sqrt{2})^2 - (\sqrt{3})^2 = 2\sqrt{2}$

$$(2) x^3 - y^3 = (x - y)^3 + 3xy(x - y) = 24\sqrt{3} + 12\sqrt{6}$$

5.【答】：52

【解】： $x^3 + \frac{1}{x^3} = (x + \frac{1}{x})^3 - 3(x + \frac{1}{x}) = 64 - 12 = 52$

6.【答】：(B)

【解】： $5x^2 - 8x - \frac{8}{x} + \frac{5}{x^2} + 6 = 0$

$$\Rightarrow 5(x^2 + \frac{1}{x^2}) - 8(x + \frac{1}{x}) + 6 = 0$$

$$\Rightarrow 5\{(x + \frac{1}{x})^2 - 2 \cdot x \cdot \frac{1}{x}\} - 8(x + \frac{1}{x}) + 6 = 0$$

$$\Rightarrow 5(x + \frac{1}{x})^2 - 10 - 8(x + \frac{1}{x}) + 6 = 0$$

$$\Rightarrow 5(x + \frac{1}{x})^2 - 8(x + \frac{1}{x}) - 4 = 0$$

$$\Rightarrow \{5(x + \frac{1}{x}) + 2\} \{(x + \frac{1}{x}) - 2\} = 0 \Rightarrow x + \frac{1}{x} = 2 \text{ 或 } -\frac{2}{5} \text{ (不合)}$$

7. 已知 $a+b+c=0$ 且 $a^2+b^2+c^2=14$ ，試求 $ab+bc+ca$ 之值。

(A) -7 (B) 11 (C) 0 (D) 14

XWCBW



8. 設 $x^3=3$ ， $y^3=2$ ，求值： $(x^2-y^2)(x^2+xy+y^2)(x^2-xy+y^2)=$ _____。

SSZEE



9. 設 $x = \frac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{4}$ ， $y = \frac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{4}$ ，且 $x^3+y^3=k(x+y)$ ，則實數 $k =$ _____。

7.【答】：(A)

【解】：根據乘法公式： $(a+b+c)^2 = a^2 + b^2 + c^2 + 2(ab+bc+ca)$

$$\Rightarrow 0 = 14 + 2(ab+bc+ca)$$

$$\Rightarrow ab+bc+ca = -7$$

8.【答】：5

【解】： $(x^2 - y^2)(x^2 + xy + y^2)(x^2 - xy + y^2)$

$$= (x+y)(x-y)(x^2 + xy + y^2)(x^2 - xy + y^2)$$

$$= (x^3 + y^3)(x^3 - y^3)$$

$$= (3+2)(3-2) = 5$$

9.【答】： $\frac{3}{4}$

【解】： $x^3 + y^3 = (x+y)^3 - 3xy(x+y) = (x+y)[(x+y)^2 - 3xy]$

$$k = (x+y)^2 - 3xy = \left(\frac{\sqrt{6}}{2}\right)^2 - 3 \times \frac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{4} \times \frac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{4} = \frac{3}{2} - \frac{3}{4} = \frac{3}{4}$$

★能力進階★

1. 設 x 為實數且 $\frac{x}{x^2+x+1} = \frac{1}{5}$ ，則 $\frac{x^3}{x^6+x^3+1} = \underline{\hspace{2cm}}$ 。



2. 若 $0 < x < 1$ ，則方程式 $\sqrt{x^2 + \frac{1}{x^2}} - 2 + \sqrt{x^2 + \frac{1}{x^2}} + 2 = 3x + 1$
的解為 $x = \underline{\hspace{2cm}}$ 。



1.【答】： $\frac{1}{53}$

【解】： $1^\circ \frac{x}{x^2+x+1} = \frac{1}{5} \Rightarrow \frac{1}{x+1+\frac{1}{x}} = \frac{1}{5} \quad (x \neq 0) \Rightarrow x + \frac{1}{x} = 4$

$$\begin{aligned} 2^\circ \frac{x^3}{x^6+x^3+1} &= \frac{1}{x^3+1+\frac{1}{x^3}} = \frac{1}{(x+\frac{1}{x})^3 - 3 \cdot x \cdot \frac{1}{x} (x+\frac{1}{x}) + 1} \\ &= \frac{1}{4^3 - 3 \cdot 1 \cdot 4 + 1} = \frac{1}{53} \end{aligned}$$

2.【答】： $\frac{2}{3}$

【解】： $\sqrt{x^2 + \frac{1}{x^2}} - 2 + \sqrt{x^2 + \frac{1}{x^2}} + 2 = |x + \frac{1}{x}| + |x - \frac{1}{x}| = x + \frac{1}{x} + \frac{1}{x} - x = \frac{2}{x} \quad (0 < x < 1)$

$$\Rightarrow \frac{2}{x} = 3x + 1 \Rightarrow 3x^2 + x - 2 = 0 \Rightarrow (3x - 2)(x + 1) = 0 \Rightarrow x = \frac{2}{3}$$

主題 10 因式分解

◎基礎精選◎

1. 試因式分解下列各式 (1) $x^4 - 2x^2 + 1$

(2) $(xy+1)(x+1)(y+1) + xy$



2. 試因式分解下列各式 (1) $x^3 + x^2 + x + 1$

(2) $2ax^2 - 3x + 2ax - 3$



3. 因式分解 $a^4 - b^4 - 2a^3b + 2ab^3 = \underline{\hspace{2cm}}$ 。



1.【答】：(1) $(x+1)^2(x-1)^2$ (2) $(xy+1+x)(xy+1+y)$

【解】：(1) $x^4 - 2x^2 + 1 = (x^2 - 1)^2 = [(x+1)(x-1)]^2 = (x+1)^2(x-1)^2$

$$\begin{aligned} (2) (xy+1)(x+1)(y+1) + xy &= (xy+1)(xy+x+y+1) + xy \\ &= (xy+1)^2 + (x+y)(xy+1) + xy \\ &= (xy+1+x)(xy+1+y) \end{aligned}$$

2.【答】：(1) $(x+1)(x^2+1)$ (2) $(2ax-3)(x+1)$

【解】：(1) $x^3 + x^2 + x + 1 = x^2(x+1) + (x+1) = (x+1)(x^2+1)$

$$(2) 2ax^2 - 3x + 2ax - 3 = x(2ax-3) + (2ax-3) = (2ax-3)(x+1)$$

3.【答】： $(a+b)(a-b)^3$

【解】：
$$\begin{aligned} a^4 - b^4 - 2a^3b + 2ab^3 &= (a^2 - b^2)(a^2 + b^2) - 2ab(a^2 - b^2) \\ &= (a^2 - b^2)(a-b)^2 = (a+b)(a-b)^3 \end{aligned}$$

★能力進階★

1. 正整數 m 、 n 滿足 $\frac{1}{m} + \frac{4}{n} = \frac{1}{12}$ 。若 n 是奇數，
則數對 $(m, n) =$ _____。



[數位延伸]

2. 試將 $(x^2 - 3x + 2)^3 + (x^2 - 5x + 6)^3 - (2x^2 - 8x + 8)^3$
因式分解 = _____



1.【答】： $(588, 49), (204, 51), (76, 57)$

【解】： $\Rightarrow 12n + 48m = mn$

$$\Rightarrow (m-12)(n-48) = 576 = 2^6 \times 3^2, n-48 \text{ 為奇數 (因為 } n \text{ 為奇數)}$$

$$\Rightarrow (m-12, n-48) = (576, 1), (192, 3), (64, 9)$$

$$\therefore (m, n) = (588, 49), (204, 51), (76, 57)$$

2.【答】： $-6(x-1)(x-3)(x-2)^4$

【解】： $\because (x^2 - 3x + 2) + (x^2 - 5x + 6) + [-(2x^2 - 8x + 8)] = 0$

$$\therefore (x^2 - 3x + 2)^3 + (x^2 - 5x + 6)^3 - (2x^2 - 8x + 8)^3$$

$$= 3(x^2 - 3x + 2)(x^2 - 5x + 6)[-(2x^2 - 8x + 8)]$$

$$= -3(x-1)(x-2)(x-2)(x-3) \cdot 2(x-2)^2$$

$$= -6(x-1)(x-3)(x-2)^4$$

主題 11 平方根

◎基礎精選◎

1. 若 $1^3 = 1$, $1^3 + 2^3 = 9 = 3^2$, $1^3 + 2^3 + 3^3 = 36 = 6^2$, 則

(1) $1^3 + 2^3 + 3^3 + 4^3 + 5^3 + 6^3 = \square^2$, $\square = \underline{\hspace{2cm}}$ 。

(2) 化簡 $\sqrt{1^3 + 2^3 + 3^3 + 4^3 + 5^3 + 6^3 + 7^3 + 8^3} = \underline{\hspace{2cm}}$ 。



1.【答】：(1) 21 (2) 36

【解】：(1) 觀察規律得知

$$1^3 = 1^2, 1^3 + 2^3 = 3^2 = 3^2 = (1+2)^2, 1^3 + 2^3 + 3^3 = 6^2 = (1+2+3)^2$$

$$\Rightarrow \square = 1+2+3+4+5+6 = 21$$

$$(2) \sqrt{1^3 + 2^3 + 3^3 + 4^3 + 5^3 + 6^3 + 7^3 + 8^3}$$

$$= \sqrt{(1+2+3+\cdots+8)^2}$$

$$= \sqrt{36^2} = 36$$

★能力進階★

[數位延伸]

1. (1) 設 $x = \sqrt[3]{3+\sqrt{10}} + \sqrt[3]{3-\sqrt{10}}$ ，試求 $x^3 + 3x$ 之值為何？

(2) 設 $a、b$ 為正整數，其中 $1 < a < 10$ 且 $a - \sqrt{b} \neq 0$ 。

已知 $\sqrt[3]{a+\sqrt{b}} + \sqrt[3]{a-\sqrt{b}} = 2$ ，試求 $a、b$ 之值各為何？



2. 已知 $x = \sqrt[3]{5} - \frac{1}{\sqrt[3]{5}}$ ，則 $5x^3 + 15x + 1$ 之值 = _____。

1.【答】：(1) 6 (2) $a=7, b=50$

【解】：(1) 令 $a = \sqrt[3]{3+\sqrt{10}}, b = \sqrt[3]{3-\sqrt{10}} \Rightarrow ab = -1$

$$x^3 + 3x = (a+b)^3 + 3(a+b) = a^3 + b^3 = 3 + \sqrt{10} + 3 - \sqrt{10} = 6$$

(2) 令 $p = \sqrt[3]{a+\sqrt{b}}, q = \sqrt[3]{a-\sqrt{b}} \Rightarrow p+q=2, p^3+q^3=2a$

$$p^3+q^3 = (p+q)^3 - 3pq(p+q) \Rightarrow 2a = 8 - 6\sqrt[3]{a^2-b}$$

$$\Rightarrow \left(\frac{4-a}{3}\right)^3 = a^2 - b \Rightarrow \frac{4-a}{3} \in \mathbb{Z} \Rightarrow a=4 \text{ 或 } 7$$

$$1^\circ a=4 \Rightarrow b=16 \text{ 與 } a-\sqrt{b} \neq 0 \text{ 矛盾}$$

$$2^\circ a=7 \Rightarrow b=50$$

2.【答】：25

【解】：1° 由 $x = \sqrt[3]{5} - \frac{1}{\sqrt[3]{5}}$

$$\Rightarrow x^3 = \left(\sqrt[3]{5} - \frac{1}{\sqrt[3]{5}}\right)^3 \quad [\text{根據乘法公式 } (a-b)^3 = a^3 - b^3 - 3ab(a-b)]$$

$$\Rightarrow x^3 = (\sqrt[3]{5})^3 - \left(\frac{1}{\sqrt[3]{5}}\right)^3 - 3 \cdot \sqrt[3]{5} \cdot \left(\frac{1}{\sqrt[3]{5}}\right) \left(\sqrt[3]{5} - \frac{1}{\sqrt[3]{5}}\right)$$

$$\Rightarrow x^3 = 5 - \frac{1}{5} - 3x \Rightarrow x^3 + 3x = \frac{24}{5}$$

$$2^\circ \text{ 所求} = 5(x^3 + 3x) + 1 = 5 \cdot \frac{24}{5} + 1 = 25$$

∞ 主題 12 殊方根的處理 ∞

*1. 滿足 $\sqrt{90x}$ 為正整數且 $1 \leq x \leq 100$ 的正整數 x 之值有_____個。

*2. 化簡 $\frac{1}{2-\sqrt{3}} - \frac{5\sqrt{2}}{1+\sqrt{6}} + \frac{1}{\sqrt{3}+\sqrt{2}} =$ _____。

3. $(\frac{1}{\sqrt{2}+\sqrt{3}} + \frac{2}{\sqrt{5}+\sqrt{3}} + \frac{3}{2\sqrt{2}+\sqrt{5}})^2$ 經化簡後可得結果為_____。

*4. 若 $x = \sqrt{7} + \sqrt{6}$, $y = \sqrt{6} - \sqrt{7}$, 則 $2x^2 + 3xy + 2y^2 =$ _____。

*5. 若 $\frac{1}{\sqrt{4-\sqrt{14}}} = \frac{\sqrt{b+c\sqrt{14}}}{a}$ ，求 $a+b+c$ 之值，其中 a, b, c 為最小正整數解。

6. 實數 a 滿足 $|1996-a| + \sqrt{a-1997} = a$ ，則 $a-1996^2$ 之值為_____。

7. 化簡 $\frac{12}{\sqrt{2}+\sqrt{3}+\sqrt{5}} = \underline{\hspace{2cm}}$ 。(分母不可含方根)

*8. 試化簡 $\frac{1}{1+\sqrt{3}} + \frac{1}{\sqrt{3}+\sqrt{5}} + \frac{1}{\sqrt{5}+\sqrt{7}} + \cdots + \frac{1}{\sqrt{23}+\sqrt{25}} = \underline{\hspace{2cm}}$ 。

9. $a = \sqrt{5} + \sqrt{7} + \sqrt{11}$, $b = \sqrt{2} + \sqrt{7} + \sqrt{14}$, $c = \sqrt{2} + \sqrt{10} + \sqrt{11}$, 則 a, b, c 的大小關係為何?
(A) $a > b > c$ (B) $a > c > b$ (C) $b > c > a$ (D) $c > b > a$ (E) $c > a > b$ 。

*10. 請選出選項當中最大者：

- (1) $10 - 3\sqrt{11}$ (2) $51 - 10\sqrt{26}$ (3) $3\sqrt{11} - 10$ (4) $10\sqrt{26} - 51$ (5) $\sqrt{401} - 20$ 。

11. 已知 $x = \frac{\sqrt{3}}{2}$, 則 $\frac{1-x}{1-\sqrt{1-x}} + \frac{1+x}{1+\sqrt{1+x}}$ 之值為_____。

12. 化簡 $\sqrt{(5+2\sqrt{6})^3} + \sqrt{(5-2\sqrt{6})^3}$ 可得下列選項中的哪個值？請選出來。

- (1) $13\sqrt{2}$ (2) $17\sqrt{3}$ (3) $17\sqrt{5}$ (4) $18\sqrt{3}$ (5) $18\sqrt{2}$ 。

*13. 比較下列各數中，何者最小？

(1) $\sqrt{400} + \sqrt{400}$ (2) $\sqrt{401} + \sqrt{399}$ (3) $\sqrt{402} + \sqrt{398}$ (4) $\sqrt{403} + \sqrt{397}$ 。

*14. 已知 $x = \frac{\sqrt{5} + \sqrt{3}}{\sqrt{5} - \sqrt{3}}$ ，則 $x^3 - \frac{1}{x^3} =$ _____ 。

15. [103 學測]

關於下列不等式，請選出正確的選項。

(1) $\sqrt{13} > 3.5$ (2) $\sqrt{13} < 3.6$ (3) $\sqrt{13} - \sqrt{3} > \sqrt{10}$
(4) $\sqrt{13} + \sqrt{3} > \sqrt{16}$ (5) $\frac{1}{\sqrt{13} - \sqrt{3}} > 0.6$ 。

16. 試將 $\frac{6}{\sqrt[3]{4}-1}$ 之分母有理化。

17. 試證明 $\frac{1}{\sqrt{n}+\sqrt{n+1}} < \frac{1}{4}\left(\frac{1}{\sqrt{n}} + \frac{1}{\sqrt{n+1}}\right)$ ，其中 n 為正整數。

*18. For how many real values of x is $\sqrt{101-\sqrt{x}}$ an integer?

*19. 若 $\sqrt{17+3\sqrt{32}}$ 的整數部分為 a ，小數部分為 b ，則 $\frac{4}{b} + \frac{1}{a+b} =$ _____。

20. 若 $\sqrt{11-\sqrt{72}}$ 的整數部分為 a ，小數部分為 b ，則 $\frac{1}{a+b} + \frac{1}{5-b}$ 之值為_____。

*21. 設 $a = \sqrt{8+\sqrt{63}}$ 且 m, n 為正整數，試回答下列問題：

(1) 若 $m < a < m+1$ ，則 $m =$ _____。

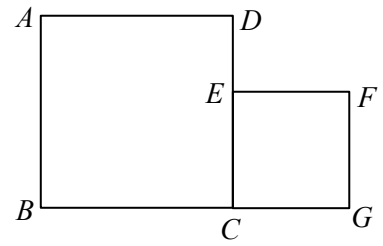
(2) 若 $n < a + \frac{1}{a} < n+1$ ，則 $n =$ _____。

22. [102 學測]

設 k 為一整數。已知 $\frac{k}{3} < \sqrt{31} < \frac{k+1}{3}$ ，則 $k =$ _____。

23. 設 n 為自然數，若 $\frac{n}{2} < \sqrt{8+5\sqrt{7}} < \frac{n+1}{2}$ ，則 n 為_____。

24. 如右圖， $ABCD$ 與 $CEFG$ 是兩個併排的正方形，其中 $ABCD$ 的面積為 $4+\sqrt{12}$ ， $CEFG$ 的面積是 $19-8\sqrt{3}$ ，若三角形 ABG 的面積為 $a+b\sqrt{3}$ 且 a, b 皆為有理數，則 $a+b=$ _____。



25. 化簡 $\sqrt{2+\sqrt{3}} \cdot \sqrt{2+\sqrt{2+\sqrt{3}}} \cdot \sqrt{2+\sqrt{2+\sqrt{2+\sqrt{3}}}} \cdot \sqrt{2-\sqrt{2+\sqrt{2+\sqrt{3}}}}$ 。

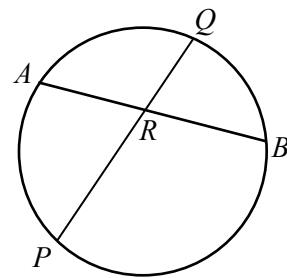
26. 已知 $\sqrt{8+\sqrt{40+8\sqrt{5}}} + \sqrt{8-\sqrt{40+8\sqrt{5}}} = \sqrt{\alpha} + \sqrt{\beta}$ 且 α, β 皆為正整數 ($\alpha > \beta$)，求 α, β 。

- *27. 已知 n 為正整數，且 $\frac{10n+4}{n+1} < \sqrt{97} < \frac{10n+14}{n+2}$ ，則 $n=$ _____。

28. 已知 n 為正整數且 $\sqrt{n} < \sqrt{4+\sqrt{7}} + \sqrt{4-\sqrt{7}} < \sqrt{n+2}$ ，則 $n =$ _____。

29. 若 x 為正實數，試解 x 的方程式 $\sqrt{x+3-4\sqrt{x-1}} = 1$ 。

30. 有一圓如右圖，圓上有兩弦 $\overline{AB}$, $\overline{PQ}$ 交於 R 點，已知 $\overline{AR} = \overline{BR}$, $\overline{PR} = 1$, $\overline{PQ} = 4 - \sqrt{5}$ ，若 $\overline{AB}$ 長為 $\sqrt{a} - \sqrt{2}$ 且 a 為正整數，則 a 值為_____。



簡 答

- | | | | | |
|---|--|-----------------|--------------------|------------|
| 1. 3 | 2. 2 | 3. 2 | 4. 49 | 5. 12 |
| 6. 1997 | 7. $2\sqrt{3} + 3\sqrt{2} - \sqrt{30}$ | 8. 2 | 9. (B) | 10. (1) |
| 11. 1 | 12. (4) | 13. (4) | 14. $126\sqrt{15}$ | 15. (1)(4) |
| 16. $2(2\sqrt[3]{2} + \sqrt[3]{4} + 1)$ | | 17. (1) 略 (2) 4 | 18. 11 | 19. 5 |
| 20. $\frac{6}{7}$ | 21. (1) 3 (2) 4 | 22. 16 | 23. 9 | 24. 5 |
| 25. 1 | 26. $\alpha = 10, \beta = 2$ | 27. 38 | 28. 13 | 29. 2 或 10 |
| 30. 10 | | | | |

主題 13 有理化分母

◎基礎精選◎

1. 試比較下列各數的大小關係：

(1) $a = \sqrt{6} + 2\sqrt{2}$, $b = 2\sqrt{7}$, $c = 3 + \sqrt{5}$,

大小關係為 _____ 。

(2) $a = \sqrt{17} - \sqrt{13}$, $b = 4 - 2\sqrt{3}$, $c = \sqrt{15} - \sqrt{11}$,

大小關係為 _____ 。



[數位延伸]

2. 將 $K = \frac{2}{\sqrt[3]{4} + \sqrt[3]{2} + 1}$ 的分母有理化後，得 K 值為 _____ 。



1.【答】：(1) $b > a > c$ (2) $c > b > a$

【解】：(1) $a^2 = 14 + 2\sqrt{48}, b^2 = 28 = 14 + 2\sqrt{49}, c^2 = 14 + 2\sqrt{45}$

$$\therefore b^2 > a^2 > c^2 \Rightarrow b > a > c$$

(2) $a \times (\sqrt{17} + \sqrt{13}) = 4, b \times (\sqrt{16} + \sqrt{12}) = 4, c \times (\sqrt{15} + \sqrt{11}) = 4$

$$\therefore \sqrt{17} + \sqrt{13} > \sqrt{16} + \sqrt{12} > \sqrt{15} + \sqrt{11} \therefore c > b > a$$

2.【答】： $2\sqrt[3]{2} - 2$

【解】： $K = \frac{2}{\sqrt[3]{4} + \sqrt[3]{2} + 1} \times \frac{\sqrt[3]{2} - 1}{\sqrt[3]{2} - 1} = \frac{2(\sqrt[3]{2} - 1)}{2 - 1} = 2\sqrt[3]{2} - 2$

3. 試求下列各數的倒數

(1) $\sqrt{2}-1$

(2) $\sqrt{2}+\sqrt{3}$

[數位延伸]

(3) $\sqrt[3]{4}-1$

UZGBN



4. 求值 $\frac{1}{\sqrt{1}+\sqrt{3}}+\frac{1}{\sqrt{3}+\sqrt{5}}+\frac{1}{\sqrt{5}+\sqrt{7}}+\cdots+\frac{1}{\sqrt{47}+\sqrt{49}}$

WCYPZ



3.【答】 : (1) $\sqrt{2}+1$ (2) $\sqrt{3}-\sqrt{2}$ (3) $\frac{2\sqrt[3]{2}+\sqrt[3]{4}+1}{3}$

【解】 : (1) $\frac{1}{\sqrt{2}-1} = \sqrt{2}+1$

(2) $\frac{1}{\sqrt{2}+\sqrt{3}} = \sqrt{3}-\sqrt{2}$

(3) $\frac{1}{\sqrt[3]{4}-1} = \frac{\sqrt[3]{16}+\sqrt[3]{4}+1}{(\sqrt[3]{4}-1)(\sqrt[3]{16}+\sqrt[3]{4}+1)} = \frac{2\sqrt[3]{2}+\sqrt[3]{4}+1}{3}$

4.【答】 : 3

【解】 :
$$\begin{aligned} & \frac{1}{\sqrt{1}+\sqrt{3}} + \frac{1}{\sqrt{3}+\sqrt{5}} + \frac{1}{\sqrt{5}+\sqrt{7}} + \cdots + \frac{1}{\sqrt{47}+\sqrt{49}} \\ &= \frac{\sqrt{3}-1}{2} + \frac{\sqrt{5}-\sqrt{3}}{2} + \frac{\sqrt{7}-\sqrt{5}}{2} + \cdots + \frac{\sqrt{49}-\sqrt{47}}{2} \\ &= \frac{-1+\sqrt{49}}{2} = 3 \end{aligned}$$

★能力進階★

1. 設 $F(x) = 1 + \frac{1}{\sqrt{2}} + \frac{1}{\sqrt{3}} + \frac{1}{\sqrt{4}} + \cdots + \frac{1}{\sqrt{100}} = a + b$, a 為整數,

b 為小數, 求 $a = \underline{\hspace{2cm}}$ 。

提示: $\sqrt{n+1} - \sqrt{n} = \frac{1}{\sqrt{n+1} + \sqrt{n}} < \frac{1}{\sqrt{n} + \sqrt{n}} = \frac{1}{2\sqrt{n}}$

同理 $\frac{1}{2\sqrt{n}} < \sqrt{n} - \sqrt{n-1}$, 所以 $\sqrt{n+1} - \sqrt{n} < \frac{1}{2\sqrt{n}} < \sqrt{n} - \sqrt{n-1}$



[數位延伸]

2. 試求 $11x^3 - 3x^2 - 3x - 1 = 0$ 的實根。



3. 化簡 $\sqrt{2+\sqrt{3}} \cdot \sqrt{2+\sqrt{2+\sqrt{3}}} \cdot \sqrt{2+\sqrt{2+\sqrt{2+\sqrt{3}}}} \cdot \sqrt{2-\sqrt{2+\sqrt{2+\sqrt{3}}}}$ 。



1.【答】 :18

$$\begin{aligned} \text{【解】 : } & \sqrt{3}-\sqrt{2} < \frac{1}{2\sqrt{2}} < \sqrt{2}-\sqrt{1} \\ & \vdots \\ & +) \sqrt{101}-\sqrt{100} < \frac{1}{2\sqrt{100}} < \sqrt{100}-\sqrt{99} \\ & \hline & \sqrt{101}-\sqrt{2} < \frac{1}{2}(F(x)-1) < \sqrt{100}-1 \\ & \Rightarrow 2(\sqrt{101}-\sqrt{2})+1 \doteq 18.2 \\ & \Rightarrow F(x)=18. \blacksquare \Rightarrow a=18 \end{aligned}$$

2.【答】 : $\frac{2\sqrt[3]{18}+\sqrt[3]{12}+1}{11}$

$$\begin{aligned} \text{【解】 : } & 11x^3-3x^2-3x-1=0 \\ & \Rightarrow 12x^3=x^3+3x^2+3x+1 \\ & \Rightarrow 12x^3=(x+1)^3 \\ & \Rightarrow \sqrt[3]{12}x=x+1 \quad (x \text{ 為實根, 故可直接開三次方根}) \\ & \Rightarrow x=\frac{1}{\sqrt[3]{12}-1}=\frac{\sqrt[3]{144}+\sqrt[3]{12}+1}{11}=\frac{2\sqrt[3]{18}+\sqrt[3]{12}+1}{11} \end{aligned}$$

3.【答】 :1

$$\begin{aligned} \text{【解】 : } & \sqrt{2+\sqrt{3}} \cdot \sqrt{2+\sqrt{2+\sqrt{3}}} \cdot \sqrt{2+\sqrt{2+\sqrt{2+\sqrt{3}}}} \cdot \sqrt{2-\sqrt{2+\sqrt{2+\sqrt{3}}}} \\ & = \sqrt{2+\sqrt{3}} \cdot \sqrt{2+\sqrt{2+\sqrt{3}}} \cdot \sqrt{4-(2+\sqrt{2+\sqrt{3}})} \\ & = \sqrt{2+\sqrt{3}} \cdot \sqrt{2+\sqrt{2+\sqrt{3}}} \cdot \sqrt{2-\sqrt{2+\sqrt{3}}} \\ & = \sqrt{2+\sqrt{3}} \cdot \sqrt{4-(2+\sqrt{3})} \\ & = \sqrt{2+\sqrt{3}} \cdot \sqrt{2-\sqrt{3}} \\ & = \sqrt{4-3} \\ & = 1 \end{aligned}$$

★ 指數

主題 14 指數定義及基本運算

◎基礎精選◎

1. a, b 為正數, n 為正整數, 則以下何者正確?

(A) $a^n \cdot b^n = (ab)^n$ (B) $a^n \cdot b^n = (a+b)^n$ (C) $\frac{b^n}{a^n} = \left(\frac{a}{b}\right)^n$

(D) $\frac{b^n}{a^n} = (a-b)^n$ (E) $a^0 = 1$



2. 設 $a > 0$ 且 $a \neq 1$, r, s 是任意實數, 若 $a^r = a^s$ 則 $r = s$ 。(是非題)



3. $(4 + \sqrt{15})^{\frac{15}{4}} \cdot (4 - \sqrt{15})^{\frac{15}{4}} \cdot (\sqrt[6]{27} + 1) \cdot (\sqrt[6]{27} - 1)$ 之值為_____。



4. 試求： $32^{\frac{2}{5}} \cdot 25^{\frac{-1}{2}} + (3^{\sqrt{3}+1})^{\sqrt{3}-1} =$ _____。



1.【答】：(A)、(E)

$$(B) a^n \cdot b^n = (ab)^n$$

$$(C)(D) \frac{b^n}{a^n} = \left(\frac{b}{a}\right)^n$$

2.【答】：(O)

3.【答】：2

$$\begin{aligned}\text{【解】：原式} &= [(4 + \sqrt{15}) \cdot (4 - \sqrt{15})]^{\frac{15}{4}} \cdot [(\sqrt[6]{27})^2 - 1] \\ &= 1^{\frac{15}{4}} \cdot [(3^3)^{\frac{1}{6} \times 2} - 1] = 2\end{aligned}$$

4.【答】： $\frac{49}{5}$

$$\text{【解】：所求} = (2^5)^{\frac{2}{5}} \cdot (5^2)^{-\frac{1}{2}} + 3^{(\sqrt{3}+1)(\sqrt{3}-1)} = 4 \times \frac{1}{5} + 3^2 = \frac{4}{5} + 9 = \frac{49}{5}$$

5. 若 $k = 3^x = 5^y = 7^z$ ，且 $\frac{1}{x} + \frac{1}{y} + \frac{1}{z} = 2$ ，則 $k =$ _____。



6. 已知 $17^{2x} = 13$ ， $13^{3y} = 19$ ， $19^{4z} = 289$ ，則 $xyz =$ _____。



7. 已知 $2^x = 3^y = 12$ ，求 $\frac{2}{x} + \frac{1}{y} =$ _____。



8. 設 x, y, z 為實數，且 $3^x = 5^y = 15^z$ ，試求 $xy - yz - zx$ 之值 = _____



5.【答】： $\sqrt{105}$

$$\begin{aligned} \text{【解】：} \begin{cases} 3^x = k \\ 5^y = k \\ 7^z = k \end{cases} &\Rightarrow \begin{cases} 3 = k^{\frac{1}{x}} \cdots \cdots \text{①} \\ 5 = k^{\frac{1}{y}} \cdots \cdots \text{②} \\ 7 = k^{\frac{1}{z}} \cdots \cdots \text{③} \end{cases} \quad \text{①} \times \text{②} \times \text{③} \Rightarrow 105 = k^{\frac{1}{x} + \frac{1}{y} + \frac{1}{z}} = k^2 \\ \therefore k &= \sqrt{105} \end{aligned}$$

6.【答】： $\frac{1}{12}$

$$\begin{aligned} \text{【解】：} 17^{24xyz} &= (17^{2x})^{12yz} = (13^{3y})^{4z} = 19^{4z} = 289 = 17^2 \\ \Rightarrow 24xyz &= 2, \therefore xyz = \frac{1}{12} \end{aligned}$$

7.【答】：1

$$\text{【解】：} \begin{cases} 2 = 12^{\frac{1}{x}} \\ 3 = 12^{\frac{1}{y}} \end{cases} \Rightarrow 2^2 \times 3 = 12 = 12^{\frac{2}{x}} \cdot 12^{\frac{1}{y}} \Rightarrow \frac{2}{x} + \frac{1}{y} = 1$$

8.【答】： $xy - yz - xz = 0$

$$\begin{aligned} \text{【解】：} \begin{cases} 3^x = 15^z \\ 5^y = 15^z \end{cases} &\Rightarrow \begin{cases} 3 = 15^{\frac{z}{x}} \\ 5 = 15^{\frac{z}{y}} \end{cases} \quad \text{兩式相乘} \Rightarrow 15 = 15^{\frac{z}{x} + \frac{z}{y}} \\ \Rightarrow \frac{z}{x} + \frac{z}{y} &= 1 \Rightarrow yz + xz = xy \Rightarrow \underline{xy - yz - xz = 0} \end{aligned}$$

9. 在一個培養細菌的容器中，細菌的數目每隔一分鐘就增加一倍，已知放入一個細菌，1小時後容器就充滿了細菌(總數為 N 個)，如果開頭放入四個細菌，問最少經過多少時間容器內便會充滿細菌？

(A) 1小時 (B) 59 分鐘 (C) 58 分鐘 (D) 30 分鐘 (E) 15 分鐘



10. 某項試驗中，細菌數一日增加 3 倍，若 100 天後會有 n 個細菌，則 _____ 天後會有 $\frac{n}{64}$ 個細菌數。



11. 假設一般病人服某種藥品，服藥後 t 小時，殘留在胃裡的藥量有 $M(t) = 600 \times 0.36^t$ (毫克)，試問服該種藥品後 1.5 小時，殘留在病人胃裡的藥量大約有多少毫克？

(A) 324.6 (B) 230.4 (C) 129.6 (D) 126.4 (E) 108.6 毫克。



9.【答】：(C)

【解】： $N = 2^{60}$

設 x 分鐘後，會充滿容器

$$\Rightarrow 4 \cdot 2^x = 2^{60} \Rightarrow 2^x = 2^{58} \Rightarrow x = 58 \text{ (分)} \quad \text{故選 (C)}$$

10.【答】： $x = 97$

【解】：設原有 k 個細菌， x 天後有 $\frac{n}{64}$ 個

$$\Rightarrow \begin{cases} k \cdot (1+3)^{100} = n \\ k \cdot (1+3)^x = \frac{n}{64} \end{cases} \Rightarrow 4^{100-x} = 64 = 4^3 \quad \therefore x = 97$$

11.【答】：(C)

【解】： $M(1.5) = 600 \times [(0.6)^2]^{\frac{3}{2}} = 600 \times 0.6^3 = 129.6$

主題 15 指數比較大小

◎基礎精選◎

1. 設 $a = 2^{-30}$, $b = 3^{-20}$, $c = 5^{-10}$, 試比較 a, b, c 之大小: _____



2. 下列何者最大? _____ (以 a, b, c, d, e 作答)

$$a = 100^{10}, b = 10^{100}, c = 50^{50},$$

$$d = 1 \times 2 \times 3 \times \cdots \times 50,$$

$$e = 51 \times 52 \times 53 \times \cdots \times 100$$



3. 若 $x = 5^{0.6}$, 試估算 x 介於哪兩個連續整數之間?

(A) $0 < x < 1$ (B) $1 < x < 2$ (C) $2 < x < 3$

(D) $3 < x < 4$ (E) $4 < x < 5$



4. 比較 $a = 63^8$, $b = 4^{25}$, $c = 33^{10}$ 的大小



1.【答】： $c > a > b$

【解】： $a = (\frac{1}{8})^{10}$, $b = (\frac{1}{9})^{10}$, $c = (\frac{1}{5})^{10}$, $\therefore c > a > b$

2.【答】： b

【解】： $a = 100^{10} = 10^{20}$ (20 個 10 相乘)

$b = 10^{100} = 100^{50}$ (50 個 100 相乘)

$c = 50^{50}$ (50 個 50 相乘)

$d = 1 \times 2 \times \cdots 50$

$e = 51 \times 52 \times \cdots 100$

由以上可知 b 最大

3.【答】：(C)

【解】： $\because 5^{0.6} = 5^{\frac{3}{5}}$ 又 $2^5 < 5^3 < 3^5 \Rightarrow 2 < 5^{\frac{3}{5}} < 3$ 故選 (C)

4.【答】： $c > b > a$

【解】： $a = 63^8$, $b = 4^{24} \cdot 4 = 64^8 \cdot 4 \therefore b > a$

$b = 2^{50} = 32^{10}$, $c = 33^{10} \therefore c > b$

由以上可知 $c > b > a$

主題 16 科學記號

1. 已知一光年是 $9.46 \times 10^{12} \text{ km}$ ，如果一顆恒星「比鄰星」與太陽相距 4.22 光年，且此距離以科學記號表示，可記為 $a \times 10^x \text{ km}$ ， a 以四捨五入法取到小數第一位，則 $a = \underline{\hspace{2cm}}$ ， $x = \underline{\hspace{2cm}}$



2. 由於 *SARS* 的關係，自來水公司將水中的含氯量提高到 1 ppm ，以防止病毒侵害。請問將一個長 50 公尺、寬 25 公尺、高 1.4 公尺的游泳池注滿水，則水中的含氯量應有 $\underline{\hspace{2cm}} \text{ c.c.}$ 。($1 \text{ ppm} = \text{百萬分之一}$)

3. 已知 $\frac{2}{10^{14}} < a < \frac{7}{10^{14}}$ ，且 a 可以用科學記號表示為 $b \times 10^{-m}$ ，則 m 之值為 $\underline{\hspace{2cm}}$ 。



4. 若 $0.001 \times 10^5 = 10^{x+1}$ ，求 $\frac{(0.0003)^x \times (100)^{x-1}}{10^{2x+1}}$ 之值 = $\underline{\hspace{2cm}}$



1.【答】： $a=4$ ， $x=13$

【解】： $9.46 \times 10^{12} \times 4.22 = 3.99212 \times 10^{13}$
 $\Rightarrow a=4$ ， $x=13$

2.【答】： 1.75×10^3

【解】： $5000 \times 2500 \times 140 = 1750000000 = 1.75 \times 10^9$

$$\text{所求} = \frac{1.75 \times 10^9}{10^6} = 1.75 \times 10^3$$

3.【答】：14

【解】： $2 \times 10^{-14} < a < 7 \times 10^{-14} \Rightarrow m=14$

4.【答】： 3×10^{-7}

【解】： $10^{-3} \times 10^5 = 10^2 = 10^{x+1} \Rightarrow x=1$

$$\text{所求} = \frac{(0.0003)^1 \times 100^0}{10^3} = \frac{3 \times 10^{-4}}{10^3} = 3 \times 10^{-7}$$

★ 常用對數

主題 17 常用對數

1. 量度聲音大小的單位是分貝 (DB)，DB 值的計算公式是

$$DB = 10 \cdot \log \frac{I}{I_0}, \text{ 其中 } I \text{ 是聲音強度, } I_0 \text{ 是固定值。若強度}$$

增為原來的 1000 倍，聲音增加 ____ 分貝。



2. 若水溶液中氫離子濃度為 $[H^+]$ (莫耳／升)，則該水溶液的

pH 值定義為 $pH = -\log[H^+]$ 。今有密泥洗面乳標示其

pH 值 = 5.3，路的洗面乳標示其 pH 值 = 5.8，則前者氫離子濃度是後者的 _____ 倍。



3. (1) 試證明: $\log a + \log b = \log ab$

(2) 利用 (1) 的結果計算 $\log 2 + \log 8 + \log 5 + \log 125$



1.【答】：30

【解】：令原本的聲音強度為 I ， x 分貝

$$\Rightarrow x = 10 \cdot \log \frac{I}{I_0} \Rightarrow 10^{\frac{x}{10}} = \frac{I}{I_0} \dots \textcircled{1}$$

後來的聲音強度為 $1000I$ ， y 分貝

$$\Rightarrow y = 10 \cdot \log \frac{1000I}{I_0} \Rightarrow 10^{\frac{y}{10}} = \frac{1000I}{I_0} \dots \textcircled{2}$$

$$\frac{\textcircled{2}}{\textcircled{1}} = 10^{\frac{y}{10} - \frac{x}{10}} = 1000 = 10^3$$

$$\Rightarrow y - x = 30 \text{ 故增加 } 30 \text{ 分貝}$$

2.【答】： $\sqrt{10}$

$$\text{【解】：密泥：} 5.3 = -\log [H^+]_{\text{密}} \Rightarrow [H^+]_{\text{密}} = 10^{-5.3} \dots \textcircled{1}$$

$$\text{路的：} 5.8 = -\log [H^+]_{\text{路}} \Rightarrow [H^+]_{\text{路}} = 10^{-5.8} \dots \textcircled{2}$$

$$\frac{\textcircled{1}}{\textcircled{2}} = 10^{-5.3+5.8} = 10^{0.5} = \sqrt{10}$$

3.【答】：(1) 如下 (2) 4

$$\text{【解】：(1) 令 } x = \log a \Rightarrow a = 10^x, y = \log b \Rightarrow b = 10^y$$

$$\Rightarrow 10^{x+y} = ab \Rightarrow \log ab = x + y = \log a + \log b$$

$$(2) \log 2 + \log 8 + \log 5 + \log 125$$

$$= \log 16 + \log 625$$

$$= \log (2 \times 5)^4 = 4$$

4. 聲音大小(單位為分貝)取決於聲波通過介質時，所產生的壓力變化(簡稱聲壓，單位為 N/m^2)。已知聲壓 x 與聲音大小 y 的關係式 $y = 10 \times \log \left(\frac{x}{2 \times 10^{-5}} \right)^2$ ，若某工廠運作時，測得的聲音為 100 分貝，則該工廠的聲壓為多少 N/m^2 ？

5. 試求下列各式之值：

(1) $\log(\sqrt{2020} + \sqrt{1020}) + \log(\sqrt{2020} - \sqrt{1020}) = \underline{\hspace{2cm}}$ 。

(2) 設 $\log p = 2.1$ 、 $\log q = 3.5$ 、 $\log r = 6.8$ ，試求 $\frac{p^3 q}{r} = \underline{\hspace{2cm}}$ 。

4.【答】：2

$$\begin{aligned}\text{【解】：} y=100 \text{ 代入} &\Rightarrow 100 = 10 \times 2 \log \frac{x}{2 \times 10^{-5}} \Rightarrow \log \frac{x}{2 \times 10^{-5}} = 5 \\ &\Rightarrow \frac{x}{2 \times 10^{-5}} = 10^5 \Rightarrow x = 2\end{aligned}$$

5.【答】：(1) 3 (2) 1000

$$\begin{aligned}\text{【解】：(1) 令 } a &= \log(\sqrt{2020} + \sqrt{1020}), b = \log(\sqrt{2020} - \sqrt{1020}) \\ &\Rightarrow 10^a = \sqrt{2020} + \sqrt{1020}, 10^b = \sqrt{2020} - \sqrt{1020} \\ &\Rightarrow 10^{a+b} = (\sqrt{2020} + \sqrt{1020})(\sqrt{2020} - \sqrt{1020}) = 1000 \Rightarrow a + b = 3 \\ (2) \quad p &= 10^{2.1}, g = 10^{3.5}, r = 10^{6.8} \\ &\Rightarrow \frac{p^3 g}{r} = \frac{10^{6.3} \cdot 10^{3.5}}{10^{6.8}} = 10^3 = 1000\end{aligned}$$