

陳立數學高頻率命題

使用說明

- 精選各校試題，切中段考要點

「高頻率命題」為收集全國各高中歷屆段考試題，由專業師資分析整理，精選該主題必備試題，隨時掌握重要段考趨勢。

- 主題式的編排，配合課程重點

題目皆依陳立數學教材主題分類，題型明確，便於同學課後練習，迅速複習當週上課重點。

以學生學習角度設計的排版模式，讓同學快速提升學習效率。

- 課後搭配講義，週週搭配進度

陳立數學每次課程平均進度為 3~5 個主題，課後除了教材中的主題作業，更搭配此本高頻率命題，練習更多題型，確切掌握課程重點，創造卓越效果，讓學習事半功倍。

- 雲端數位影音，學習不落人後

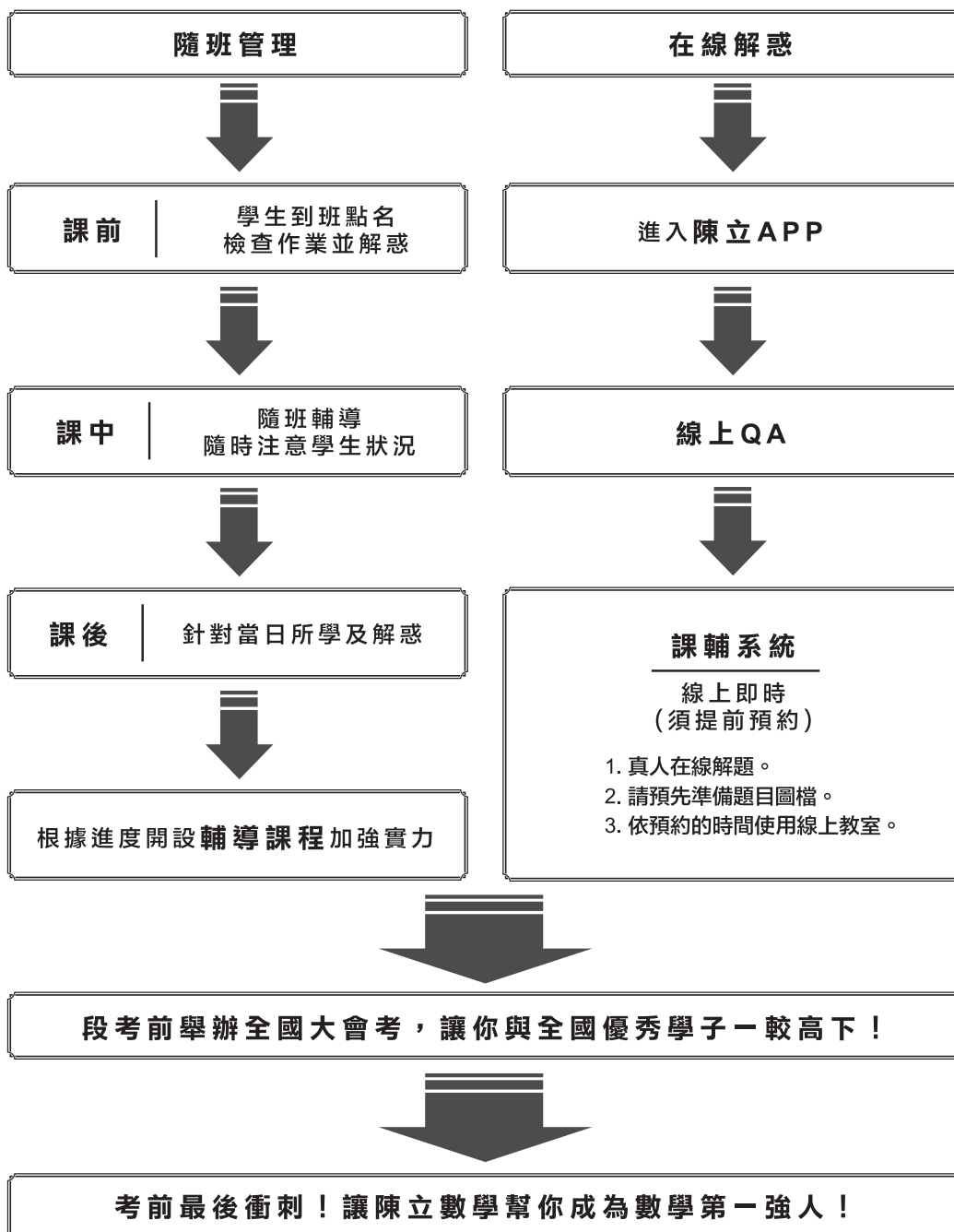
高頻率命題每個主題皆有附上 QR 碼，部分題目可連結影音講解，讓同學可以跟著解析一步步學習解題脈絡，可迅速解惑無需等待。不論身處何處都能於線上觀看最詳盡的解說，打破距離限制，享受最即時的影音教學。

善用專業教材・必能事半功倍

陳立教育集團

— 數 · 學 · 科 —
專業輔導系統

輔導無死角，線上再升級！



★ 直線方程式及其圖形

主題 1	平面直角坐標系	6
主題 2	重心、內心、外心	10
主題 3	斜率	12
主題 4	直線方程式	16
主題 5	截距式的應用	22
主題 6	二線關係	24
主題 7	直線平移與旋轉	26
主題 8	點到直線的距離	30
主題 9	極值分析	35
主題 10	直線系 (數位延伸閱讀.)	37

★ 二元一次不等式

主題 11	二元一次不等式	40
-------	---------------	----

★ 圓與直線的關係

主題 12	圓標準式	47
主題 13	圓一般式與判別式	49
主題 14	圓直徑式	51
主題 15	圓系 (數位延伸閱讀.)	53
主題 16	圓軌跡	55
主題 17	點與圓的關係	57
主題 18	圓與直線的關係	59
主題 19	圓的切線	63

★ 直線方程式及其圖形

主題 1 平面直角坐標系

⊙基礎精選⊙

1. a, b, c, d 均為正實數，設 $P(x, y)$ 為坐標平面上一點且滿足

$$\sqrt{(x+a)^2 + (y-b)^2} + \sqrt{(x+c)^2 + (y-d)^2} = \sqrt{(a-c)^2 + (b-d)^2}$$

則 P 點位置在

(1) 第一象限 (2) 第二象限 (3) 第三象限 (4) 第四象限 (5) x 軸上



2. 設 $A(2, -8)$, $B(-6, -2)$, $C(6, -5)$, $\angle BAC$ 的分角線交 $\overline{BC}$ 於 D 點，
則 D 點坐標為_____。



1.【答】：(2)

$$\text{【解】} : \sqrt{(x+a)^2 + (y-b)^2} + \sqrt{(x+c)^2 + (y-d)^2} = \sqrt{(a-c)^2 + (b-d)^2}$$

表 $P(x, y)$ 到 $(-a, b), (-c, d)$ 等於 $(-a, b), (-c, d)$ 兩點距離

則 $P(x, y)$ 在 $(-a, b), (-c, d)$ 連線上

又 $(-a, b), (-c, d)$ 均在第二象限

$\therefore P(x, y)$ 在第二象限

2.【答】：(2, -4)

$$\text{【解】} : \overline{BD} : \overline{CD} = \overline{AB} : \overline{AC} = 10 : 5 = 2 : 1$$

$$\therefore D\left(\frac{12-6}{2+1}, \frac{-10-2}{2+1}\right) = (2, -4)$$

3. 設 $B(1, 5)$ 、 $C(6, 15)$ 、 D 點在 $\triangle ABC$ 的 $\overline{BC}$ 邊上且 $\triangle ABD$ 的面積 $= \frac{2}{3} \triangle ADC$ 的面積，則 D 的坐標為 _____。



4. 設 k 為實數，如果點 $P(\frac{k+1}{3k-1}, \frac{2k+1}{k-2})$ 在第二象限內，試求 k 之範圍 = _____。



3.【答】 : (3,9)

【解】 : $\triangle ABD : \triangle ACD = 2 : 3 = \overline{BD} : \overline{CD}$

$$\Rightarrow D = \frac{3 \times (1,5) + 2 \times (6,15)}{2+3} = (3,9)$$

4.【答】 : $-1 < k < -\frac{1}{2}$

$$\text{【解】 : } \begin{cases} \frac{k+1}{3k-1} < 0 \\ \frac{2k+1}{k-2} > 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} (k+1)(3k-1) < 0 \\ (2k+1)(k-2) > 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} -1 < k < \frac{1}{3} \\ k < -\frac{1}{2} \text{ 或 } k > 2 \end{cases}$$

$$\text{取交集} \Rightarrow -1 < k < -\frac{1}{2}$$

主題 2 重心、內心、外心

⊙基礎精選⊙

1. 平面坐標上與 $A(6, 2)$ 、 $B(0, -6)$ 、 $C(-1, 1)$ 三點等距離之點坐標為 _____。



2. 已知平面上三點 $A(3, 7)$ 、 $B(-5, 1)$ 、 $C(0, 3)$ ， $\triangle ABC$ 的內心為 I ， $\overline{AI}$ 的延長線與 $\overline{BC}$ 交於 D ，求 D 點坐標為 _____。



1.【答】：(3, -2)

【解】：令外心 (x, y)

$$(x-6)^2 + (y-2)^2 = x^2 + (y+6)^2 = (x+1)^2 + (y-1)^2$$

$$\Rightarrow -12x + 36 - 4y + 4 = 12y + 36 = 2x - 2y + 2$$

$$\Rightarrow -6x - 2y + 20 = 6y + 18 = x - y + 1$$

$$\Rightarrow \begin{cases} 3x + 4y = 1 \\ x - 7y = 17 \end{cases} \Rightarrow y = -2, x = 3 \Rightarrow (3, -2)$$

2. 【答】： $(-\frac{5}{3}, \frac{7}{3})$

【解】：內心為三角平分線交點

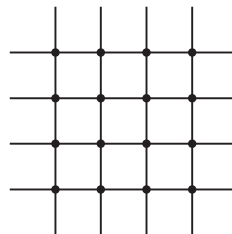
$$\Rightarrow \overline{BD} : \overline{CD} = \overline{AB} : \overline{AC} = 2 : 1$$

$$D \begin{cases} x = \frac{1 \times (-5) + 2 \times 0}{3} = -\frac{5}{3} \\ y = \frac{1 \times 1 + 2 \times 3}{3} = \frac{7}{3} \end{cases} \Rightarrow D(-\frac{5}{3}, \frac{7}{3})$$

主題 3 斜率

⊙基礎精選⊙

1. 圖中是坐標平面上的十六個點 (左、右、上、下間隔均相等)，考慮這些點中任意二點連成之直線 (不考慮無斜率的情形)，則其中斜率最小者其斜率值為_____。



2. $A(6, 2)$, $B(-2, 1)$, P 點在 y 軸上，且 $\overline{AP} \perp \overline{BP}$ ，求 P 點坐標_____。

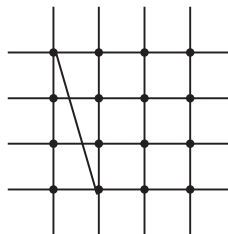


3. $A(3, 4)$, $B(-2, 1)$, P 點在 y 軸上，且 A, B, P 共線，求 P 點坐標_____。



1.【答】：-3

【解】：如右圖所示：可知斜率最小為-3



2.【答】：(0, 5) 或 (0, -2)

【解】：令 $P(0, y) \Rightarrow (\frac{y-2}{-6})(\frac{y-1}{2}) = -1 \Rightarrow y^2 - 3y - 10 = 0$, $y = 5$ 或 -2
 $\therefore P$ 點為 (0, 5) 或 (0, -2)

3.【答】： $P(0, \frac{11}{5})$

【解】：令 $P(0, y)$, $\overleftrightarrow{AB}: 3x - 5y + 11 = 0$, P 代入得 $y = \frac{11}{5}$, $\therefore P(0, \frac{11}{5})$

4. 設 $L_1 : x + ay = 2$, $L_2 : (a+1)x + 2y = -2$ 若 $L_1 \perp L_2$ 則 $a =$ _____。



5. 已知直線 $L : \sqrt{(x-77)^2 + (y-93)^2} = \sqrt{(x-78)^2 + (y-95)^2}$, 試求此直線之斜率
值：_____。



4.【答】： $a = \frac{-1}{3}$

【解】： $(\frac{-1}{a})(\frac{a+1}{-2}) = -1 \Rightarrow a = \frac{-1}{3}$

5.【答】： $\frac{-1}{2}$

【解】：令 $A(77, 93)$, $B(78, 95)$, 則 L 為 $\overline{AB}$ 之中垂線

$\overleftrightarrow{AB}$ 斜率 $= 2 \quad \therefore L$ 斜率 $= \frac{-1}{2}$

主題 4 直線方程式

⊙基礎精選⊙

1. 某次數學考試成績不理想，最高分 60 分，最低分 10 分，老師想找一個一次函數 $y = f(x) = ax + b$ 調整分數，使最高分轉換成 90 分，最低分 50 分，則 $y = f(x) = \underline{\hspace{2cm}}$ 。



2. 過點 $(3, -2)$ 且 x 截距與 y 截距之絕對值相等之直線方程式為何？



3. 若 $ab < 0, bc > 0$ ，則直線 $ax + by + c = 0$ 不通過

(A) 第一象限 (B) 第二象限 (C) 第三象限 (D) 第四象限 (E) 原點



1.【答】： $\frac{4}{5}x+42$

【解】：令 $y=ax+b \Rightarrow \begin{cases} 90=60a+b \\ 50=10a+b \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a=\frac{4}{5} \\ b=42 \end{cases} \therefore f(x)=\frac{4}{5}x+42$

2.【答】： $x+y=1$ 或 $\frac{x}{5}-\frac{y}{5}=1$ 或 $2x+3y=0$

【解】：(1) 截距同號，設 $L:\frac{x}{a}+\frac{y}{a}=1$

$(3, -2)$ 代入 $\Rightarrow \frac{3}{a}+\frac{-2}{a}=1 \Rightarrow a=1 \Rightarrow L:x+y=1$

(2) 截距異號，設 $L:\frac{x}{a}+\frac{y}{-a}=1$

$(3, -2)$ 代入 $\Rightarrow \frac{3}{a}+\frac{2}{a}=1 \Rightarrow a=5 \Rightarrow L:\frac{x}{5}-\frac{y}{5}=1$

(3) 零截距： L 過 $(3, -2), (0, 0) \Rightarrow m=\frac{-2}{3} \Rightarrow L:2x+3y=0$

3.【答】：(B)、(E)

【解】： $m=-\frac{a}{b}>0$ ，與 y 軸交點 $(0, -\frac{c}{b})$

$\Rightarrow$ 在 x 軸下方

$\Rightarrow$ 不通過第二象限及原點

4. 直線 $3x - py + q = 0$ 與直線 $5x - y + 4 = 0$ 垂直且過 $(1, 1)$ ，
則 $p + q =$ _____。



5. 設一直線 L 斜率不存在且過點 $(2, 3)$ ，則 L 的方程式為 _____。



6. 若一直線 L 沿著 x 軸正向平移 3 單位，再沿 y 軸正向平移 2 單位後，
直線 L 又回到原來的位置，則 L 的斜率為何？

4.【答】：-33

【解】：與 $5x - y + 4 = 0$ 垂直，且過 $(1, 1)$ 直線為： $x + 5y - 6 = 0$
利用 $x + 5y - 6 = 0$ 與 $3x - py + q = 0$ 同義
 $\Rightarrow p = -15, q = -18 \Rightarrow p + q = -33$

5.【答】： $x = 2$

【解】：斜率不存在 $\Rightarrow$ 鉛直線
故 $L: x = 2$

6.【答】： $\frac{2}{3}$

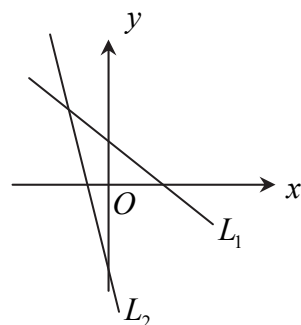
【解】：假設 L 上有一點 (a, b) ，由題意可知 $(a + 3, b + 2)$ 也在 L 上
可知 $m = \frac{2}{3}$

7. 設在坐標平面上的三條直線 L_1, L_2, L_3 斜率分別為 m_1, m_2, m_3 ，若 L_1 通過兩點 $(-4, 1)$ 、 $(2, 3)$ ， L_2 平行直線 $2x + 3y + 1 = 0$ ， L_3 垂直直線 $2x + 3y + 1 = 0$ ，則下列選項何者正確？

- (1) $m_1 > m_2 > m_3$ (2) $m_1 > m_3 > m_2$ (3) $m_2 > m_3 > m_1$
 (4) $m_3 > m_1 > m_2$ (5) $m_3 > m_2 > m_1$

8. 如圖，兩直線 L_1 、 L_2 之方程式分別為 $L_1: y = ax + b$ ， $L_2: y = cx + d$ 。請問下列哪些選項是正確的？

- (1) $a > 0$ (2) $b > 0$ (3) $a > c$
 (4) $b > d$ (5) $\frac{b}{a} > \frac{d}{c}$



7.【答】：(4)

$$\text{【解】：} m_1 = \frac{3-1}{4-(-2)} = \frac{1}{3}, m_2 = \frac{-2}{3}, m_3 = \frac{-1}{-\frac{2}{3}} = \frac{3}{2}$$

$\therefore m_3 > m_1 > m_2$ ，選 (4)

8.【答】：(2)(3)(4)

【解】：由圖形可知： $c < a < 0$ (斜率)， $d < 0 < b$ (y 軸交點判斷)

(1) $\times$ ： $a < 0$

(2) $\bigcirc$ ： $b > 0$

(3) $\bigcirc$ ： $a > c$

(4) $\bigcirc$ ： $b > d$

(5) $\times$ ：由 x 軸交點可知： $-\frac{b}{a} > -\frac{d}{c} \Rightarrow \frac{b}{a} < \frac{d}{c}$

主題 5 截距式的應用

◎基礎精選◎

1. 若一直線 L 通過 $(-3, -2)$ 且在第二象限所圍成的三角形面積為 4，則此直線 L 的方程式為_____。



2. 設直線 L 過 $P(6, 8)$ 且在第一象限與 x 軸， y 軸所圍成的面積為最小，則最小面積為_____，又直線方程式 L 之截距式為_____。



3. 設直線 L 與直線 $6x - 5y + 7 = 0$ 垂直，且其 x 、 y 截距和為 -11 ，則直線 L 的方程式為_____。

1.【答】： $\frac{x}{-2} + \frac{y}{4} = 1$

【解】：令 $L: \frac{x}{a} + \frac{y}{b} = 1, a < 0$ 且 $b > 0$

$$\Rightarrow \begin{cases} \frac{-3}{a} + \frac{-2}{b} = 1 \cdots \cdots \textcircled{1} \\ |\frac{1}{2}ab| = 4 \cdots \cdots \textcircled{2} \end{cases}$$

由② $\Rightarrow ab = -8, a = \frac{-8}{b}$ 代入① $\Rightarrow \frac{3}{8}b - \frac{2}{b} = 1$

$\Rightarrow 3b^2 - 8b - 16 = 0, b = 4 \Rightarrow a = -2$

$\therefore L: \frac{x}{-2} + \frac{y}{4} = 1$

2.【答】： $96, \frac{x}{12} + \frac{y}{16} = 1$

【解】：令 $L: \frac{x}{a} + \frac{y}{b} = 1, a > 0$ 且 $b > 0$,

P 代入 $\Rightarrow \frac{6}{a} + \frac{8}{b} = 1 \geq 2\sqrt{\frac{48}{ab}} \Rightarrow \frac{48}{ab} \leq \frac{1}{4} \Rightarrow \frac{1}{2}ab \geq 96$

$\therefore$ 最小面積 = 96, 此時 $\frac{6}{a} = \frac{8}{b} = \frac{1}{2} \Rightarrow (a, b) = (12, 16)$

$\therefore L: \frac{x}{12} + \frac{y}{16} = 1$

3.【答】： $5x + 6y = -30$

【解】：令直線 $5x + 6y = k, \frac{k}{5} + \frac{k}{6} = -11 \Rightarrow \frac{11}{30}k = -11 \Rightarrow k = -30$

$\Rightarrow L: 5x + 6y = -30$

主題 6 二線關係

⊙基礎精選⊙

1. 若兩直線 $L_1 : (a-1)x + 3y = 4$ 與 $L_2 : (a+1)x + 2ay = 3a-1$ 平行，
則 $a =$ _____。



2. (是非題) 在直角坐標平面上，方程式 $(x+y)^2 = 4$ 所表示的圖形為二條平行線。



3. 設三直線 $L_1 : x - 2y + 3 = 0$ ， $L_2 : 2x + 3y = 0$ ， $L_3 : ax - y - 1 = 0$ ，請問：
- (1) 若直線 L_1, L_2, L_3 不能圍成三角形，則 a 值為_____。(有三解)
- (2) 若直線 L_1, L_2, L_3 可以圍成一個直角三角形，則 a 值為_____。(有兩解)



1.【答】： $-\frac{1}{2}$

【解】： $\frac{a-1}{a+1} = \frac{3}{2a} \neq \frac{4}{3a-1} \Rightarrow 2a^2 - 2a = 3a + 3 \Rightarrow 2a^2 - 5a - 3 = 0$

$\Rightarrow (a-3)(2a+1) = 0 \Rightarrow a = 3$ (不合) 或 $-\frac{1}{2}$

2.【答】：(○)

【解】：所求為 $x + y = 2$ 與 $x + y = -2$

3.【答】：(1) $a = \frac{1}{2}$ 或 $-\frac{2}{3}$ 或 $-\frac{13}{9}$ (2) $a = -2$ 或 $\frac{3}{2}$

【解】：(1) 不能圍成三角形

① $L_1 // L_3 \Rightarrow \frac{1}{a} = \frac{-2}{-1} \Rightarrow a = \frac{1}{2}$ ② $L_2 // L_3 \Rightarrow \frac{2}{a} = \frac{3}{-1} \Rightarrow a = -\frac{2}{3}$

③ 三線交一點

$\begin{cases} x - 2y + 3 = 0 \\ 2x + 3y = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = -\frac{9}{7} \\ y = \frac{6}{7} \end{cases}$, 代入 $L_3: -\frac{9}{7}a - \frac{6}{7} - 1 = 0 \Rightarrow a = -\frac{13}{9}$

綜合 ① ② ③ $\Rightarrow a = \frac{1}{2}$ 或 $-\frac{2}{3}$ 或 $-\frac{13}{9}$

(2) 圍成直角三角形

① $L_1 \perp L_3: \frac{1}{2} \times a = -1, a = -2$ ② $L_2 \perp L_3: -\frac{2}{3} \times a = -1, a = \frac{3}{2}$

綜合 ① ② $\Rightarrow a = -2$ 或 $\frac{3}{2}$

主題 7 直線平移與旋轉

◎基礎精選◎

1. 已知直線 $L: y = mx - 2m + 1$, 其中 m 為實數, $A(-2, 3), B(4, 5)$,
若直線與 $\overline{AB}$ 相交, 求 m 的範圍。



2. 坐標平面上, $A(1, 5), B(4, -5)$, 若直線 $L: y = mx + 2m - 3$ 恆與 $\overline{AB}$ 相交,
求 m 的範圍_____。



3. 把直線 $2x + 3y + 4 = 0$ 水平左移 2 單位, 再鉛直上移 3 單位, 所得到的直線為
 L , 則 L 的方程式為_____。

1. 【答】： $m \geq 2$ 或 $m \leq -\frac{1}{2}$

【解】： $y = mx - 2m + 1 \Rightarrow y = m(x - 2) + 1 \Rightarrow$ 直線必過 $P(2, 1)$

$m_{PB} = 2, m_{PA} = -\frac{1}{2}$ 故所求範圍為： $m \geq 2$ 或 $m \leq -\frac{1}{2}$

2. 【答】： $-\frac{1}{3} \leq m \leq \frac{8}{3}$

【解】： $y = m(x + 2) - 3, y + 3 = m(x + 2)$

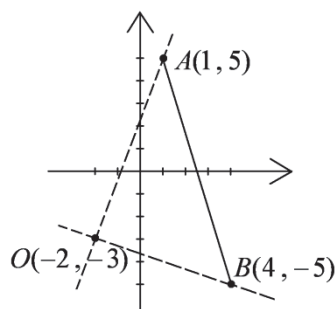
直線恆過 $(-2, -3)$

如右圖所示

$$m_{OB} = \frac{-5 - (-3)}{4 - (-2)} = \frac{-2}{6} = -\frac{1}{3}$$

$$m_{OA} = \frac{5 - (-3)}{1 - (-2)} = \frac{8}{3}$$

$$\therefore -\frac{1}{3} \leq m \leq \frac{8}{3}$$



3. 【答】： $2x + 3y - 1 = 0$

【解】： $2x + 3y + 4 = 0 \xrightarrow[\text{上3}]{\text{左2}} 2(x + 2) + 3(y - 3) + 4 = 0 \Rightarrow 2x + 3y - 1 = 0$

4. 已知點 $A(-2, 1)$ 、點 $B(4, -3)$ 與直線 $L: x - 4y = k$ ，下列哪些 k 值會讓 L 與線段 $\overline{AB}$ 沒有交點。

- (A) -12 (B) -6 (C) 6 (D) 18 (E) 21

4.【答】： $(A)(D)(E)$

【解】： $A(-2, 1)$ 代入 $\Rightarrow k = -6$

$B(4, -3)$ 代入 $\Rightarrow k = 16$

當 $-6 \leq k \leq 16$ 有交點

故無交點時，選 $(A)(D)(E)$

∞ 主題 8 到直線的距離 ∞

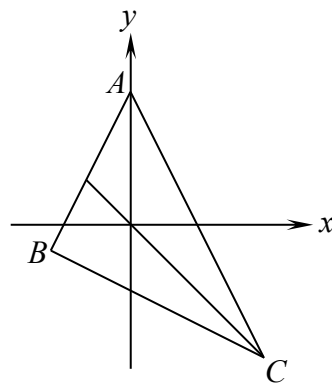
- *1. 設實數 x, y 滿足 $8x - 15y = 6$ ，則 $\sqrt{(x-1)^2 + (y+1)^2}$ 之最小值為_____。
2. 若點 $(1, 2)$ 到直線 $2x + y = k$ 之距離為 $\frac{1}{\sqrt{5}}$ ，則 $k =$ _____。
3. 若 x 軸上一點 P 到直線 $3x - 4y = 6$ 之距離為 2，則點 P 之坐標為_____。
- *4. 試求與直線 $L: 3x - 4y + 1 = 0$ 平行且相距 3 的直線方程式。
- *5. 已知 $\triangle ABC$ 的重心為 $G(8, 1)$ ，又 BC 邊所在的直線方程式為 $3x - 4y - 5 = 0$ ， $\overline{BC} = 4$ ，則 $\triangle ABC$ 面積為_____。

- *6. 平面上連接兩點 $P(6, -2)$ 及 $Q(1, 5)$ 之直線與直線 $L: x - 2y + 3 = 0$ 交於點 R ，則 $\overline{PR}:\overline{QR} =$ _____。
- *7. 平面上有一個三角形 $\triangle ABC$ ，已知 $A(2, 6)$ ，又 $\angle B$ 的內角平分線恰在 $x - y = 0$ 上， $\overline{AB}$ 邊上的高恰在直線 $x + 3y = 18$ 上，求 $\overline{BC}$ 所在之直線方程式。
8. 平面上有一個三角形 ABC ，其中 $A(8, 10)$ ，又 $\overline{AB}$ 的中線恰巧在 $x + 3y - 15 = 0$ 上， $\angle ABC$ 的內角平分線在 $x - y = 0$ 上，試求 A 點所在的高的直線方程式。

9. $\triangle ABC$ 中，已知 $A(4,0)$ ，且 $\angle B$ 之平分線為 $3x - y - 2 = 0$ ， $\angle C$ 之平分線為 $x + 2y + 1 = 0$ ，則 $\overline{BC}$ 邊所在的方程式為_____。

10. 若 $\triangle ABC$ 的 A 點坐標為 $(1,5)$ ， $\angle ABC$ 之角平分線方程式為 $L_1: x - y + 1 = 0$ ， $\overline{BC}$ 之中垂線方程式為 $L_2: 4x + 2y - 15 = 0$ ，則 $\triangle ABC$ 的垂心坐標為_____。

- *11. 如圖 $\triangle ABC$ ，其中 $\angle A$ 的內角平分線恰好為 y 軸， $\overline{AB}$ 邊所在的直線方程式為 $2x - y + 2 = 0$ ，而 $\angle C$ 的內角平分線恰好為 $x + y = 0$ ，試求 B 點坐標為_____。



12. 下列各選項中，何者與 $A(2,0)$, $B(0,2)$ 兩點所圍的三角形面積有最大值？

- (1) $(3, 4)$ (2) $(-2, -2)$ (3) $(0, 0)$ (4) $(\log 2, 10^{0.3010})$ (5) $(\pi, \sqrt{10})$ 。

13. [111 學測 B]

有一射擊遊戲，將發射台設置於坐標平面的原點，並放置三個半徑為1的圓盤靶子，其圓心分別為 $(2,2)$ 、 $(4,6)$ 與 $(8,1)$ 。玩家選定一正數 a ，並按下按鈕後，發射台將向點 $(1,a)$ 方向發射一道雷射光束（形成一射線）。假設雷射光束擊中靶子後可以穿透並繼續沿原方向前進（削過圓盤邊緣也視為擊中）。試選出正確的選項：

- (1) 雷射光束落在通過原點且斜率為 a 的直線上
(2) 若 $a = \frac{3}{2}$ ，則雷射光束會擊中圓心為 $(4,6)$ 的圓盤靶子
(3) 玩家可以僅發射一道雷射光束就擊中三個圓盤靶子
(4) 玩家至少需要發射三道雷射光束才可擊中三個圓盤靶子
(5) 玩家發射一道雷射光束後，若擊中圓心為 $(8,1)$ 的圓盤靶子，則 $a \leq \frac{16}{63}$ 。

*14. 將一張畫有直角坐標系的圖畫紙沿著直線摺疊一次，發現摺完後 $A(4, -5)$ 與 $B(8, 3)$ 重合，此時， $C(1,4)$ 會與哪一個點重合？答：_____。

簡 答

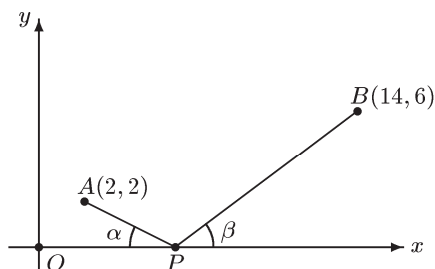
- | | | | |
|--|-----------------------|--|------------------------------------|
| 1. 1 | 2. 3 或 5 | 3. $(\frac{16}{3}, 0)$ 或 $(\frac{-4}{3}, 0)$ | |
| 4. $L': 3x - 4y - 14 = 0$ 或 $L': 3x - 4y + 16 = 0$ | 5. 18 | 6. 13:6 | |
| 7. $x - 3y = 0$ | 8. $6x + 5y - 98 = 0$ | 9. $3x + 2y + 2 = 0$ | 10. $(\frac{-2}{3}, \frac{25}{3})$ |
| 11. $(\frac{-6}{5}, \frac{-2}{5})$ | 12. (2) | 13. (1)(2)(5) | 14. (-1, 0) |

主題 9 極值分析

◎基礎精選◎

1. 小葉打撞球，球從 $A(2, 2)$ 點打出去，碰上台邊 P 點，再折回撞擊 B 球， B 球的位置是 $B(14, 6)$ (如右圖)，則 P 點的位置坐標為_____。

(提示：入射角 α 等於反射角 β)



2. $\sqrt{(x-3)^2+9} + \sqrt{(x-7)^2+16}$ 的最小值_____。

3. 坐標平面上有兩點 $A(3, 2)$; $B(-1, 4)$ 及直線 $L: x + y + 1 = 0$ ，若 P 為 L 上之動點，當 $\overline{AP} + \overline{BP}$ 有最小值時， P 點的坐標為_____。



1.【答】： $(5, 0)$

【解】： $A'(2, -2)$ 為 A 對 x 軸之對稱點

$$\Rightarrow \overleftrightarrow{A'B}: 2x - 3y = 10, \text{ 令 } y = 0 \text{ 得 } x = 5$$

$$\therefore P(5, 0)$$

2.【答】： $\sqrt{65}$

【解】：令 $A(x, 0)$, $B(3, 3)$, $C(7, 4)$, 則所求即 $\overline{AB} + \overline{AC}$ 之最小值

令 $C'(7, -4)$ 為 C 對 x 軸之對稱點

$$\text{則最小值} = \overline{C'B} = \sqrt{65}$$

3.【答】： $(\frac{-9}{5}, \frac{4}{5})$

【解】：令 $A'(x, y)$ 為 A 對 L 之對稱點

$$\overleftrightarrow{AA'}: x - y = 1, \text{ 和 } x + y + 1 = 0 \text{ 聯立得 } \overleftrightarrow{AA'} \text{ 中點 } (0, -1) = (\frac{x+3}{2}, \frac{y+2}{2})$$

$$\therefore A'(-3, -4) \Rightarrow \overleftrightarrow{A'B}: 4x - y + 8 = 0$$

$$\begin{cases} 4x - y + 8 = 0 \\ x + y + 1 = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = \frac{-9}{5} \\ y = \frac{4}{5} \end{cases} \therefore P(\frac{-9}{5}, \frac{4}{5})$$

主題 10 直線系 [數位延伸]

⊙基礎精選⊙

1. 已知直線 L 過原點及 $L_1: 299x + 188y + 2 = 0$ 和 $L_2: 144x + 84y + 1 = 0$ 之交點，則直線 L 方程式為_____。



2. 設直線 $L: mx + y + 3 + m = 0$ ，對任意實數 m ，直線 L 恆通過一個固定點，其坐標為_____。



3. $\forall k \in R$ ，直線 $(2k-1)x + (k+3)y + (5k+1) = 0$ 恆過定點 P ，則 P 之坐標為_____。



1.【答】： $11x + 20y = 0$

【解】：令 $L: (299x + 188y + 2) + k(144x + 84y + 1) = 0$
 $(0, 0)$ 代入 $\Rightarrow 2 + k = 0, k = -2 \quad \therefore L: 11x + 20y = 0$

2.【答】： $(-1, -3)$

【解】： $\Rightarrow m(x+1) + (y+3) = 0 \Rightarrow$ 恆過 $(-1, -3)$

3.【答】： $(-2, -1)$

【解】： $\Rightarrow k(2x + y + 5) + (-x + 3y + 1) = 0$
 $\Rightarrow \begin{cases} 2x + y + 5 = 0 \\ -x + 3y + 1 = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = -2 \\ y = -1 \end{cases} \quad \therefore P(-2, -1)$

★ 二元一次不等式

主題 11 二元一次不等式

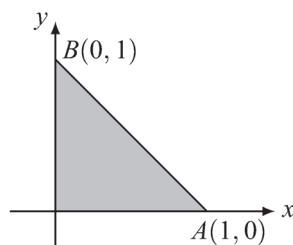
◎基礎精選◎

1. 不等式 $6-2y \leq x-2 \leq y \leq 4$ 的圖形為何種圖形？ _____，
其面積為 _____。



2. 下列不等式何者的解集合為右圖中之灰色區域 (含邊界)？

- (A) $xy(x+y-1) \leq 0$
- (B) $xy(x+y-1) \geq 0$
- (C) $\sqrt{x}\sqrt{y}(x+y-1) \geq 0$
- (D) $\sqrt{x}\sqrt{y}(x+y-1) \leq 0$
- (E) $|x|+|y|-1 \leq 0$



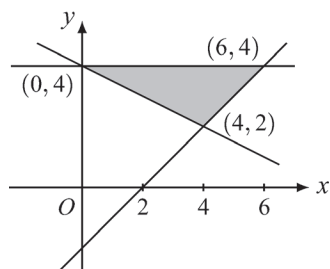
1.【答】：三角形；6

$$\text{【解】：} 6-2y \leq x-2 \leq y \leq 4 \Rightarrow \begin{cases} x+2y-8 \geq 0 \\ x-y-2 \leq 0 \\ y-4 \leq 0 \end{cases}$$

其圖形為三角形區域如右

頂點坐標為 $(4, 2)$ 、 $(6, 4)$ 、 $(0, 4)$

$$\text{面積} = \frac{1}{2} \times 6 \times 2 = 6$$



2.【答】：(D)

$$\text{【解】：} \because \overleftrightarrow{AB}: x+y-1=0$$

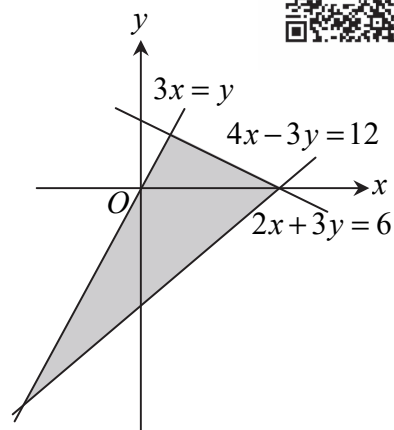
$$\therefore \text{灰色部分之不等式解為} \begin{cases} x \geq 0 \\ y \geq 0 \\ x+y-1 \leq 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \sqrt{x} \geq 0 \\ \sqrt{y} \geq 0 \\ x+y-1 \leq 0 \end{cases} \therefore \text{選 (D)}$$

3. 設 $A(k, 2)$ 與 $B(-4, k)$ 兩點在直線 $L: 4x - 3y + 12 = 0$ 的同側，則實數 k 之範圍為_____。



4. 試問圖中鋪色部分(包含邊界)為下列哪一個不等式組之解？

- (A) $\begin{cases} 3x \geq y \\ 4x - 3y \geq 12 \\ 2x + 3y \leq 6 \end{cases}$ (B) $\begin{cases} 3x \geq y \\ 4x - 3y \leq 12 \\ 2x + 3y \leq 6 \end{cases}$
- (C) $\begin{cases} 3x \leq y \\ 4x - 3y \geq 12 \\ 2x + 3y \geq 6 \end{cases}$ (D) $\begin{cases} 3x \leq y \\ 4x - 3y \leq 12 \\ 2x + 3y \geq 6 \end{cases}$



3.【答】： $-\frac{3}{2} < k < -\frac{4}{3}$

【解】： $(4k - 3 \cdot 2 + 12)(4 \cdot (-4) - 3k + 12) > 0$

$$\Rightarrow (4k + 6)(-4 - 3k) > 0 \Rightarrow (3k + 4)(2k + 3) < 0 \Rightarrow -\frac{3}{2} < k < -\frac{4}{3}$$

4.【答】：(B)

【解】：在 $a > 0$ 的條件下

直線 $ax + by \geq c$ 的圖形在直線右側(包含直線)

直線 $ax + by \leq c$ 的圖形在直線左側(包含直線)

故選 (B)

5. 在坐標平面上，若不等式組 $\begin{cases} x+2y \geq -4 \\ -1 \leq x \leq 3 \\ y \leq k \end{cases}$ 表示的區域為一個三角形及其內部，

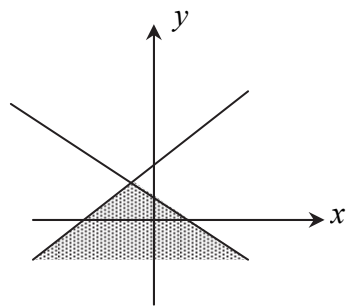
則 k 可為哪些選項？

- (1) $\frac{-3}{2}$ (2) $\frac{2}{3}$ (3) -2 (4) $\frac{-7}{2}$ (5) 4

6. 聯立不等式 $\begin{cases} x+ay+b \geq 0 \\ cx+dy+e \geq 0 \end{cases}$ 的圖形

為右圖陰影部分，則下列哪些選項為正數？

- (A) a (B) b
(C) c (D) d
(E) e

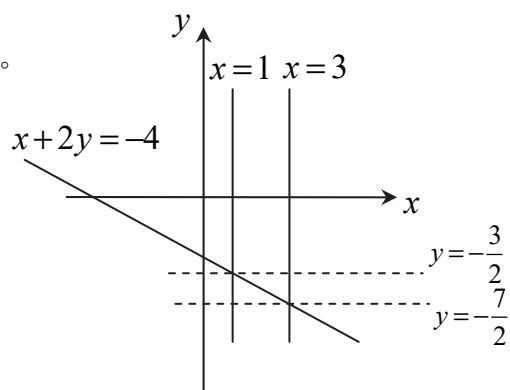


5.【答】：(1)(3)

【解】：如圖：當 $k > \frac{-3}{2}$ ，圍出梯形。

當 $-\frac{7}{2} < k \leq \frac{3}{2}$ ，圍出三角形。

當 $k \leq -\frac{7}{2}$ ，無圖形



6.【答】：(B)(E)

【解】：
$$\begin{cases} x+ay+b \geq 0 \cdots \cdots L_1 \\ cx+dy+e \geq 0 \cdots \cdots L_2 \end{cases}$$

$\because L_1$ 中 x 項係數 $> 0 \Rightarrow x+ay+b \geq 0$ 表此線右半範圍
 $\Rightarrow L_1, L_2$ 由圖表示, $c < 0$

$L_1 : a < 0, b > 0 \quad L_2 : y = \frac{-c}{d}x - \frac{e}{d}, d < 0, e > 0$

★ 圓與直線的關係

主題 12 圓標準式

⊙基礎精選⊙

1. 圓過點 $A(1, 4)$, $B(3, -2)$ 且弦 $\overline{AB}$ 距圓心為 $\sqrt{10}$, 求圓方程式。



2. 圓與二直線 $2x - 5y - 6 = 0$ 及 $2x - 5y + 10 = 0$ 均相切，且圓心在直線 $x - 2y + 2 = 0$ 上，求此圓方程式。



1.【答】： $(x-5)^2 + (y-2)^2 = 20$ 或 $(x+1)^2 + y^2 = 20$

【解】：1° $\overline{AB} = \sqrt{(3-1)^2 + (-2-4)^2} = 2\sqrt{10}$

2° M 為 $\overline{AB}$ 中點 $\therefore \overline{MB} = \sqrt{10}$

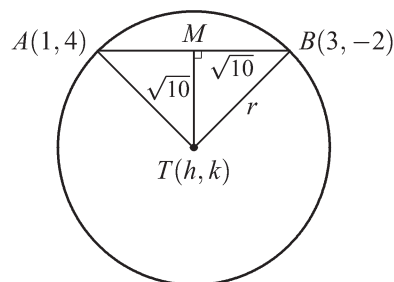
3° 半徑 $r = \sqrt{10+10} = 2\sqrt{5}$

4° 令圓心 $T(h, k)$ 利用 $\begin{cases} \overline{TA}^2 = \overline{TB}^2 \\ \overline{TA}^2 = r^2 \end{cases}$

$$\Rightarrow \begin{cases} (h-1)^2 + (k-4)^2 = (h-3)^2 + (k+2)^2 \\ (h-1)^2 + (k-4)^2 = 20 \end{cases}$$

$$\begin{cases} h-3k = -1 \\ (h-1)^2 + (k-4)^2 = 20 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} h=5 \\ k=2 \end{cases} \text{ 或 } \begin{cases} h=-1 \\ k=0 \end{cases}$$

5° 圓方程式為 $(x-5)^2 + (y-2)^2 = 20$ 或 $(x+1)^2 + y^2 = 20$



2.【答】： $(x+6)^2 + (y+2)^2 = \frac{64}{29}$

【解】：1° 圓心在 $x-2y+2=0$ 上，令圓心為 $(2t-2, t)$

2° 利用圓上 $d_1 = d_2$

$$\text{得 } \frac{|4t-4-5t+10|}{\sqrt{4+25}} = \frac{|4t-4-5t-6|}{\sqrt{4+25}}$$

$$\Rightarrow |-t+6| = |-t-10|$$

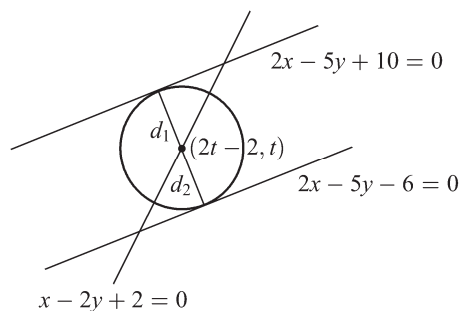
$$\Rightarrow t^2 - 12t + 36 = t^2 + 20t + 100$$

$$\Rightarrow 32t = -64 \Rightarrow t = -2$$

3° 圓心 $(-6, -2)$

4° 半徑 $r = d_1 = \frac{|-12+10+10|}{\sqrt{4+25}} = \frac{8}{\sqrt{29}}$

5° 圓方程式： $(x+6)^2 + (y+2)^2 = \frac{64}{29}$



主題 13 圓一般式與判別式

◎基礎精選◎

1. 三直線 $L_1: x - y - 9 = 0$, $L_2: x + 2y = 0$, $L_3: 3x - y - 7 = 0$ 圍成三角形，試求此三角形外接圓方程式。



2. 設 a, b 為實數，若方程式 $(2a-1)x^2 + ay^2 - 2ax - 4ay + k = 0$ 所表示的圖形為一圓，則 k 之範圍為 _____。



3. $a > 0$ ，已知三圓： $C_1: x^2 + y^2 + 2ax + 12y + 10a + 8 = 0$ ， $C_2: x^2 + y^2 - 2x - a^2 + 2a = 0$ ， $C_3: x^2 + y^2 - 22x - 6ay + 8a^2 - 25a + 36 = 0$ 之圓心在一直線上，則 $a =$ _____。



1.【答】： $x^2 + y^2 - 4x + 12y + 15 = 0$

【解】：1° L_1 、 L_2 求交點 $A(6, -3)$

2° L_1 、 L_3 求交點 $B(-1, -10)$

3° L_2 、 L_3 求交點 $C(2, -1)$

4° 令圓方程式 $x^2 + y^2 + dx + ey + f = 0$

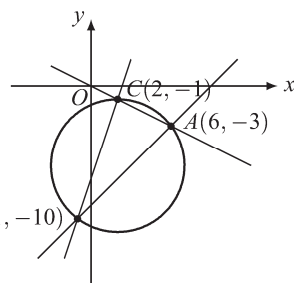
$A(6, -3)$

$B(-1, -10)$ 代入得 $\begin{cases} 36 + 9 + 6d - 3e + f = 0 \\ 1 + 100 - d - 10e + f = 0 \end{cases}$

$C(2, -1)$ $\begin{cases} 4 + 1 + 2d - e + f = 0 \end{cases}$

$\Rightarrow d = -4, e = 12, f = 15$

5° 圓方程式 $x^2 + y^2 - 4x + 12y + 15 = 0$



2.【答】： $k < 5$

【解】：由 $2a - 1 = a \Rightarrow a = 1$

原方程式整理成 $x^2 + y^2 - 2x - 4y + k = 0$

$\Rightarrow (x-1)^2 + (y-2)^2 = 5 - k$ 表實圓

$\therefore 5 - k > 0$ 得 $k < 5$

3.【答】：4

【解】： $C_1: x^2 + y^2 + 2ax + 12y + 10a + 8 = 0 \Rightarrow$ 圓心 $O_1(-a, -6)$

$C_2: x^2 + y^2 - 2x - a^2 + 2a = 0 \Rightarrow$ 圓心 $O_2(1, 0)$

$C_3: x^2 + y^2 - 22x - 6ay + 8a^2 - 25a + 36 = 0 \Rightarrow$ 圓心 $O_3(11, 3a)$

此三個圓心共線： $\frac{3a+6}{11+a} = \frac{3a-0}{11-1}$

$\Rightarrow a^2 + a - 20 = 0 \Rightarrow (a+5)(a-4) = 0$

$\therefore a = 4(a > 0)$

主題 14 圓直徑式

⊙基礎精選⊙

1. 自原點 O 作圓 $x^2 + y^2 + 2x - 4y + 1 = 0$ 的二切線，切點為 P 與 Q ，求 $\triangle OPQ$ 外接圓方程式。



2. $L_1: 2x - y = 1$ 與 $L_2: 3x + 2y = 5$ 之交點為 A ，自 $P(1, 0)$ 到二直線垂足分別為 B, C ，求過 P, A, B, C 之外接圓方程式。



1.【答】： $x^2 + y^2 + x - 2y = 0$

【解】：1° $x^2 + y^2 + 2x - 4y + 1 = 0 \Rightarrow (x+1)^2 + (y-2)^2 = 4$

圓心 $T(-1, 2)$

2° $\angle OPT = \angle OQT = 90^\circ$

3° $\square OPTQ$ 外接圓為 $\overline{OT}$ 直徑圓

$\Rightarrow x(x+1) + y(y-2) = 0$

$\Rightarrow x^2 + y^2 + x - 2y = 0$

2.【答】： $x^2 + y^2 - 2x - y + 1 = 0$

【解】：1° $\begin{cases} 2x - y = 1 \\ 3x + 2y = 5 \end{cases} \Rightarrow A: \begin{cases} x = 1 \\ y = 1 \end{cases}$

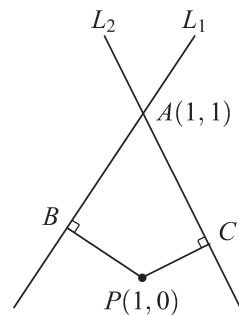
2° $P(1, 0)$ 不在 L_1 、 L_2 圖形上

3° $\angle ABP = \angle ACP = 90^\circ$

4° $\square ABPC$ 的外接圓為 $\overline{AP}$ 的直徑圓

$(x-1)(x-1) + (y-1)y = 0$

$x^2 + y^2 - 2x - y + 1 = 0$



主題 15 圓系 [數位延伸]

⊙基礎精選⊙

1. 求過圓 $x^2 + y^2 + 2x - 4y + 1 = 0$ 與直線 $2x - y = 0$ 的交點，且與 y 軸相切的圓方程式。



1.【答】： $x^2 + y^2 - 2x - 2y + 1 = 0$ 或 $x^2 + y^2 - 10x + 2y + 1 = 0$

【解】：1° 圓可令為： $x^2 + y^2 + 2x - 4y + 1 + k(2x - y) = 0$

$$\Rightarrow x^2 + y^2 + (2+2k)x - (4+k)y + 1 = 0$$

2° y 軸方程式： $x = 0$

$$\text{代入圓可得 } y^2 - (4+k)y + 1 = 0 \dots\dots \textcircled{1}$$

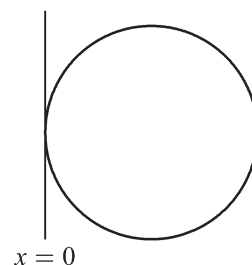
3° $\because y$ 軸與圓相切 $\Rightarrow$ 只有一個切點

$$\textcircled{1} \text{ 式有兩個相等實根 } \Rightarrow D = 0$$

$$\Rightarrow (k+4)^2 - 4 = 0 \Rightarrow k+4 = \pm 2$$

$$\Rightarrow k = -2 \text{ 或 } k = -6$$

4° 圓方程式： $x^2 + y^2 - 2x - 2y + 1 = 0$ 或 $x^2 + y^2 - 10x + 2y + 1 = 0$



主題 16 圓軌跡

◎基礎精選◎

1. $A(1, 2)$, P 在 $(x+3)^2 + (y-4)^2 = 8$ 上移動, 求 $\overline{AP}$ 中點的軌跡方程式。



2. 已知 A, B 二點分別在 x 軸、 y 軸上, 且 $\overline{AB} = 12$, 則 $\overline{AB}$ 中點之軌跡方程式為 _____。



3. 平面上至 $A(-3, 1)$, $B(2, 1)$ 之距離比為 $3:2$ 之點 P 的軌跡方程式。



1.【答】： $(x+1)^2 + (y-3)^2 = 2$

【解】：1° 令 $P(a, b)$, $\overline{AP}$ 中點 $M(x, y)$

2° P 點滿足 $(a+3)^2 + (b-4)^2 = 8$

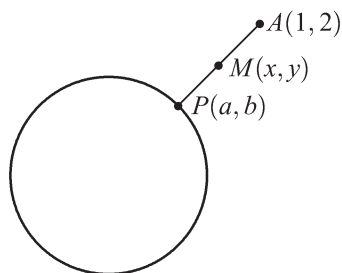
$$3^\circ \begin{cases} x = \frac{a+1}{2} \\ y = \frac{b+2}{2} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a = 2x-1 \\ b = 2y-2 \end{cases}$$

4° $\because (a+3)^2 + (b-4)^2 = 8$

$$\Rightarrow (2x-1+3)^2 + (2y-2-4)^2 = 8$$

$$\Rightarrow (2x+2)^2 + (2y-6)^2 = 8 \Rightarrow 4(x+1)^2 + 4(y-3)^2 = 8$$

$$\Rightarrow (x+1)^2 + (y-3)^2 = 2 \text{ 此為軌跡方程式}$$



2.【答】： $x^2 + y^2 = 36$

【解】：設 $\overline{AB}$ 中點 $M(x, y)$, $A(a, 0)$, $B(0, b)$

$$\Rightarrow x = \frac{a}{2}, y = \frac{b}{2} \text{ 且 } a^2 + b^2 = 144$$

$$\Rightarrow (2x)^2 + (2y)^2 = 144$$

$$\text{故所求為 } x^2 + y^2 = 36$$

3.【答】： $x^2 + y^2 - 12x - 2y + 1 = 0$

【解】： $2\sqrt{(x+3)^2 + (y-1)^2} = 3\sqrt{(x-2)^2 + (y-1)^2}$

$$4(x^2 + 6x + 9 + y^2 - 2y + 1) = 9(x^2 - 4x + 4 + y^2 - 2y + 1)$$

$$5x^2 + 5y^2 - 60x - 10y + 5 = 0 \Rightarrow x^2 + y^2 - 12x - 2y + 1 = 0$$

主題 17 點與圓的關係

◎基礎精選◎

1. 自點 $P(1, 5)$ 向圓 $x^2 + y^2 - 6x + 4y + 4 = 0$ 作二切線，

切點分別為 A ， B ，則

(1) 切線段 $\overline{PA}$ 長為 _____。 (2) $\triangle PAB$ 之外接圓方程式為 _____。



2. 若點 $P(x, y)$ 在圓 $C: x^2 + y^2 - 4x + 2y - 4 = 0$ 上，則 $(x+1)^2 + (y-3)^2$ 的最小值

_____。



3. 設 k 為一正整數，若坐標平面上一點 $P(-2, 3)$ 可以向圓

$\Gamma: x^2 + y^2 + 2kx - 6y + 3k + 13 = 0$ 做出兩條切線，則符合條件之所有 k 值的總和為 _____。



1.【答】：(1) $2\sqrt{11}$ (2) $(x-2)^2 + (y-\frac{3}{2})^2 = \frac{53}{4}$

【解】：圓 $x^2 + y^2 - 6x + 4y + 4 = 0$

$\Rightarrow (x-3)^2 + (y+2)^2 = 3^2 \Rightarrow$ 圓心 $O(3, -2)$ ，半徑 $r = 3$

(1) $\overline{PA} = \sqrt{1^2 + 5^2 - 6 \cdot 1 + 4 \cdot 5 + 4} = 2\sqrt{11}$

(2) 所求外接圓即以 $\overline{OP}$ 為直徑的圓， $\overline{OP}$ 中點 $(2, \frac{3}{2})$ ， $\overline{OP} = \sqrt{53}$

$\Rightarrow$ 所求圓： $(x-2)^2 + (y-\frac{3}{2})^2 = \frac{53}{4}$

2.【答】：4

【解】：1° $C: (x-2)^2 + (y+1)^2 = 9$ ，圓心 $T(2, -1)$ ，半徑 $r = 3$

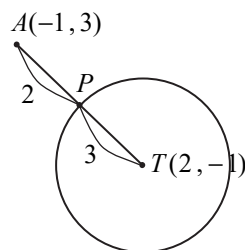
2° $A(-1, 3)$ 代入 C 得

$(-1)^2 + 3^2 - 4 \cdot (-1) + 2 \cdot 3 - 4 > 0 \Rightarrow A$ 在圓外

3° $(x+1)^2 + (y-3)^2 = (\sqrt{(x+1)^2 + (y-3)^2})^2$

表 $P(x, y)$ 和 $A(-1, 3)$ 的距離平方

4° 最小值 $= (\overline{AT} - r)^2 = (5-3)^2 = 4$



3.【答】：18

【解】：1° 將 Γ 整理成標準式得 $(x+k)^2 + (y-3)^2 = k^2 - 3k - 4$ 為一圓

$\Rightarrow k^2 - 3k - 4 > 0 \Rightarrow k > 4$ 或 $k < -1$

2° P 在圓外即可作出兩條切線

$\Rightarrow (-2)^2 + 3^2 + 2k \cdot (-2) - 6 \cdot 3 + 3k + 13 > 0$

$\Rightarrow k < 8$

由 1°, 2° 得 $4 < k < 8 \Rightarrow k$ 可能為 5, 6, 7 $\Rightarrow$ 總和為 18

主題 18 圓與直線的關係

⊙基礎精選⊙

1. 設直線 $y = mx$ ($m > 0$) 與圓 $x^2 + y^2 - 4x + 2y + 1 = 0$ 交於 A 、 B 兩點，若 $\overline{AB} = \sqrt{6}$ ，則 $m = ?$



2. 已知坐標平面上圓 $C: (x-2)^2 + y^2 = 3$ ，若 $P(x, y)$ 為圓 C 上一點，則 $\frac{y}{x}$ 的最大值為 _____。



1.【答】： $\frac{1}{3}$

【解】：1° $x^2 + y^2 - 4x + 2y + 1 = 0 \Rightarrow (x-2)^2 + (y+1)^2 = 4$

2° 圓心 $(2, -1)$, $r = 2$; M 為 $\overline{AB}$ 中點, $\overline{MB} = \frac{\sqrt{6}}{2}$

3° 如圖, $d = \sqrt{2^2 - (\frac{\sqrt{6}}{2})^2} = \sqrt{\frac{5}{2}}$

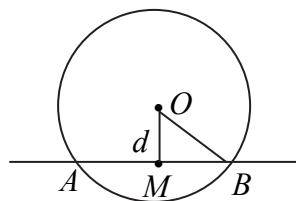
4° 直線 $mx - y = 0$

利用圓心到直線距離 $= \frac{|2m+1|}{\sqrt{m^2+1}} = \sqrt{\frac{5}{2}}$

$\Rightarrow \sqrt{2} |2m+1| = \sqrt{5} \times \sqrt{m^2+1} \Rightarrow 2(4m^2 + 4m + 1) = 5(m^2 + 1)$

$\Rightarrow 3m^2 + 8m - 3 = 0 \Rightarrow (3m-1)(m+3) = 0$

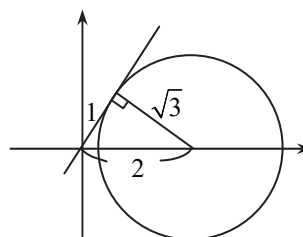
$\Rightarrow$ 取 $m = \frac{1}{3}$ ($\because m > 0$)



2.【答】： $\sqrt{3}$

【解】： $\frac{y}{x}$ 可視為動點 (x, y) 到原點的斜率

$\therefore$ 由圖可知 $\text{Max} = \tan 60^\circ = \sqrt{3}$



3. 有一直線 L 其斜率為 -1 ，圓 $C: x^2 + y^2 - 6x - 4y + 5 = 0$ ，若 L 與 C 相切，則 L 的方程式為 _____。



4. 直線 $L: 3x + 4y - 2 = 0$ 與圓 $C: x^2 + y^2 - 2x - 2y - 14 = 0$ 交於 A, B 兩點，求
(1) A, B 兩點的中點座標為 _____。 (2) $\overline{AB} =$ _____。



3.【答】： $x+y-1=0$ or $x+y-9=0$

【解】： $C: x^2 + y^2 - 6x - 4y + 5 = 0 \Rightarrow$ 圓心 $(3, 2)$, $r = 2\sqrt{2}$

設 $L: y = -x + k \Rightarrow x + y - k = 0 \because$ 相切 $\therefore d = r$

$$\Rightarrow \frac{|3+2-k|}{\sqrt{1+1}} = 2\sqrt{2} \Rightarrow |5-k| = 4 \Rightarrow k = 1 \text{ or } 9$$

$\therefore L: x+y-1=0$ or $x+y-9=0$

4.【答】： $(1) (\frac{2}{5}, \frac{1}{5})$ (2) $2\sqrt{15}$

【解】： (1) 中點即圓心 $(1, 1)$ 在 L 上的垂足

$$\begin{cases} 3x+4y=2 \\ 4x-3y=1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x=\frac{2}{5} \\ y=\frac{1}{5} \end{cases} \therefore \text{中點} (\frac{2}{5}, \frac{1}{5})$$

$$(2) \overline{AB} = 2\sqrt{r^2 - d^2} \text{ 其中 } d = \frac{|3+4-2|}{\sqrt{9+16}} = 1, r = 4$$

$$\therefore \overline{AB} = 2\sqrt{4^2 - 1^2} = 2\sqrt{15}$$

主題 19 圓的切線

⊙基礎精選⊙

1. 試求過點 $A(1, -5)$ 且與圓： $x^2 + y^2 + 4x - 2y - 4 = 0$ 相切的直線方程式。



2. 求與直線 $2x - y + 7 = 0$ 垂直且與圓 $x^2 + y^2 + 6x - 2y + 5 = 0$ 相切的直線方程式。
(兩解)



1.【答】： $3x+4y+17=0$ 或 $x=1$

【解】：1° $A(1, -5)$ 代入圓方程式得 $1+25+4+10-4=36>0$

$\therefore A$ 在圓外

2° 圓： $(x+2)^2+(y-1)^2=9$ 圓心 $(-2, 1)$ ，半徑 $=3$

3° 過 A 切線： $y+5=m(x-1)$ 即 $mx-y-m-5=0$

4° 利用圓心到切線距離等於半徑

$$\Rightarrow \frac{|-2m-1-m-5|}{\sqrt{m^2+1}}=3$$

$$\Rightarrow |-3m-6|=3\sqrt{m^2+1}$$

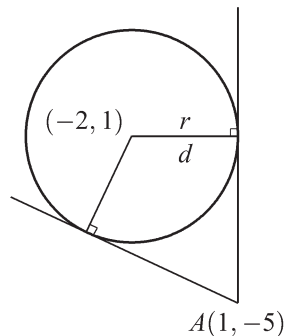
$$\Rightarrow 9m^2+36m+36=9m^2+9$$

$$\Rightarrow 36m=-27 \Rightarrow m=-\frac{3}{4}$$

$\Rightarrow$ 切線方程式為 $3x+4y+17=0$

5° 另一條 m 不存在，為鉛直切線，且過 $A(1, -5)$

方程式為 $x=1$



2.【答】： $x+2y-4=0$ or $x+2y+6=0$

【解】：與 $2x-y+7=0$ 垂直 $\Rightarrow$ 設切線： $x+2y+k=0$

圓心 $(-3, 1)$ ， $r=\sqrt{5}$

$\therefore$ 相切 $\therefore d=r$

$$\Rightarrow \frac{|-3+2+k|}{\sqrt{1+4}}=\sqrt{5} \Rightarrow |-1+k|=5 \Rightarrow k=-4 \text{ or } 6$$

則 $L: x+2y-4=0$ or $x+2y+6=0$

3. 平面上一圓 $C: (x+3)^2 + y^2 = 9$,

若圓外一點 $P(0, 6)$ 向圓 C 做兩

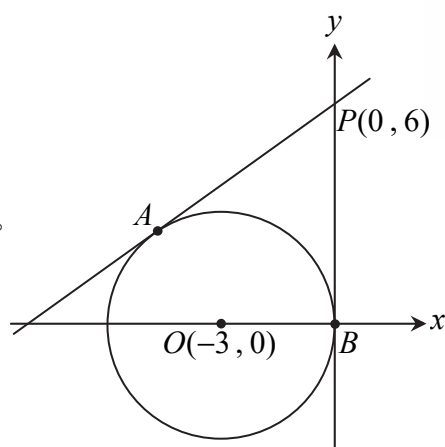
切線 $\overrightarrow{PA}$, $\overrightarrow{PB}$ 分別與圓 C 相

切於 A , B 兩點, 試求:

(1) 過 A, B, P 三點的外接圓方程式。

(2) 兩切線方程式。

(3) 直線 AB 方程式。



4. 在坐標平面上, 有一光線自 $(5, -4)$ 射出, 經 y 軸反射後與圓

$C: (x-2)^2 + (y-2)^2 = 5$ 相切, 則此光線未反射前行徑路線的

直線方程式為 _____。



3.【答】：(1) $x^2 + y^2 + 3x - 6y = 0$ (2) $3x - 4y + 24 = 0$ or $x = 0$ (3) $x + 2y = 0$

【解】：(1) 所求即以 P, O 為直徑之圓為

$$(x+3)(x-0) + (y-0)(y-6) = 0 \Rightarrow x^2 + y^2 + 3x - 6y = 0$$

$$(2) \text{ 設切線 } (y-6) = m(x-0) \Rightarrow mx - y + 6 = 0$$

$$\because \text{相切} \therefore d(O, L) = r \Rightarrow \frac{|-3m+6|}{\sqrt{m^2+1}} = 3 \Rightarrow |-m+2| = \sqrt{m^2+1}$$

$$\Rightarrow m = \frac{3}{4} \text{ or 不存在} \Rightarrow \text{切線為 } 3x - 4y + 24 = 0 \text{ or } x = 0$$

$$(3) \text{ 直線 } \overleftrightarrow{AB} : (0+3)(x+3) + (6)y = 9 \Rightarrow x + 2y = 0$$

4.【答】： $x + 2y + 3 = 0$

【解】：令光線由 $A(5, -4)$ 射出，對稱點為 $A'(-5, -4)$

反射前之直線方程式為 L_1 ，反射後之直線方程式為 L_2

$$\text{令 } L_2 : y + 4 = m(x + 5) \Rightarrow mx - y + 5m - 4 = 0$$

$$\frac{|2m - 2 + 5m - 4|}{\sqrt{m^2 + (-1)^2}} = \sqrt{5} \Rightarrow m = \frac{1}{2} \text{ or } \frac{31}{22} \text{ (不合)}$$

$$\Rightarrow L_2 : y + 4 = \frac{1}{2}(x + 5) \Rightarrow \text{與 } y \text{ 軸之交點為 } (0, -\frac{3}{2})$$

$$\Rightarrow L_1 : y + 4 = \frac{-\frac{3}{2} + 4}{0 - 5}(x - 5) \Rightarrow L_1 : x + 2y + 3 = 0$$

5. (1) 求過點 $P(0, 5)$ 且與圓 $C: x^2 + y^2 + 6x - 2y + 1 = 0$ 相切之直線方程式為？

(2) 承上題，若兩條切線分別與圓交於 A 、 B 兩點，則通過 A 、 B 、 P 點的圓方程式為 _____。



6. 設圓 $C: x^2 + y^2 + ax + by + 14 = 0$ ，與直線 $x - 2y + k = 0$ 相切於點 $A(5, 1)$ ，則序組 $(a, b, k) =$ _____。

5.【答】：(1) $y = \frac{7}{24}x + 5$ or $x = 0$ (2) $x^2 + y^2 + 3x - 6y + 5 = 0$

【解】：(1) 令過 $P(0, 5)$ 之直線 $L: y - 5 = mx \Rightarrow mx - y + 5 = 0$

圓 $C: x^2 + y^2 + 6x - 2y + 1 = 0 \Rightarrow (x + 3)^2 + (y - 1)^2 = 9$

$$d = r \Rightarrow \frac{|-3m - 1 + 5|}{\sqrt{m^2 + 1}} = 3 \Rightarrow 9m^2 - 24m + 16 = 9m^2 + 9 \Rightarrow m = \frac{7}{24}$$

另一斜率不存在 $\Rightarrow L: y = \frac{7}{24}x + 5$ or $x = 0$

(2) 承(1) 以 $(-3, 1), (0, 5)$ 為直徑

圓方程式: $(x + 3)(x - 0) + (y - 1)(y - 5) = 0 \Rightarrow x^2 + y^2 + 3x - 6y + 5 = 0$

6.【答】： $(-6, -10, -3)$

【解】：(5, 1) 代入 $L: x - 2y + k = 0 \Rightarrow k = -5 + 2 = -3$

$$C: (x + \frac{a}{2})^2 + (y + \frac{b}{2})^2 = -14 + \frac{a^2 + b^2}{4}$$

$$\begin{cases} 25 + 1 + 5a + b + 14 = 0 \\ \frac{1 - (-\frac{b}{2})}{5 - (-\frac{a}{2})} = -2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 5a + b = -40 \\ 2 + b = -20 - 2a \end{cases} \Rightarrow a = -6, b = -10$$

故 $(a, b, k) = (-6, -10, -3)$

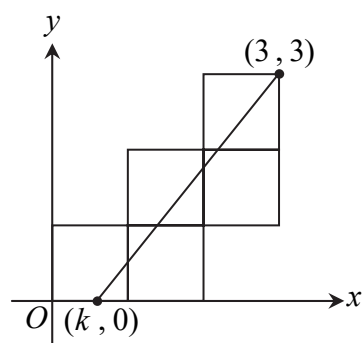
綜合練習

1. 坐標平面上，對於任意實數 k ，直線 $L: (2+3k)x + (1-2k)y + (6k-10) = 0$ 不可能經過下列各選項中的哪些點？

(1) $(1, 5)$ (2) $(2, 6)$ (3) $(3, 9)$ (4) $(-2, 0)$ (5) $(6, 12)$

2. 如右圖所示，5 個邊長為 1 的正方形排列在坐標平面上，最靠左下角的頂點在原點，一條過點 $(k, 0)$ 和 $(3, 3)$ 的直線將整個區域分成面積相等的兩部分，則此直線的斜率 m 為

_____。



3. 直角坐標系上三個點 $O(0, 0)$, $A(2, 7)$, $B(0, y)$, $y > 0$ 。

試求 $\frac{\overline{OB}}{\overline{AB}}$ 最大值 = _____。

1.【答】：(4)(5)

【解】： $L: L_1 + k L_2 = 0$ 表過 L_1, L_2 交點除了 L_2 外其他直線

$$L_1: 2x + y - 10 = 0, L_2: 3x - 2y + 6 = 0$$

$$\text{交點: } \begin{cases} 2x + y - 10 = 0 \\ 3x - 2y + 6 = 0 \end{cases} \Rightarrow (2, 6)$$

故 L 不可能經過在 $3x - 2y + 6 = 0$ 上, 除了 $(2, 6)$ 以外的點
代入檢驗得 (4)(5)

2.【答】： $\frac{9}{7}$

$$\text{【解】：} 1^\circ \frac{(k+3) \times 3}{2} - 3 = \frac{(3-k) \times 3}{2} - 1$$

$$\Rightarrow 3(k+3) = 3(3-k) + 4 \Rightarrow 6k = 4 \Rightarrow k = \frac{2}{3}$$

$$2^\circ m = \frac{3}{3 - \frac{2}{3}} = \frac{9}{7}$$

3.【答】： $\frac{\sqrt{53}}{2}$

$$\text{【解】：令 } \frac{\overline{OB}}{AB} = \frac{y}{\sqrt{2^2 + (y-7)^2}} = k, \text{ 其中 } y > 0, \text{ 故 } k > 0$$

$$\text{平方乘開得 } y^2 = k^2(y^2 - 14y + 53)$$

移項得 $(k^2 - 1)y^2 - 14k^2y + 53k^2 = 0$ 此式對 y 而言有實根

$$\therefore D = (14k^2)^2 - 4(k^2 - 1)(53k^2) \geq 0$$

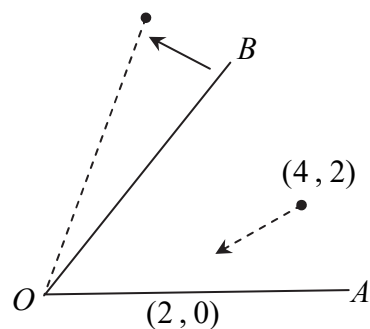
$$\Rightarrow 49k^4 - 53k^4 + 53k^2 \geq 0 \Rightarrow -4k^4 + 53k^2 \geq 0$$

$$\Rightarrow k^2(4k^2 - 53) \leq 0, \text{ 但 } k > 0 \therefore 0 < k \leq \frac{\sqrt{53}}{2}$$

4. $\triangle ABC$ 為等腰三角形，其底邊 $\overline{BC}$ 在直線 $x+2y=0$ 上，頂點 $A(-5,0)$ ，若一腰平行於直線 $x+7y+2=0$ ，則另一腰所在的直線方程式為_____。

5. 已知 $\triangle ABC$ 的垂心恰好為原點 $(0,0)$ ，且 $A(4,3), B(4,-5)$ ，試求 $\triangle ABC$ 的面積。

6. 如圖，在坐標平面上有一個可轉動的線段 OB ，其中 O 在原點。 OA 在 x 軸正向上，現有一質點置於 $(4,2)$ ，向 $(2,0)$ 方向射出，經過 OA 和 OB 的兩次反射後，若要再次經過 $(4,2)$ 此點，需調整 $\angle AOB$ 的角度，試求此時的 $\overrightarrow{OB}$ 的斜率 = _____。



4.【答】： $x+y+5=0$

【解】：1°由題意可知，過 A 點且與 $x+7y+2=0$ 平行的直線為 $x+7y+5=0$

$$\text{解} \begin{cases} x+7y+5=0 \\ x+2y=0 \end{cases} \text{得 } B(2, -1)$$

2°過 A 點且與 $\overleftrightarrow{BC}$ 垂直的直線為 $2x-y+10=0$

$$\text{解} \begin{cases} 2x-y+10=0 \\ x+2y=0 \end{cases} \text{得 } B, C \text{ 中點 } (-4, 2) \Rightarrow C(-10, 5)$$

故另一腰直線方程式 $\overleftrightarrow{AC}: x+y+5=0$

5.【答】：15

【解】：1°令垂心 $H(0, 0), C(x, y)$

$$\begin{cases} \overline{AH} \perp \overline{BC} \\ \overline{BH} \perp \overline{AC} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \frac{3}{4} \times \frac{y+5}{x-4} = -1 \\ -\frac{5}{4} \times \frac{y-3}{x-4} = -1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 4x+3y-1=0 \\ 4x-5y-1=0 \end{cases}$$

解得 $C(\frac{1}{4}, 0)$

$$2^\circ \Delta ABC \text{ 面積} = \frac{1}{2} \times 8 \times (4 - \frac{1}{4}) = 15$$

6.【答】：3

【解】：令 $O(0, 0), P(4, 2), Q(2, 0), \overleftrightarrow{OA}: y=0, \overleftrightarrow{OB}: y=-\frac{1}{m}x$

1°作 P 對 $y=0$ 的對稱點 $P'(4, -2)$

作 P 對 $y=-\frac{1}{m}x$ 的垂線： $y-2=m(x-4)$

$$2^\circ \begin{cases} y=mx-4m+2 \\ y=-x+2 \end{cases} \xrightarrow{\overleftrightarrow{P'Q}} \Rightarrow x=\frac{4m}{m+1}, y=\frac{-2m+2}{m+1}$$

3° $(\frac{4m}{m+1}, \frac{-2m+2}{m+1})$ 與 $(4, 2)$ 中點落在 $y=-\frac{1}{m}x$ 上

$$\Rightarrow \frac{2}{m+1} = -\frac{1}{m} \times \frac{4m+2}{m+1} \Rightarrow m = -\frac{1}{3}$$

故 $\overleftrightarrow{OB}: y=3x$ 可知 $\overleftrightarrow{OB}$ 斜率 = 3

7. 設 O 為原點，直線 L 與 x 軸交於 A 點，與 y 軸交於 B 點，若 L 過點 $P(25, 40)$ ，則下列何者正確？

- (1) $\triangle OAB$ 的面積可能為 1
- (2) $\triangle OAB$ 的面積可能為 1000
- (3) $\triangle OAB$ 的面積 1 時，此種直線 L 共有 2 條
- (4) $\triangle OAB$ 的面積 1000 時，此種直線 L 共有 4 條
- (5) $\triangle OAB$ 的面積 2000 時，此種直線 L 共有 3 條

8. 已知直線 $L_1: 12x - 5y = 0$ ，直線 L_2 經過 $(0, 10)$ 且分別與直線 L_1 、 x 軸相交於點 A 、點 $B(b, 0)$ ， $b > 0$ ， O 為原點，若 $\triangle OAB$ 之周長為 30，則 b 之值為

_____。

7.【答】：(1)(2)(3)(5)

【解】：直線通過 $P(25, 40) \Rightarrow$ 在第一象限與兩軸圍成三角形面積最小為 2000
在第二、第四象限與兩軸圍成三角形面積則無限制

(1)(3) 在第二、第四象限各有一個

(2)(4) 在第二、第四象限各有一個

(5) 在第一、第二、第四象限各有一個

8.【答】： $5\sqrt{5}$

【解】：過 C 作 $L_3 \parallel L_1$ 交 x 軸於 D

$$\overline{OC} = 10, \overline{OD} = \frac{25}{6}, \overline{CD} = \frac{65}{6}$$

$$\triangle CDB \sim \triangle AOB$$

$$\text{周長比為 } \frac{\overline{BD}}{\overline{BO}} = \frac{b + \frac{25}{6}}{b} = 1 + \frac{25}{6b}$$

$$\Rightarrow \frac{65}{6} + \frac{25}{6} + b + \sqrt{b^2 + 100} = 30 \times (1 + \frac{25}{6b})$$

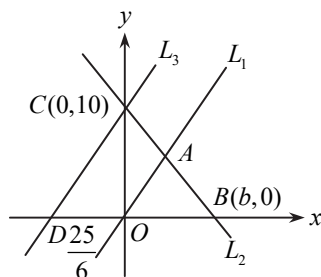
$$\Rightarrow \sqrt{b^2 + 100} = 15 + \frac{125}{b} - b$$

$$\Rightarrow b\sqrt{b^2 + 100} = 15b + 125 - b^2$$

$$\Rightarrow b^4 + 100b^2 = 225b^2 + 125^2 + b^4 - 30b^3 - 250b^2 + 30 \times 125b$$

$$\Rightarrow 30b^3 + 125b^2 - 30 \times 125b - 125^2 = 0$$

$$\Rightarrow (b^2 - 125)(30b + 125) = 0 \text{ 取 } b = 5\sqrt{5}$$



9. 在下列二元不等式中，何者之解集合的圖形與右圖相同？

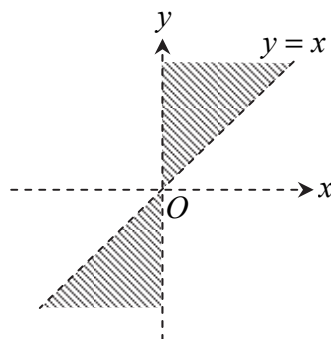
(1) $y > x$

(2) $\frac{y}{x} > 1$

(3) $\frac{x}{y} > 1$

(4) $y(x - y) > 0$

(5) $x(x - y) < 0$



10. 在坐標平面上，不等式 $(|x| + |y| - 3)(3|x| + |y| - 6) \leq 0$ 的圖形面積為

_____。

9.【答】：(2)(5)

【解】：圖形應為 $(x-y)x < 0$

$$\text{而 } \frac{y}{x} > 1 \Rightarrow \frac{y-x}{x} > 0 \Rightarrow (x-y)x < 0$$

選 (2)(5)

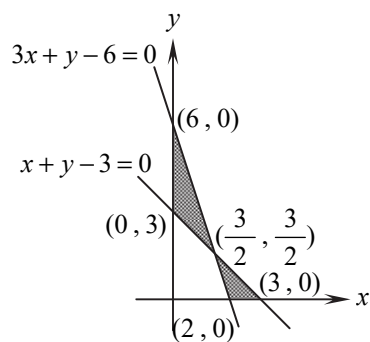
10.【答】：12

【解】：觀察知圖形對稱 x 軸與 y 軸，

故先求圖形在第一象限的面積再乘四倍

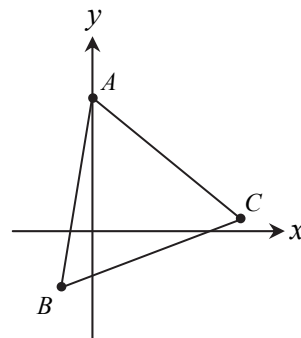
$$\Rightarrow \begin{cases} x \geq 0 \\ y \geq 0 \\ (x+y-3)(3x+y-6) \leq 0 \end{cases} \quad \text{繪圖如右}$$

$$\text{所求面積} = 4 \times \left(\frac{1}{2} \cdot 1 \cdot \frac{3}{2} + \frac{1}{2} \cdot 3 \cdot \frac{3}{2} \right) = 12$$



11. 聯立不等式 $\begin{cases} ax + y \geq d \\ x - by \leq e \\ cx - y \geq f \end{cases}$ 所圍成的區域如右圖的 $\triangle ABC$ 內部(含邊界)，則

- (1) $x + y$ 在 B 點有最小值
- (2) $a > 0$
- (3) $c - f > 0$
- (4) 若 $px - y$ 在 A 點有最小值，則 $\frac{1}{b} \leq p \leq c$
- (5) 若在 $\triangle ABC$ 內部(含邊界)有無限多組解，可以使得 $x + qy$ ($q < 0$) 有最大值，則 $q = b$



12. 坐標平面上， $A(3, 9)$ 、 $B(2, 1)$ ，若直線 AB 與圓 $x^2 + y^2 = 10$ 相交於 P 、 Q 二點，則 $\frac{\overline{AP}}{\overline{BP}} + \frac{\overline{AQ}}{\overline{BQ}}$ 之值為 _____。

11.【答】：(1)(3)(4)

【解】：由圖與不等式可知

$$\overrightarrow{AB}: cx - y = f, \overrightarrow{BC}: ax + y = d, \overrightarrow{AC}: x - by = e$$

(1) 正確， $x + y = k$ 為斜率 -1 ，截距 k 的直線，故在 B 點有最小值

(2) 錯誤， $\overrightarrow{BC}$ 斜率 $= -a > 0 \Rightarrow a < 0$

(3) 正確，由圖知 $(1, 0)$ 符合不等式 $cx - y > f \Rightarrow c - f > 0$

(4) 正確，令 $px - y = k \Rightarrow y = px - k$ 為斜率 p 且 y 軸截距 $-k$ 的直線

$$\text{在 } A \text{ 點有最小值} \Rightarrow m_{AC} \leq p \leq m_{AB} \Rightarrow \frac{1}{b} \leq p \leq c$$

(5) 錯誤，令 $x + qy = k$ 為斜率 $-\frac{1}{q} > 0$ 且 x 軸截距 k 的直線。

其最大值必發生在 $\overline{BC}$ 上，若無窮多解，則 $-\frac{1}{q} = -a$

12.【答】： $2\sqrt{17}$

【解】：1° 如圖，令 $\overline{AB} = \sqrt{65} = p, \overline{BP} = a, \overline{BQ} = b$

$$\frac{\overline{AD}}{\overline{BD}} + \frac{\overline{AQ}}{\overline{BQ}} = \frac{p-a}{a} + \frac{p+b}{b} = \frac{p}{a} + \frac{p}{b} = p\left(\frac{a+b}{ab}\right)$$

2° 由圓幂性質： $ab = \overline{BR} \times \overline{BS} = (\sqrt{10} - \sqrt{5})(\sqrt{10} + \sqrt{5}) = 5$

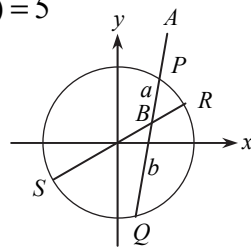
$a+b$ 即 $\overline{PQ}$

3° $\overrightarrow{AB}: 8x - y - 15 = 0$

$$\text{令 } d(O, \overrightarrow{AB}) = d = \frac{|-15|}{\sqrt{65}} = \frac{15}{\sqrt{65}}$$

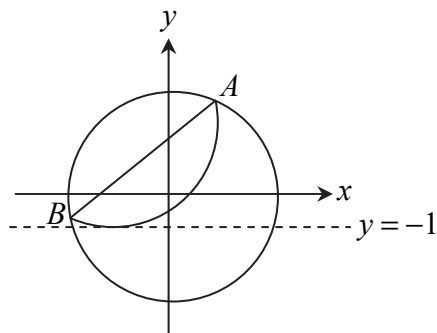
$$\frac{1}{2}\overline{PQ} = \sqrt{r^2 - d^2} = \sqrt{10 - \frac{225}{65}} = \sqrt{\frac{85}{13}} \Rightarrow \overline{PQ} = 2\sqrt{\frac{85}{13}}$$

$$\text{所求即 } p(a+b) \times \frac{1}{ab} = \sqrt{65} \times 2\sqrt{\frac{85}{13}} \times \frac{1}{5} = 2\sqrt{17}$$



13. 設 $\sqrt{-(x-2)^2+4} = mx+4$ 有兩相異實數解，則實數 m 之範圍為何？

14. 如圖，將圓 $x^2 + y^2 = 9$ 上的劣弧 AB 沿著弦 $\overline{AB}$ 對摺，此對摺後的弧與 $y = -1$ 相切於點 $P(-2, -1)$ ，若弧 APB 所在的圓方程式為 $(x-h)^2 + (y-k)^2 = a$ ，則數對 $(h, k, a) =$ _____。



15. 設點 P 在圓 $C: (x-3)^2 + (y-2)^2 = 1$ 上移動，原點 O 在線段 $\overline{PQ}$ 上，且 $\overline{OP} \cdot \overline{OQ} = 6$ ，試求點 Q 的軌跡方程式為何？

13.【答】： $-1 \leq m < -\frac{3}{4}$

【解】：1° $y = \sqrt{-(x-2)^2 + 4}$

⇒ 其圖形為 $y^2 + (x-2)^2 = 4$ 的上半圓

$y = mx + 4 \Rightarrow$ 恆過 $(0, 4)$ 的直線

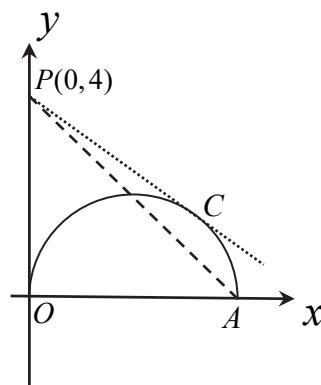
2° 過 $(0, 4)$ 與 $y^2 + (x-2)^2 = 4$ 相切：

令切線 $y - 4 = mx$ ，圓心 $(2, 0)$ ，半徑為 2

$$\Rightarrow \frac{|2m+4|}{\sqrt{1+m^2}} = 2 \Rightarrow m^2 + 1 = m^2 + 4m + 4$$

$$\Rightarrow m = -\frac{3}{4}$$

3° $m_{PA} = \frac{-4}{4} = -1$ 由以上可知 $-1 \leq m < -\frac{3}{4}$



14.【答】： $(-2, 2, 9)$

【解】：半徑為 3 $\Rightarrow k = 2$

又 $\because$ 切點為 $(-2, -1) \Rightarrow h = -2$

$\Rightarrow (h, k, a) = (-2, 2, 9)$

15.【答】： $x^2 + y^2 + 3x + 2y + 3 = 0$

【解】：令 $P(a, b), Q(x, y)$

1° O 在線段 $\overline{PQ}$ 上 $\Rightarrow \frac{y}{x} = \frac{b}{a}$ 且 a, x 異號， b, y 異號

2° $\overline{OP} \cdot \overline{OQ} = 6 \Rightarrow (x^2 + y^2)(a^2 + b^2) = 36$

由 1°, 2° 可解得 $a = \frac{-6x}{x^2 + y^2}, b = \frac{-6y}{x^2 + y^2}$

又 $P(a, b)$ 在圓 C 上 $\Rightarrow (\frac{-6x}{x^2 + y^2} - 3)^2 + (\frac{-6y}{x^2 + y^2} - 2)^2 = 1$

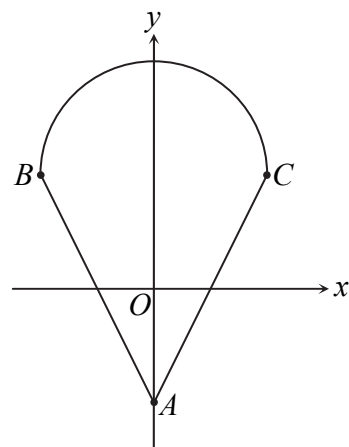
乘開整理得 $x^2 + y^2 + 3x + 2y + 3 = 0$

16. 線段 $\overline{AB}$, $\overline{AC}$ 及半圓弧 $\widehat{BC}$ 所圍成的區域為 T ，如圖。

已知 $A(0, -1)$, $B(-1, 1)$, $C(1, 1)$ ， $P(x, y)$ 為區域 T 內的點，試問：

(1) $\frac{y}{x+2}$ 的最小值為 _____

(2) $(x+3)^2 + (y+3)^2$ 的最大值為 _____



17. 設 O 為原點，直線 L 的方程式為 $2x - y = 0$ ，若 P 為圓 $C: (x-6)^2 + (y-2)^2 = 5$ 上之動點，則線段 $\overline{OP}$ 在 L 上投影長的最大值為 _____。

16.【答】：(1) $-\frac{1}{2}$ (2) 36

【解】：(1) $\frac{y}{x+2} = \frac{y-0}{x-(-2)}$

$\Rightarrow$ 過 $(-2, 0)$ 直線的斜率

由圖知當 $(x, y) = (0, -1)$ 時，

有最小值 $= -\frac{1}{2}$

(2) $(x+3)^2 + (y+3)^2$ 即 P 點與 $(-3, -3)$ 距離的平方

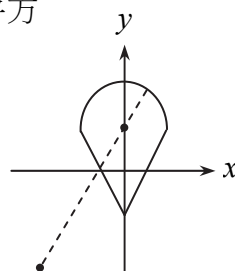
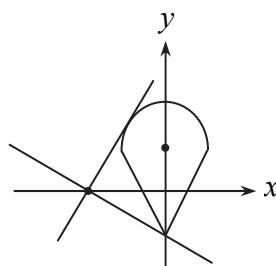
由圖可知，最大值應在圓弧上

$\Rightarrow$ 最遠距離

$= (-3, -3)$ 至圓心 $(0, 1)$ 的距離 + 半徑

$= \sqrt{3^2 + 4^2} + 1 = 6$

$\therefore$ 所求最大值為 $6^2 = 36$



17.【答】： $3\sqrt{5}$

【解】：投影長 $= \sqrt{OP^2 - (d(P, L))^2} = \sqrt{x^2 + y^2 - \left(\frac{|2x - y|}{\sqrt{5}}\right)^2}$

$= \sqrt{\frac{x^2 + 4xy + 4y^2}{5}} = \frac{|x + 2y|}{\sqrt{5}}$

即求 (x, y) 至 $x + 2y = 0$ 之最大距離

$= (\text{圓心至 } x + 2y = 0 \text{ 距離}) + \text{半徑} = \frac{|6 + 4|}{\sqrt{5}} + \sqrt{5} = 3\sqrt{5}$

18. 若點 $P(a, b)$ 為圓 $C: x^2 + y^2 - 4x - 2y - 4 = 0$ 上的動點，則使得 $\sqrt{6a - 8b + 30}$ 之值為整數的 P 點共有 _____ 個。

19. 圓 $C: x^2 + y^2 = r^2$ ($r > 0$) 上，若恰有兩點到直線 $L: 4x + 3y = 12$ 的距離為 1，則 r 的範圍為 _____。

18.【答】 :12

【解】 :圓 $C: x^2 + y^2 - 4x - 2y - 4 = 0 \Rightarrow (x-2)^2 + (y-1)^2 = 9$

$\Rightarrow$ 圓心 $O(2, 1)$, 半徑 $r = 3$

$P \in \text{圓 } C \Rightarrow a^2 + b^2 - 4a - 2b - 4 = 0 \Rightarrow 4a = a^2 + b^2 - 2b - 4$

$\sqrt{6a - 8b + 30} = \sqrt{a^2 + b^2 + 2a - 10b + 26} = \sqrt{(a+1)^2 + (b-5)^2}$

所求即圓上的點 P 到 $A(-1, 5)$ 的距離為整數

$\Rightarrow \overline{OA} - r \leq \overline{AP} \leq \overline{OA} + r \Rightarrow 2 \leq \overline{AP} \leq 8$

$\overline{AP} = 2$ 或 8 時各有一點, $\overline{AP} = 3, 4, 5, 6, 7$ 時各有兩點, 故共 12 點

19.【答】 : $\frac{7}{5} < r < \frac{17}{5}$

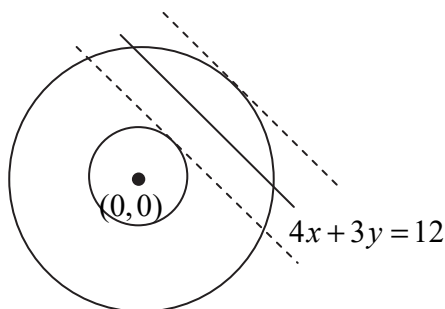
【解】 : 圓心 $(0, 0)$, $L: 4x + 3y = 12$

可知圓心到直線 L 的

距離 $= \frac{|12|}{\sqrt{4^2 + 3^2}} = \frac{12}{5}$

由圖可知 $\frac{12}{5} - 1 < r < \frac{12}{5} + 1$

$\Rightarrow \frac{7}{5} < r < \frac{17}{5}$



20. 已知平面上二點 $A(-4, 3)$ 、 $B(-4, -2)$ ， P 為圓 $C: x^2 + y^2 - 2x + 4y + 1 = 0$ 上的動點，試問下列哪些選項是正確的？

- (1) 讓 $\triangle ABP$ 的面積為 10 的 P 點有 2 個
- (2) 讓 $\triangle ABP$ 的面積為 18 的 P 點有 0 個
- (3) 讓 $\triangle ABP$ 為等腰三角形的 P 點有 2 個
- (4) 讓 $\triangle ABP$ 為直角三角形的 P 點有 4 個
- (5) 讓 $\triangle ABP$ 為正三角形的 P 點有 0 個

21. 已知 x, y 滿足 $y - 4 = \sqrt{4 - (x - 3)^2}$ ，若 $\frac{y-1}{x+1} = k$ ，則 k 的範圍為 _____。

20.【答】：(1)(2)(3)(5)

【解】：圓 $C: (x-1)^2 + (y+2)^2 = 4$ 且 $\overline{AB} = 5$

(1) 面積為 10 $\Rightarrow$ 高為 4, 直線 $x=0$ 與圓交兩點

(2) 面積為 18 $\Rightarrow$ 高為 $\frac{36}{5}$, 直線 $x = \frac{16}{5}$ 與圓無交點

(3) $1^\circ \overline{AB}$ 中垂線 $y = \frac{1}{2}$ 與圓無交點 $\Rightarrow \overline{PA} \neq \overline{PB}$

$2^\circ \overline{OB} - r \leq \overline{PB} \leq \overline{OB} + r \Rightarrow 3 \leq \overline{PB} \leq 7 \Rightarrow$ 圓上有兩點使 $\overline{PB} = \overline{AB} = 5$

$3^\circ \overline{OA} - r \leq \overline{PA} \leq \overline{OA} + r \Rightarrow 5\sqrt{2} - 2 \leq \overline{PA} \leq 5\sqrt{2} + 2 \Rightarrow \overline{PA} \neq \overline{AB} = 5$

(4) 1° 若 $\angle A$ 為直角 $\Rightarrow$ 過 A 與 $\overline{AB}$ 垂直的直線與圓 C 無交點

2° 若 $\angle B$ 為直角 $\Rightarrow$ 過 B 與 $\overline{AB}$ 垂直的直線與圓 C 交 2 點

3° 若 $\angle C$ 為直角 $\Rightarrow$ 作 $\overline{AB}$ 的直徑圓與圓 C 無交點

(5) 若 $\triangle ABP$ 為正三角形 $\Rightarrow P$ 落在 $\overline{AB}$ 中垂線上

但 $y = \frac{1}{2}$ 與圓無交點

21.【答】： $\frac{1}{2} \leq k \leq 1 + \frac{\sqrt{21}}{6}$

【解】：如圖，令 $A(-1, 1), B(5, 4)$ 且 $P(x, y) \in (x-3)^2 + (y-4)^2 = 4$ 之上半圓

$\Rightarrow$ 所求即 $m_{\overline{AP}}$ 的範圍

令過 A 點之切線斜率 m

$\Rightarrow$ 切線： $y-1 = m(x+1) \Rightarrow mx - y + m + 1 = 0$

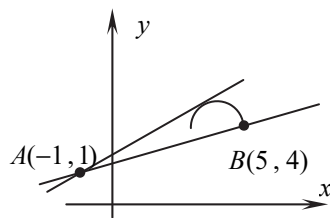
利用圓心到切線距離等於半徑

$$\Rightarrow \frac{|3m - 4 + m + 1|}{\sqrt{m^2 + 1}} = 2$$

$$\Rightarrow 16m^2 - 24m + 9 = 4m^2 + 4$$

$$\Rightarrow 12m^2 - 24m + 5 = 0 \Rightarrow m = 1 \pm \frac{\sqrt{21}}{6} \text{ (負不合)}$$

$$\text{又 } m_{\overline{AB}} = \frac{1}{2} \Rightarrow \text{由圖可知 } \frac{1}{2} \leq k \leq 1 + \frac{\sqrt{21}}{6}$$



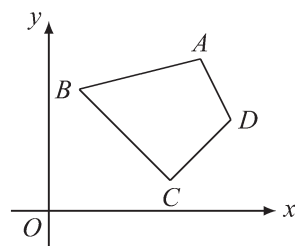
22. 已知點 $P(11, 5)$ 、直線 $L: x - 2y + 6 = 0$ 、圓 $C: x^2 + y^2 - 10x - 26y + F = 0$ ，其中 F 是實數。若直線 L 與圓 C 相交於 A, B 二點，且 $\angle APB = 90^\circ$ ，則 F 之值為 _____。

23. 由四條直線 $x - 4y + 15 = 0, x + y - 5 = 0, x - y - 3 = 0, 2x + y - 15 = 0$ ，所圍成四邊形區域 $ABCD$ 如右圖，則下列何者正確的？

(A) 直線 AB 之方程式為 $x - 4y + 15 = 0$

(B) 滿足四邊形區域(含邊界)的聯立不等式

$$\text{為} \begin{cases} x - 4y + 15 \leq 0 \\ x + y - 5 \geq 0 \\ x - y - 3 \leq 0 \\ 2x + y - 15 \geq 0 \end{cases}$$



(C) (x, y) 為 $ABCD$ 四邊形區域(含邊界)上的點，則 $\frac{y-1}{x-2}$ 的最大值為 $\frac{4}{3}$

(D) (x, y) 為 $ABCD$ 四邊形區域(含邊界)上的點，則 $x^2 + y^2$ 的最小值為 17

(E) 若 A 點為目標函數 $y - ax$ 在 $ABCD$ 四邊形區域(含邊界)上取得最大值之

唯一點，則 $-2 < a < \frac{1}{4}$

22.【答】 :136

【解】 : $C: x^2 + y^2 - 10x - 26y + F = 0$

$$\Rightarrow (x-5)^2 + (y-13)^2 = 194 - F$$

令圓心 $O(5, 13)$, O 對 L 作垂足得 H

$$m_{OH} \times m_L = -1 \Rightarrow m_{OH} = -2$$

$$\Rightarrow \overrightarrow{OH}: 2x + y - 23 = 0$$

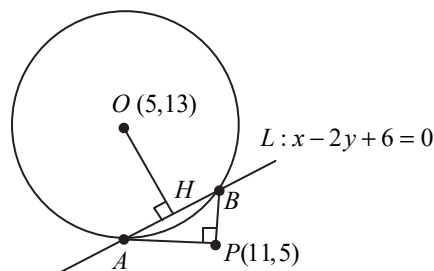
$$H \begin{cases} 2x + y - 23 = 0 \\ x - 2y + 6 = 0 \end{cases} \Rightarrow H(8, 7)$$

H 為 $\triangle PAB$ 之外心

$$\Rightarrow \overline{PH} = \sqrt{3^2 + (-2)^2} = \sqrt{13} = \overline{HA} = \overline{HB}$$

$$\overline{OA}^2 = r^2 = \overline{OH}^2 + \overline{HA}^2 = (3^2 + 6^2) + 13 = 58$$

$$\therefore 194 - F = 58 \Rightarrow F = 136$$



23.【答】 (A)(E)

【解】 (A) $\bigcirc$ 由斜率可知 $\overrightarrow{AB}: x - 4y + 15 = 0$

$$(B) \times \text{應為} \begin{cases} x - 4y + 15 \geq 0 \\ x + y - 5 \geq 0 \\ x - y - 3 \leq 0 \\ 2x + y - 15 \geq 0 \end{cases}$$

(C) $\times \frac{y-1}{x-2}$ 為 $(2, 1)$ 到 (x, y) 的斜率，由圖可知無最大值

(D) $\times x^2 + y^2$ 的最小值為 $d(O, \overline{BC})^2 = \frac{(-5)^2}{1^2 + 1^2} = \frac{25}{2}$

(E) $\bigcirc \overrightarrow{AD}: 2x + y - 15 = 0, m_{AD} = -2$

$$\overrightarrow{AB}: x - 4y + 15 = 0, m_{AB} = \frac{1}{4}$$

$$\Rightarrow y - ax \text{ 的斜率為 } a \Rightarrow -2 < a < \frac{1}{4}$$

