



多項式的運算與運用

主題

1

多項式加法、減法與乘法

【觀念一】單項式

- (1) 單項式：只有一項的式子，如： $x, 2x^2, \dots$ 等
- (2) 同款單項式可相加、減，如： $2x^2 + 5x^2 = 7x^2$
- (3) 單項式可相乘，如： $(2x^2) \times (3x^2) = 6x^4$
- (4) 單項式可相除：如： $\frac{6x^3}{3x} = 2x^2$



【觀念二】多項式

- (1) 由幾個單項式所組成的式子
- (2) 型如： $f(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \dots + a_1 x + a_0$ 且 $a_n \neq 0$
(其中 $n \in \mathbb{N}$ 或 $n = 0$)，稱為 x 的 n 次多項式
- (3) 以 $\deg f(x) = n$ 表示 $f(x)$ 的次數為 n
- (4) $f(x) \in \mathbb{R}[x]$ 表示**實係數** x 多項式 $\Rightarrow f(x) = 3x^2 + \sqrt{2}x + \frac{1}{3}$
- (5) $g(x) \in \mathbb{Q}[x]$ 表示**有理係數** x 多項式 $\Rightarrow g(x) = \frac{3}{4}x^2 + 7x - 0.3$

【觀念三】多項式不定元

- (1) x 不能在分母($\frac{1}{x+1}$ 稱**分式**或**有理式**)
- (2) x 不能在根號內($\sqrt{x+1}$ 稱**根式**或**無理式**)
- (3) x 不能在絕對值內
- (4) 不能**無限項**

【觀念四】二個多項式相等的條件

$$f(x) = a_n x^n + \cdots + a_1 x + a_0, \quad g(x) = b_n x^n + \cdots + b_1 x + b_0$$

條件 1 次數相等

條件 2 對應係數相等

性質 若 $f(x) = g(x)$ ，則 x 代入任何值，其個別所得的值必相等。

《說明》 $f(x) = 3x^2 - 12x + 11$

$$g(x) = a(x-1)(x-2) + b(x-2)(x-3) + c(x-3)(x-1)$$

已知 $f(x) = g(x)$ ，求 a, b, c ？

法 1 比較係數法

$$\begin{aligned} 3x^2 - 12x + 11 &= a(x-1)(x-2) + b(x-2)(x-3) + c(x-3)(x-1) \\ \Rightarrow 3x^2 - 12x + 11 &= (a+b+c)x^2 - (3a+5b+4c)x + (2a+6b+3c) \\ \therefore \begin{cases} a+b+c=3 \\ 3a+5b+4c=12 \\ 2a+6b+3c=11 \end{cases} &\Rightarrow \begin{cases} a=1 \\ b=1 \\ c=1 \end{cases} \end{aligned}$$

法 2 數值代入法

$$3x^2 - 12x + 11 = a(x-1)(x-2) + b(x-2)(x-3) + c(x-3)(x-1)$$

$$x=1 \text{ 代入得 } 2 = b(-1)(-2) \Rightarrow b=1$$

$$x=2 \text{ 代入得 } -1 = c(-1)(1) \Rightarrow c=1$$

$$x=3 \text{ 代入得 } 2 = a(2)(1) \Rightarrow a=1$$

【觀念五】二多項式的加法與減法如何運算

$\Rightarrow$ 將二多項式同次項的係數相加(相減)

《說明》 $f(x) = 2x^3 + 5x + 7$ ， $g(x) = x^2 + 6x - 1$ ，計算 $f(x) + g(x)$ ？

法 1 橫式算法

$$\begin{aligned} f(x) + g(x) &= (2x^3 + 5x + 7) + (x^2 + 6x - 1) \\ &= 2x^3 + x^2 + 11x + 6 \end{aligned}$$

法 2 直式算法

$$\begin{array}{r}
 2x^3 + 0x^2 + 5x + 7 \leftarrow f(x) \\
 +) \quad \quad x^2 + 6x - 1 \leftarrow g(x) \\
 \hline
 2x^3 + x^2 + 11x + 6
 \end{array}$$

法 3 分離係數直式算法

$$\begin{array}{r}
 2 + 0 + 5 + 7 \leftarrow f(x) \\
 +) \quad 1 + 6 - 1 \leftarrow g(x) \\
 \hline
 2 + 1 + 11 + 6
 \end{array}$$

【觀念六】二多項式的乘法如何運算

(1) 二個單項式的乘法是「係數相乘、次數相加」

《說明》 $(3x^2)(5x^3) =$

(2) 二個多項式的乘法是利用分配律展開成單項式相乘，
然後合併同次項。

《說明》 $f(x) = x^2 - 2x + 3$ ， $g(x) = x^3 + x - 1$ ，計算 $f(x) \cdot g(x)$

法 1 橫式算法

$$\begin{aligned}
 f(x) \cdot g(x) &= (x^2 - 2x + 3)(x^3 + x - 1) \\
 &= x^2(x^3 + x - 1) - 2x(x^3 + x - 1) + 3(x^3 + x - 1) \\
 &= x^5 + x^3 - x^2 - 2x^4 - 2x^2 + 2x + 3x^3 + 3x - 3 \\
 &= x^5 - 2x^4 + 4x^3 - 3x^2 + 5x - 3
 \end{aligned}$$

法 2 直式算法

$$\begin{array}{r}
 x^2 - 2x + 3 \\
 \times) \quad x^3 + 0x^2 + x - 1 \\
 \hline
 x^5 - 2x^4 + 3x^3 \\
 \quad x^3 - 2x^2 + 3x \\
 \quad - x^2 + 2x - 3 \\
 \hline
 x^5 - 2x^4 + 4x^3 - 3x^2 + 5x - 3
 \end{array}$$

法 3 分離係數直式算法

$$\begin{array}{r}
 1-2+3 \\
 \times) 1+0+1-1 \\
 \hline
 1-2+3 \\
 1-2+3 \\
 -1+2-3 \\
 \hline
 1-2+4-3+5-3
 \end{array}$$

(二個最高次項對齊)

$$\begin{array}{r}
 1 \quad -2 \quad 3 \\
 \times) 1 \quad 0 \quad 1 \quad -1 \\
 \hline
 -1 \quad 2 \quad -3 \\
 1 \quad -2 \quad 3 \\
 \hline
 1 \quad -2 \quad 3 \\
 1 \quad -2 \quad 4 \quad -3 \quad 5 \quad -3
 \end{array}$$

(二個最低次項對齊)

【觀念七】多項式加法、減法、乘法性質

- (1) $f(x)+g(x)=g(x)+f(x) \Rightarrow$ 加法交換律
- (2) $f(x) \cdot g(x)=g(x) \cdot f(x) \Rightarrow$ 乘法交換律
- (3) $f(x)+[g(x)+h(x)]=[f(x)+g(x)]+h(x) \Rightarrow$ 加法結合律
- (4) $f(x) \cdot [g(x) \cdot h(x)]=[f(x) \cdot g(x)] \cdot h(x) \Rightarrow$ 乘法結合律
- (5) $f(x)[g(x)+h(x)]=f(x)g(x)+f(x)h(x) \Rightarrow$ 分配律

例 1. (能力指標：係數問題)

XHBR



$$f(x) = x^{10} + 2x^9 + 3x^8 + \cdots + 10x + 11,$$

$$g(x) = 11x^{10} + 10x^9 + 9x^8 + \cdots + 2x + 1$$

試求 $f(x) \cdot g(x)$ 展開式中 (1) x^{10} 係數 (2) x^9 係數 (3) x^8 係數

$$\textcircled{\circ} \text{ 平方和公式： } 1^2 + 2^2 + 3^2 + \cdots + n^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$$

解： $f(x) \cdot g(x) = (x^{10} + 2x^9 + 3x^8 + \cdots + 10x + 11)(11x^{10} + 10x^9 + 9x^8 + \cdots + 2x + 1)$

(1) x^{10} 係數 =

(2) x^9 係數 =

=

(3) x^8 係數 =

=

例 2. (能力指標：係數應用)

$(1+2x+3x^2+4x^3+5x^4+\cdots+10x^9)^4$ 展開式中，求 x^4 係數？

解：本題只求到 x^4 ，所以原多項式中 x^5 ， x^6 以上的項皆可省略
只考慮 $(1+2x+3x^2+4x^3+5x^4)^4$

(1) (2)

$$\begin{array}{r} \\ \times) \\ \hline \end{array}$$

例 3. (能力指標：連乘係數)

$$(x+1)(x+2)\cdots(x+10) = a_{10}x^{10} + a_9x^9 + \cdots + a_1x + a_0,$$

求 (1) a_{10} (2) a_0 (3) a_9 (4) a_8 。

解：首先先尋找連乘積展開的規則

$$(x+a)(x+b) = x^2 + (a+b)x + (ab)$$

$$(x+a)(x+b)(x+c) = x^3 + (a+b+c)x^2 + (ab+bc+ca)x + (abc)$$

$$(x+a)(x+b)(x+c)(x+d) = \underline{\hspace{1cm}} x^4 + \underline{\hspace{1cm}} x^3 + \underline{\hspace{1cm}} x^2 \\ + \underline{\hspace{1cm}} x + \underline{\hspace{1cm}}$$

(1) $a_{10} =$

(2) $a_0 =$

(3) $a_9 =$

(4) $a_8 =$



例 4. (能力指標：次數運算)

$\deg f(x) = 4$, $\deg g(x) = 3$, 求下列各題之次數？

(1) $\deg [f(x) + g(x)] = 4$

(2) $\deg [f(x) - g(x)] = 4$

(3) $\deg [f(x) \cdot g(x)] = 7$

(4) $\deg [f(g(x))] = 12$

LGQL



例 5. (能力指標：多項式相等)

設 $\deg f(x) = 2$, 已知 $(1 - 4x)\{f(x) + x(f(x))^2\} = 1 + x^3 g(x)$,

求 $f(x) = ?$

MIKQ



解： 1° 令 $f(x) = ax^2 + bx + c$

$$\Rightarrow (1 - 4x)\{(ax^2 + bx + c) + x(ax^2 + bx + c)^2\} = 1 + x^3 g(x)$$

2° 兩邊比較 x^0 , x^1 , x^2 的係數

$$\Rightarrow \begin{cases} x^0 : c = 1 \\ x^1 : -4c + b + c^2 = 0 \\ x^2 : -4b + a - 4c^2 + 2bc = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a = 10 \\ b = 3 \\ c = 1 \end{cases}$$

$$\text{故 } f(x) = 10x^2 + 3x + 1$$



回家作業



1. $f(x) = a(x-1)(x-2) + b(x-2)(x-3) + c(x-1)(x-3)$, $g(x) = x^2 + 3$

已知 $f(x) = g(x)$ ，求 a, b, c 之值。



2. 設 $(x-1)(2x-1)(3x-1)(4x-1)\dots(10x-1) = a_{10}x^{10} + a_9x^9 + a_8x^8 + \dots + a_1x + a_0$ ，

求 a_1 與 a_{10} 。

3. 設 $(x-1)(x-2)(x-3)\dots(x-9)(x-10) = a_{10}x^{10} + a_9x^9 + \dots + a_1x + a_0$ ，求 a_9 及 a_{10} 。

4. 設 $24x^3 = (3x+1)(ax^2+bx+c)+d$ ，求常數 a, b, c, d 之值。



1. $a=6, b=2, c=-7$ 2. $-55, 3628800$ 3. $a_9 = -55, a_{10} = 1$

4. $(a, b, c, d) = (8, -\frac{8}{3}, \frac{8}{9}, -\frac{8}{9})$



回家作業



5. (96 數乙試題)

設 r, s 為整數，已知整係數多項式 $x^3 + rx + s$ 的因式分解是

$x^3 + rx + s = (x + a)^2(x + b)$ ，其中 a, b 為相異實數，求證 a, b 都是有理數。

6. (100 學測試題)

多項式 $4(x^2 + 1) + (x + 1)^2(x - 3) + (x - 1)^3$ 等於下列哪一個選項？

- (1) $x(x + 1)^2$ (2) $2x(x - 1)^2$ (3) $x(x - 1)(x + 1)$
(4) $2x(x - 1)^2(x + 1)$ (5) $2x(x - 1)(x + 1)$



5. 見詳解 6. (5)

主題 1 多項式的基本概念

KLAZ



1. 多項式的定義

(1) 定義：

設 n 是正整數或 0，若 $a_0, a_1, a_2, \dots, a_n$ 是給定的常數，則形如

$$a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + a_{n-2} x^{n-2} + \dots + a_2 x^2 + a_1 x + a_0$$

的式子，稱之為 x 的多項式。我們常以 $f(x), g(x), h(x), \dots$ 來表示 x 的多項式。

(2) 單項式：

當多項式只含一項時，即 $f(x) = a_n x^n$ ，其中 n 是正整數或 0，稱 $f(x)$ 為單項式。

其中定義 $x^0 = 1$ 。

2. 多項式的相關名詞

(1) 多項式的係數：

若多項式 $f(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \dots + a_1 x + a_0$ ，則 $a_n, a_{n-1}, \dots, a_0$ 稱為多項式 $f(x)$ 的係數，最高次項非零係數稱為**領導係數**或**首項係數**。

(2) 多項式的次數：

若多項式 $f(x)$ 的最高次項之次數為 n ，記為 。

(3) 多項式的同類項：

兩多項式中，次數相同的項稱為**同類項**或**同次項**。

(4) 排列方式：

① 若 $f(x)$ 以 $a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \dots + a_1 x + a_0$ 方式表達，則稱為 x 的**降冪排列**。

② 若 $f(x)$ 以 $a_0 + a_1 x + \dots + a_{n-1} x^{n-1} + a_n x^n$ 方式表達，則稱為 x 的**升冪排列**。

主題 2 多項式除法

ULBJ



【觀念一】多項式除法表現定理

設 $f(x)$, $g(x)$ 為二個多項式且 $g(x) \neq 0$ ，則恰有二多項式 $Q(x)$ 及 $r(x)$ 滿足 $f(x) = g(x)Q(x) + r(x)$ 其中可能 $r(x) = 0$ 或 $\deg r(x) < \deg g(x)$ ， $f(x)$ 稱 _____， $g(x)$ 稱 _____， $Q(x)$ 稱 _____， $r(x)$ 稱 _____。

【觀念二】多項式除法運算方法

$f(x) = x^3 + 2x^2 - 3x + 2$, $g(x) = x - 2$ ，計算 $f(x) \div g(x)$ ，求商式、餘式？

法 1 長除法

$$\begin{array}{r}
 x^2 + 4x + 5 \\
 x-2 \overline{) x^3 + 2x^2 - 3x + 2} \\
 \underline{x^3 - 2x^2} \\
 4x^2 - 3x + 2 \\
 \underline{4x^2 - 8x} \\
 5x + 2 \\
 \underline{5x - 10} \\
 12
 \end{array}$$

商式 = $x^2 + 4x + 5$
餘式 = 12

法 2 分離係數長除法

$$\begin{array}{r}
 1 \quad 4 \quad 5 \\
 1-2 \overline{) 1+2-3+2} \\
 \underline{1-2} \\
 4-3 \quad 2 \\
 \underline{4-8} \\
 5+2 \\
 \underline{5-10} \\
 12
 \end{array}$$

商式 = $x^2 + 4x + 5$
餘式 = 12

法 3 綜合除法(除式領導係數為1的綜合除法)

$$\begin{array}{cccc} 1 & 2 & -3 & 2 \end{array} \quad \begin{array}{l} \text{商式} = x^2 + 4x + 5 \\ \text{餘式} = 12 \end{array}$$

【觀念三】 除式領導係數不為 1 的綜合除法如何運算

《說明》 $f(x) = 3x^3 + 16x^2 - 13x + 8$, $g(x) = 3x + 1$, 求 $f(x) \div g(x)$ 之商式與餘式？

$g(x) = 3x + 1 = 3(x + \frac{1}{3})$, 先行運算除式為 $x + \frac{1}{3}$

$$\begin{array}{r|rrrr} 3 & 16 & -13 & 8 & \\ & -1 & -5 & 6 & -\frac{1}{3} \\ \hline 3 & 15 & -18 & 14 & \end{array}$$

$$\begin{aligned} \text{由以上知 } 3x^3 + 16x^2 - 13x + 8 &= (x + \frac{1}{3})(3x^2 + 15x - 18) + 14 \\ &= \end{aligned}$$

【觀念四】 除式為二次且領導係數為 1 之綜合除法

《說明》 $g(x) = x^2 + 3x - 2$ 除 $f(x) = 2x^6 + 5x^5 - 10x^4 - 3x^3 + 11x^2 - 20x + 7$, 求商、餘？

$$\begin{array}{r|rrrrrrr} 2 & 5 & -10 & -3 & 11 & -20 & 7 & \\ & & & & & & & -3 \\ \hline & & & & & & & 2 \end{array}$$

$$f(x) = (x^2 + 3x - 2)(2x^4 - x^3 - 3x^2 + 4x - 7) + 9x - 7$$

【觀念五】 除式為二次且領導係數不為 1 之綜合除法

《說明》 $g(x) = 3x^2 + 2x - 1$ 除 $f(x) = 3x^5 + 8x^4 + 6x^3 - 6x^2 - 4x + 5$ ，求商、餘？

$$g(x) = 3x^2 + 2x - 1 = 3\left(x^2 + \frac{2}{3}x - \frac{1}{3}\right), \text{ 先行運算除式為 } x^2 + \frac{2}{3}x - \frac{1}{3}$$

3	8	6	-6	-4	5		
	-2	-4	-2	4			$-\frac{2}{3}$
		1	2	1	-2		$\frac{1}{3}$
3	3	6	3	-6	1	3	
	1	2	1	-2			

$$\therefore f(x) = (3x^2 + 2x - 1)(x^3 + 2x^2 + x - 2) + x + 3$$

例 1. (能力指標：餘式推算)

$$f(x) = (3x^2 - 2x)(3x + 5)^4 - (2x + 1)^4(3x + 5)^3 + 5x(3x + 5)^2 + 2x^2 - x + 2,$$

則 $f(x)$ 除以 $(3x + 5)^2$ 的餘式為何？

解：



例 2. (能力指標：餘式推算)

$f(x)$ 除以 $(x^4 + x^2 + 1)$ 的商為 $(4x^7 + 5)$ ，餘式為 $(2x^3 - x + 5)$ ，
試求 $f(x)$ 除以 $(x^2 + x + 1)$ 之餘式？

解：

HPIG



例 3. (能力指標：綜合除法應用)

$3x^3 + mx^2 - 61x + n$ 可被 $x^2 - 5x + 3$ 整除，求 m, n ？

解：利用除式二次綜合除法

3	m	-61	n	
				5
				-3

TFSL



例 4. (能力指標：餘式求多項式)

$\deg f(x) = 3$ ， $f(x)$ 除以 $(x^2 - 1)$ 餘 $x + 1$ ， $f(x)$ 除以 $(x^2 + 1)$ 餘 $-x - 1$ ，求 $f(x)$ ？



解：本題給予二組除式與餘式

$$f(x) = (x^2 - 1)(ax + b) + x + 1$$

$$f(x) = (x^2 + 1)(ax + c) - x - 1$$

可以利用多項式相同，比較係數

$$\begin{cases} x^0 \Rightarrow \\ x^1 \Rightarrow \\ x^2 \Rightarrow \end{cases}$$

例 5. (能力指標：餘式與商式)

CZXF



已知 $f(x) = (ax - b)q(x) + r$ ，求下列各題商式與餘式？

(1) $f(bx)$ 除以 $x - \frac{1}{a}$ ，求商式、餘式

解： $f(x) = (ax - b)q(x) + r$

$$\therefore f(bx) =$$

(2) $f(\frac{x}{a})$ 除以 $x - b$ ，求商式、餘式

解： $f(x) = (ax - b)q(x) + r$

$$\therefore f(\frac{x}{a}) =$$

(3) $xf(x)$ 除以 $ax - b$ ，求商式、餘式

解： $f(x) = (ax - b)q(x) + r$

$$\begin{aligned}\therefore xf(x) &= (ax - b) \cdot x \cdot q(x) + r \cdot x \\ &= (ax - b) \cdot x \cdot q(x) +\end{aligned}$$

$$\begin{array}{r} \frac{r}{a} \\ a-b \overline{) \quad r \quad 0} \\ \underline{r \quad -br} \quad \\ \quad \quad \quad a \\ \hline \quad \quad \quad br \\ \quad \quad \quad \underline{a} \end{array}$$

例 6. (能力指標：商式與餘式)

$f(x)$ 為多項式，若 $(x+1)f(x)$ 除以 x^2+x+1 的餘式為 $5x+3$ ，則

$f(x)$ 除以 x^2+x+1 餘式為何？

解：





回家作業



1. 若 $x^4 + ax^2 + 1$ 被 $x^2 + ax + 1$ 整除，求常數 a 。



2. 若以 $x^2 - 2x + 1$ 除 $x^3 + ax^2 + bx + 4$ 的餘式為 $x - 1$ ；則 $a = \underline{\hspace{2cm}}$ ，
 $b = \underline{\hspace{2cm}}$ 。

3. 設 $f(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d$ ，其中 a, b, c, d 皆為常數，若以 $x^2 + x + 2$ 除之，餘 $x + 2$ ；以 $x^2 + x - 2$ 除之，餘 $3x + 4$ ，則 a, b, c, d 各為多少？



1. 1 或 -2 2. $a = 3, b = -8$ 3. $(a, b, c, d) = (\frac{1}{2}, 1, \frac{5}{2}, 3)$



回家作業



4. 設多項式 $f(x)$ 除以 $x^3 - 1$ 的餘式為 $x^2 - 1$ ，求 $f(x)$ 除以 $x^2 + x + 1$ 的餘式。

5. 已知多項式 $f(x)$ 除以 $x^2 - x + 3$ 的餘式為 $x - 2$ ，且 $g(x)$ 除以 $x^2 - x + 3$ 的餘式為 $2x + 3$ ，求 $f(x)g(x)$ 除以 $x^2 - x + 3$ 的餘式。



4. $-x - 2$ 5. $x - 12$



回家作業



6. 小立利用綜合除法計算多項式 $f(x)$ 除以 $2x+3$ 的商式 $q(x)$ 及餘式 $r(x)$ 。他的過程完全正確(過程如右)，但紙張不慎汙損，請幫他判斷下列選項何者正確？

$$\begin{array}{r|rrrr} 2 & +p & +6 & +q & \\ & a & +b & +c & h \\ \hline & d & +e & -6 & +5 \end{array}$$

- (A) $d+h=\frac{7}{2}$ (B) $p=e+3$ (C) $f(x)=2x^3+11x^2+6x-4$
 (D) $q(x)=2x^2+8x-6$ (E) $r(x)=5$

7. 若多項式 $f(x)$ 除以 $3x-2$ 所得之商為 $q(x)$ ，餘式為 r ，則 $x \cdot f(x)$ 除以 $x-\frac{2}{3}$ 之商式為 _____，餘式為 _____。

簡答

6. (B)(C)(E) 7. 商式為 $3xq(x)+r$ ，餘式為 $\frac{2}{3}r$



回家作業



8. (94 學測試題)

若多項式 $x^2 + x + 2$ 能整除 $x^5 + x^4 + x^3 + px^2 + 2x + q$ ，則

$p = \underline{\hspace{2cm}}$ ， $q = \underline{\hspace{2cm}}$ 。



8. $p = 3, q = 8$

主題 3 多項式係數運算

ITVC



【觀念】 $f(x) = a_0 + a_1x + a_2x^2 + \cdots + a_nx^n$

$$f(1) = a_0 + a_1 + a_2 + \cdots + a_n$$

$$f(-1) = a_0 - a_1 + a_2 - a_3 + \cdots + (-1)^n a_n \quad (\text{所有係數交錯})$$

$$(1) \text{ 常數項} = a_0 =$$

$$(2) \text{ 所有係數和} = a_0 + a_1 + \cdots + a_n =$$

$$(3) \text{ 所有偶次係數和} = a_0 + a_2 + a_4 + \cdots + a_{2k} =$$

$$(4) \text{ 所有奇次係數和} = a_1 + a_3 + a_5 + \cdots + a_{2k+1} =$$

例 1. (能力指標：係數運算)

YXJD



$$f(x) = x^3 - 2x^2 + x + 1, \quad g(x) = x^4 - 5x^3 + 3x^2 - x + 1$$

$$(1) f(x^2 + 1) + g(x^2 + x - 1) \text{ 常數項} = f(1) + g(-1) = 1 + 11 = 12$$

(方法： $x = 0$ 代入)

$$(2) f^2(x-1) + g^3(x^2-1) \text{ 所有係數和} = f^2(0) + g^3(0) = 1 + 1 = 2$$

(方法： $x = 1$ 代入)

$$(3) f(x-1) + g(x^2+1) \text{ 所有偶次項係數和} = \frac{[f(0) + g(2)] + [f(-2) + g(2)]}{2}$$

$$= \frac{1 + (-13) + (-17) + (-13)}{2}$$

$$= -21$$

$$(4) f(x)g(x) \text{ 所有奇次項係數和} = \frac{f(1)g(1) - f(-1)g(-1)}{2}$$

$$= \frac{(1)(-1) - (-3)(11)}{2} = 16$$



回家作業



1. 設 $f(x) = (x-2)^8$, $g(x) = (x^2 - x + 1)^{10}$, 試求：

- (1) $f(x) \cdot g(x)$ 乘積中各項係數和。
- (2) $f(x) \cdot g(x)$ 乘積中偶次項係數和。



2. 設 k 為實數，已知兩多項式 $f(x) = x^4 - 2x^3 + kx^2 - x + 3$, $g(x) = x^3 + kx^2 + 3x + 2$ ，若 $f(x)$ 與 $g(x)$ 的乘積之展開式中偶次項係數和等於奇次項係數和，求 k 之值。

3. 已知 $f(x)$ 為多項式且滿足 $2f(x^2) - (2x+1)f(2x-1) = x^2 - 3x + 6$ ，求 $f(x)$ 之係數和。

簡答

1. (1) 1 (2) $\frac{1}{2}(3^{18} + 1)$ 2. -7 或 2 3. -4

(2) 差分理論：

$$\deg f(x) = n \Leftrightarrow \deg[f(x+p) - f(x+q)] = n-1 \quad (p \neq q)$$

【說明】

舉例來說，若 $f(x) = ax^2 + bx + c$

$$\text{則 } f(x+1) = a(x+1)^2 + b(x+1) + c = ax^2 + (2a+b)x + (a+b+c)$$

$$\text{故 } f(x+1) - f(x) = \underbrace{(\cancel{a} - a)}_{\text{消去最高項}} x^2 + \underbrace{(2a + \cancel{b} - b)}_{\text{保留次高項}} x + c$$

【說例】

$f(x)$ 為多項式且 $f(x+2) - f(x) = 4x^2 + 5$ ，則 $f(x)$ 的次數必為_____次。

3. 多項式的係數

多項式 $f(x) = a_0 + a_1x + a_2x^2 + \cdots + a_nx^n$ 有以下係數公式：

(1) 常數項：

$$a_0 = \boxed{} \circ [x=0 \text{ 代入}]$$

(2) 係數和：

$$a_0 + a_1 + a_2 + \cdots + a_n = \boxed{} \circ [x=1 \text{ 代入}]$$

(3) 係數加減交錯：

$$a_0 - a_1 + a_2 - a_3 + \cdots + a_n(-1)^n = \boxed{} \circ [x=-1 \text{ 代入}]$$

(4) 偶項係數和：

$$a_0 + a_2 + a_4 + \cdots + a_{2k} = \boxed{} \circ \left[\frac{(x=1 \text{ 代入}) + (x=-1 \text{ 代入})}{2} \right]$$

($2k$ 是不大於 n 的最大偶數)

(5) 奇項係數和：

$$a_1 + a_3 + a_5 + \cdots + a_{2t+1} = \boxed{} \left[\frac{(x=1 \text{ 代入}) - (x=-1 \text{ 代入})}{2} \right]$$

($2t+1$ 是不大於 n 的最大奇數)

【說明】

$$f(1) = a_0 + a_1 + a_2 + a_3 + a_4 + \cdots + a_{n-1} + a_n$$

$$f(-1) = a_0 - a_1 + a_2 - a_3 + a_4 - \cdots + (-1)^{n-1} a_{n-1} + (-1)^n a_n$$

$$\Rightarrow \begin{cases} \frac{f(1) + f(-1)}{2} = a_0 + a_2 + a_4 + \cdots + a_{2k} \\ \frac{f(1) - f(-1)}{2} = a_1 + a_3 + a_5 + \cdots + a_{2t+1} \end{cases} \quad (2k \text{ 是偶數, } 2t+1 \text{ 是奇數})$$

$2k$ 與 $2t+1$ 兩者之中最大者為 n ，最小者為 $n-1$ 。

例 1

已知 $f(x)$ 為多項式且 $f(x+1)-f(x)=2x+5$ ，又 $f(0)=3$ ，求 $f(x)$ 。

解

例 2

已知二多項式 $f(x)=x^2+x+2$ ， $g(x)=3x^2-5x+1$ ，試回答下列問題：

- (1) 求 $f(x+1)$ 的常數項。
- (2) 求 $f(x-1)g(x+1)$ 之所有係數和。

解

(1) $f(x+1)$ 的常數項 = [$x=0$ 代入]

(2) $f(x-1)g(x+1)$ 的所有係數和 = [$x=1$ 代入]

主題 7 多項式恆等定理

1. 多項式的恆等

(1) 多項式相等：

- ① 兩多項式 $f(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \cdots + a_1 x + a_0$, $g(x) = b_m x^m + b_{m-1} x^{m-1} + \cdots + b_1 x + b_0$ 相等的充要條件為次數相等及對應係數相等。
- ② 若多項式 $f(x) = g(x)$ ，則對任何數值 α 而言， $f(\alpha) = g(\alpha)$ 恆成立。

(2) 多項式恆等定理：

設 $f(x), g(x)$ 均為次數不大於 n 的多項式，即 $\deg f(x) \leq n, \deg g(x) \leq n$ ，若有 $n+1$ 個相異數 $\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_{n+1}$ 均使得 $f(\alpha_i) = g(\alpha_i)$ ，則 $f(x), g(x)$ 為同義多項式。可表為 $f(x) \equiv g(x)$ 。

【說明】

要確定 $f(x) = ax + b$ 是否等於 $g(x) = px + q$ ，至少需要兩組函數值，比方說， $f(1) = g(1) = 5, f(3) = g(3) = 7$ ，則 $f(x)$ 與 $g(x)$ 必為相同多項式。幾何上來說，即兩個相異點決定唯一直線。

同理，要確定 $f(x) = ax^2 + bx + c$ 是否等於 $g(x) = px^2 + qx + r$ ，至少需要三組函數值，比方說， $f(1) = g(1), f(-2) = g(-2), f(4) = g(4)$ ，則 $f(x)$ 與 $g(x)$ 必為相同多項式。

【說例 1】

若多項式 $f(x), g(x)$ 均不大於 2 次，且 $f(1) = g(1), f(-2) = g(-2), f(4) = g(4)$ ，則 $f(x), g(x)$ 為同義多項式。

【說例 2】

若多項式 $f(x)$ 不大於 2 次，且 $f(1) = f(3) = f(5) = 7$ ，則 $f(x) \equiv 7$ 。

【說例 3】

設 $f(x) = ax^2 + bx + c$ ，若 $f(1) = f(\sqrt{2}) = f(\pi) = 0$ ，則 $f(x) \equiv 0$ 。

2. 零多項式定理 [大學代數學課程 自行參考]

(1) 零多項式定理：

設 $f(x)$ 為不大於 n 次的多項式，若 $f(\alpha_1) = f(\alpha_2) = \cdots = f(\alpha_{n+1}) = 0$ ，且 $\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_{n+1}$ 兩兩互異，則 $f(x)$ 必為零多項式。

【說明】

設 $f(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + a_{n-2} x^{n-2} + \cdots + a_1 x + a_0$ 為一個多項式，若有 $n+1$ 個相異的 x 值，代入 $f(x)$ 均使 $f(x) = 0$ ，則 $f(x) \equiv 0$ 。

【證明】

1° $\because f(\alpha_1) = f(\alpha_2) = f(\alpha_3) = \cdots = f(\alpha_n) = 0$ ，其中 $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \cdots, \alpha_n$ 互異

可令 $f(x) = A(x - \alpha_1)(x - \alpha_2) \cdots (x - \alpha_{n-1})(x - \alpha_n)$

2° 又 $f(\alpha_{n+1}) = 0$ ，其中 α_{n+1} 異於 $\alpha_i, \forall i \in \{1, 2, 3, \cdots, n-1, n\}$

$\Rightarrow f(\alpha_{n+1}) = A(\alpha_{n+1} - \alpha_1)(\alpha_{n+1} - \alpha_2) \cdots (\alpha_{n+1} - \alpha_{n-1})(\alpha_{n+1} - \alpha_n) = 0$

$\because \alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \cdots, \alpha_n, \alpha_{n+1}$ 相異 $\therefore A = 0$

3° 故 $f(x) = 0(x - \alpha_1)(x - \alpha_2) \cdots (x - \alpha_{n-1})(x - \alpha_n)$ ，即 $f(x) \equiv 0$

(2) 零多項式定理推廣：

設 $f(x), g(x)$ 均為不大於 n 次的多項式，若有 $n+1$ 個相異數 $\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_{n+1}$ 均使得 $f(\alpha_i) = g(\alpha_i)$ ，則 $f(x) \equiv g(x)$ 。（此即多項式恆等定理）

【證明】

1° 設多項式 $f(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + a_{n-2} x^{n-2} + \cdots + a_1 x + a_0$

$g(x) = b_n x^n + b_{n-1} x^{n-1} + b_{n-2} x^{n-2} + \cdots + b_1 x + b_0$

且令 $H(x) = f(x) - g(x) = (a_n - b_n)x^n + (a_{n-1} - b_{n-1})x^{n-1} + \cdots + (a_0 - b_0)$

2° $\because$ 有 $n+1$ 個相異值使得 $f(x) = g(x)$ ，即有 $n+1$ 個相異值使得 $H(x) = 0$

$\therefore$ 由零多項式定理知 $H(x) \equiv 0 \Rightarrow f(x) - g(x) \equiv 0$

故 $f(x) \equiv g(x)$

例 1

設 $f(x) = \frac{a-1}{a-b}x^2 + \frac{b+3}{b-c}x - \frac{c}{b-c}$ 且 a, b, c 為互異實數，若 $f(\pi) = f(\sqrt{2}) = f(100) = 0$ ，求數序 (a, b, c) 。

解 $\because \deg f(x) \leq 2$ 且有三相異數值 $\pi, \sqrt{2}, 100$ 使得 $f(\pi) = f(\sqrt{2}) = f(100) = 0$

$\therefore$ 由多項式恆等定理可知 $f(x) \equiv 0$ ，即 $\frac{a-1}{a-b}x^2 + \frac{b+3}{b-c}x - \frac{c}{b-c} \equiv 0$

故 $(a, b, c) = (1, -3, 0)$

例 2

若 $f(x) = ax^2 + bx + c$, $g(x) = x^2 + 2x + 3$ ，已知 $f(1) = g(2)$, $f(5) = g(6)$, $f(100) = g(101)$ ，求數序 (a, b, c) 。

解 $\because \deg f(x) \leq 2$, $\deg g(x+1) \leq 2$ 且有三相異數值 $1, 5, 100$ 使得 $f(x) = g(x+1)$

$\therefore$ 由多項式恆等定理可知 $f(x) \equiv g(x+1)$

例 3

若 a, b, c 為互異之實數，試化簡 $f(x) = \frac{(x-a)(x-b)}{(c-a)(c-b)} + \frac{(x-b)(x-c)}{(a-b)(a-c)} + \frac{(x-c)(x-a)}{(b-c)(b-a)}$ ，並求 $f(1) + f(2) + f(3) + \cdots + f(10)$ 。

解 1° $\because \deg f(x) \leq 2$ 且 $f(a) = 0 + \frac{(a-b)(a-c)}{(a-b)(a-c)} + 0 = 1$

2° 同理， $f(b) = f(c) = 1$

3° 由多項式恆等定理得 $f(x) \equiv 1$ 且 $f(1) + f(2) + f(3) + \cdots + f(10) = 10$

主題

4

綜合除法與多項式變形

應用 1 連續綜合除法

CMHY



例： $f(x) = 8x^3 - 4x^2 - 12x + 1$

(1) 將 $f(x)$ 表成 $(x-1)$ 的多項式。

(2) 將 $f(x)$ 表成 $(2x-1)$ 的多項式。

解：(1) $8x^3 - 4x^2 - 12x + 1 = a_3(x-1)^3 + a_2(x-1)^2 + a_1(x-1) + a_0$

8	-4	-12	1	
8	4	-8	1	
8	4	-8	-7	← 商式 = $a_1 + a_2(x-1) + a_3(x-1)^2$ ，餘式 = a_0
8	12			
8	12	4		← 商式 = $a_2 + a_3(x-1)$ ，餘式 = a_1
8				
8	20			← 商式 = a_3 ，餘式 = a_2

(2) $8x^3 - 4x^2 - 12x + 1 = b_3(2x-1)^3 + b_2(2x-1)^2 + b_1(2x-1) + b_0$

8	-4	-12	1	

《結論》多項式 $f(x)$ 可表成任何其他型式的降幂或升幂型式

應用 2 逐一減項



例： $f(x) = x^3 - 2x^2 + x + 1$

$$= a(x-1)(x-2)(x-3) + b(x-1)(x-2) + c(x-1) + d,$$

求 a, b, c, d ?

解： **法 1** 代入數值法

$$x^3 - 2x^2 + x + 1 = a(x-1)(x-2)(x-3) + b(x-1)(x-2) + c(x-1) + d$$

觀察：求 $d \Rightarrow x=1$ 代入，得 $d=1$

求 $c \Rightarrow x=2$ 代入，得 $c+1=3 \therefore c=2$

求 $b \Rightarrow x=3$ 代入，得 $b=4$

求 $a \Rightarrow$ 可不要代入數值，直接用比較 x^3 係數，得 $a=1$

法 2 連續綜合除法

$$x^3 - 2x^2 + x + 1 = a(x-1)(x-2)(x-3) + b(x-1)(x-2) + c(x-1) + d$$

1	-2	1	1		
	1	-1	0	1	2
1	-1	0	1		
	2	2			

商式 = $a(x-2)(x-3) + b(x-2) + c$,
餘式 $d=1$

1	1			
	3			

商式 = $a(x-3) + b$, 餘式 $c=2$

1			
	4		

商式 = a , 餘式 $b=4$

應用 3 整數求值 $\Rightarrow$ _____

例：試計算： $7^4 - 6 \times 7^3 - 4 \times 7^2 - 19 \times 7 - 11$ 之值

解：1° 本題可轉化成

令 $f(x) = x^4 - 6x^3 - 4x^2 - 19x - 11$ ，求 $f(7)$

2° 利用餘式定理： $f(x) = (x-7)q(x) + r$

$f(7) = r \quad \therefore$ 直接求餘式即可

$$\begin{array}{r|rrrrr} 1 & -6 & -4 & -19 & -11 & \\ \hline & & & & & 7 \end{array}$$

應用 4 小數求近似值 $\Rightarrow$ _____

例： $f(x) = x^3 - x + 2$ ，求 $f(-0.99)$ 之值估計到小數第二位

解：1° 觀察：令 $x = -0.99 \Rightarrow x+1 = 0.01$

2° 將多項式表成 $x+1$ 型式（利用連續綜合除法）

$$\begin{array}{r|rrrr} 1 & 0 & -1 & 2 & \\ & -1 & 1 & 0 & -1 \\ \hline 1 & -1 & 0 & 2 & \\ & -1 & 2 & & \\ \hline 1 & -2 & 2 & & \\ & -1 & & & \\ \hline 1 & -3 & & & \end{array}$$

$$f(x) = x^3 - x + 2 = 2 + 2(x+1) - 3(x+1)^2 + (x+1)^3$$

$$f(-0.99) = 2 + 2(0.01) - 3(0.01)^2 + (0.01)^3$$

=

《結論》小數求值題型

- ① $f(0.99) \Rightarrow$ 將 $f(x)$ 表成 _____ 型式
② $f(1.99) \Rightarrow$ 將 $f(x)$ 表成 _____ 型式
③ $f(-1.99) \Rightarrow$ 將 $f(x)$ 表成 _____ 型式
④ $f(0.51) \Rightarrow$ 將 $f(x)$ 表成 _____ 或 _____ 型式
⑤ $f(0.33) \Rightarrow$ 將 $f(x)$ 表成 _____ 型式
⑥ $f(0.667) \Rightarrow$ 將 $f(x)$ 表成 _____ 型式

應用 5 無理數或虛數求值 $\Rightarrow$ _____



例： $f(x) = x^4 - 2x^2 + 3x - 4$ ，求 $f(1+\sqrt{3}) = ?$

解：1° 令 $x = 1 + \sqrt{3} \Rightarrow x - 1 = \sqrt{3} \Rightarrow x^2 - 2x + 1 = 3 \Rightarrow x^2 - 2x - 2 = 0$

2° $f(x) = x^4 - 2x^2 + 3x - 4$

$= (x^2 - 2x - 2)(\quad) + (\quad)$

3° $f(1+\sqrt{3}) =$

應用 6 置換

GLFF



例：已知 $f(x-1) = x^3 + 6x^2 - x + 3$ ，求 $f(x) = ?$

解：1° 將 $f(x-1) = x^3 + 6x^2 - x + 3 = a(x-1)^3 + b(x-1)^2 + c(x-1) + d$

$$\begin{array}{r|rrrr} 1 & 6 & -1 & 3 & \\ & 1 & 7 & 6 & 1 \\ \hline 1 & 7 & 6 & 9 & \\ & 1 & 8 & & \\ \hline 1 & 8 & 14 & & \\ & 1 & & & \\ \hline 1 & 9 & & & \end{array}$$

$$f(x-1) = (x-1)^3 + 9(x-1)^2 + 14(x-1) + 9$$

$$\Rightarrow f(t) = t^3 + 9t^2 + 14t + 9$$

$\Rightarrow$

應用 7 置換

TGDV



例： $(x+1)^3 - 2(x+1)^2 + 3(x+1) + 5 = a(x-2)^3 + b(x-2)^2 + c(x-2) + d$ ，

求 a, b, c, d ？

解：1° 將式子變成 $t^3 - 2t^2 + 3t + 5 = a(t-3)^3 + b(t-3)^2 + c(t-3) + d$

$$\begin{array}{r|rrrr} 1 & -2 & 3 & 5 & \\ \hline & & & & 3 \end{array}$$



回家作業



1. 設 a, b, c, d, e 為常數，且

$$x^4 + 8x^3 - 25x^2 + 30x - 8 = a(x-2)^4 + b(x-2)^3 + c(x-2)^2 + d(x-2) + e,$$

求 a, b, c, d, e 之值。



2. 多項式 $x^3 - 8x^2 + 20x - 17 = a(x-1)(x-2)(x-3) + b(x-1)(x-2) + c(x-1) + d$ ，

求 a, b, c, d 之值。

3. 設 $f(x) = 54x^3 - 99x^2 + 66x - 20$

(1) 試將 $f(x)$ 表示成 $3x-1$ 的多項式

(2) 試求 $f(0.33)$ 的近似值到小數第四位。

4. 設 $f(x) = x^5 + x^4 - 10x^3 - 10x^2 + x + 5$ ，試求 $f(1+\sqrt{2})$ 之函數值。

簡答

1. $(a, b, c, d, e) = (1, 16, 47, 58, 32)$ 2. $(a, b, c, d) = (1, -2, 3, -4)$
3. (1) $2(3x-1)^3 - 5(3x-1)^2 + 6(3x-1) - 7$ (2) -7.0605 4. $-36 - 28\sqrt{2}$



回家作業



5. 設 $f(x) = x^5 - 2x^4 - 3x^3 + 7x^2 + x + 6$

(1) 將 $f(x)$ 表成 $(x-2)$ 的多項式，即 $f(x) = \sum_{k=0}^5 a_k (x-2)^k$

(2) 求 $f(1.999)$ 的近似值。(取到小數第三位)

6. 以 $a + b\sqrt{2}$ 的形式化簡

$$4\left(\frac{3+\sqrt{2}}{2}\right)^4 - 12\left(\frac{3+\sqrt{2}}{2}\right)^3 + 3\left(\frac{3+\sqrt{2}}{2}\right)^2 + 14\left(\frac{3+\sqrt{2}}{2}\right) - 8。$$

其中 a, b 為有理數。

7. 已知 $f(x) = x^3 - 2x^2 + 10x + 1$ ，若 $g(x+2) = f(x-1)$ ，則 $g(x)$ 為 _____。



5. (1) $(x-2)^5 + 8(x-2)^4 + 21(x-2)^3 + 21(x-2)^2 + 9(x-2) + 12$ (2) 11.991

6. $2 + \sqrt{2}$ 7. $x^3 - 11x^2 + 49x - 74$

主題 5 餘式定理



【觀念一】餘式定理

(1) 多項式 $f(x)$ 除以 $x-a$ 的餘式為 $f(a)$

(2) 設 $a \neq 0$ ，則多項式 $f(x)$ 除以 $ax-b$ 的餘式為 $f(\frac{b}{a})$

《說明》(1) 令 $f(x) = (x-a)q(x) + r$

$$x=a \text{ 代入得 } f(a) = (a-a)q(a) + r \quad \therefore r = f(a)$$

(2) 令 $f(x) = (ax-b)q(x) + r$

$$x = \frac{b}{a} \text{ 代入得 } f(\frac{b}{a}) = (a \cdot \frac{b}{a} - b)q(\frac{b}{a}) + r \quad \therefore r = f(\frac{b}{a})$$

【觀念二】(1) $f(x)$ 除以 $x-1$ 的餘式為 6 $\Rightarrow$ 想到 _____

(2) $f(2) = 7 \Rightarrow$ 想到 _____

例 1. (能力指標：餘式定理)

$f(x) = x^7 - 50x^5 + 6x^4 + 4x^3 + 25x^2 - 30x - 11$ ，試求 $f(7) = ?$

解：令 $f(x) = (x-7)q(x) + r$

1	0	-50	6	4	25	-30	-11	7



例 2. (能力指標：餘式定理)

$f(x) = 2x^3 + kx^2 - 4x + 5$ 除以 $x+2$ 的餘式為 -15 ，求 k 值？

解： 1° 令 $f(x) = 2x^3 + kx^2 - 4x + 5 = (x+2)q(x) - 15$

$$\therefore f(-2) =$$





回家作業



1. 設 $f(x) = 1250x^6 - 2791x^5 - 3125x^4 + 5707x^3 - 100x^2 + 44x + 62$,

則 $f(-\frac{3}{2}) = \underline{\hspace{2cm}}$ 。



2. 設 $g(x) = x^4 - 3x^2 + x + 5$ 且 $f(x) = g(2x+1)$, 試求以 $2x-1$ 除 $f(x)$ 所得餘式。

3. 求多項式 $P(x) = (x+2)^4 - 12(x+2)^3 - 8(x+2)^2 - 62(x+2) + 7$ 除以 $x-11$ 所得之餘式。



1. 122 2. 11 3. 46



回家作業



4. 設多項式 $f(x)$ 除以 $x-1$ 得商為 $Q(x)$ ，餘式為 4，則 $f(x)$ 除以 $(x-1)^2$ 的餘式可能為下列何者？

- (1) $x-2$ (2) $6x-2$ (3) 4 (4) $4x+3$ (5) x^2+x+2 。

5. 以 x^2+3x-4 除多項式 $f(x)$ 與 $g(x)$ 分別餘 $3x+2, -4x+7$ 。
求 $(2x+3)f(x)-(x+5)g(x)$ 除以 $x+4$ 之餘式。



4. (2)(3) 5. 27



回家作業



6. (97 數乙試題)

給定二次多項式 $f(x) = x^2 + ax + b$ ，已知多項式 $x^3 + 3x^2 + 4x + 2$ 除以 $f(x)$ 其餘式為 $3x + 2$ ，多項式 $x^3 + x^2 - x - 1$ 除以 $f(x)$ 其餘式為 $4x + 1$ ，請選出正確的選項。

- (1) $a = 3$ (2) $b = -1$ (3) 方程式 $f(x) = 0$ 無實根
(4) $f(x)$ 的極小值為 $\frac{5}{4}$ (5) $f(x)$ 除以 $(x + 3)$ 其餘式為 1



6. (1) (5)

主題 6 因式定理

UBLY



【觀念一】因式定理

$$x-a \mid f(x) \Leftrightarrow f(a)=0$$

《說明》 $\because x-a \mid f(x) \therefore f(x)=(x-a)g(x)$

$$\Rightarrow f(a)=0$$

【觀念二】 $f(x)=a_nx^n+\cdots+a_1x+a_0$

(1) 若 $f(1)=0$ ，則 $a_n+a_{n-1}+\cdots+a_0=0$

可看出：當所有係數和為 0， $f(x)$ 必有 _____ 因式

(2) 若 $f(-1)=0$ ，則 $a_n(-1)^n+\cdots+a_1(-1)+a_0=0$

$$\Rightarrow a_0-a_1+a_2-a_3+\cdots+a_n(-1)^n=0$$

$$\Rightarrow a_0+a_2+a_4+\cdots+a_{2k}=a_1+a_3+a_5+\cdots+a_{2k+1}$$

可看出：奇次項係數和 = 偶次項係數和，

$f(x)$ 必有 _____ 因式

【觀念三】 $x-a \mid f(x) \Leftrightarrow f(x)=0$ 有 $x=a$ 根

即：方程式有根即多項式有因式

【觀念四】一次因式定理： $x-a \mid f(x) \Rightarrow f(a)=0$

【觀念五】二次因式： $ax^2+bx+c \mid f(x) \Rightarrow$ 利用綜合除法，令餘式 = 0

【觀念六】重因式：

$(x-a)^2 \mid f(x) \Rightarrow f(x) \div (x-a)$ ，運算二次，令二個餘式為 0

$(x-a)^3 \mid f(x) \Rightarrow f(x) \div (x-a)$ ，運算三次，令三個餘式為 0

例 1. (能力指標：因式定理)

$\deg f(x)=3$ ，已知 $f(1)=f(2)=f(3)=0$ 且 $f(4)=12$ ，
求 $f(x)=?$



解：1° 看到 $f(1)=f(2)=f(3)=0$ ，即表示 $f(x)$ 有 $x-1, x-2, x-3$ 之因式
令 $f(x)=k(x-1)(x-2)(x-3)$

例 2. (能力指標：因式定理)

$a, b, c \in \mathbb{Z}$ ， $a > b$ ， $x-c \mid x(x-a)(x-b)+7$ ，
求 (a, b, c) 序對共 _____ 組？



解：1° $x-c \mid x(x-a)(x-b)+7$
 $\Rightarrow c(c-a)(c-b)+7=0$
 $\Rightarrow c(c-a)(c-b)=-7$
小 大

2° 討論

$c-b$	1	7	7	1	-1
$c-a$	-1	1	-1	-7	-7
c	7	-1	1	1	-1

$\Rightarrow$

a	8	-2	2	8	6
b	6	-8	-6	0	0
c	7	-1	1	1	-1

$\therefore$ 共 5 組解

例 3. (能力指標：三重因式)

$x^4 + 5x^3 + ax^2 + bx + c$ 有 $(x-1)^3$ 因式，求數對

$(a, b, c) = \underline{\hspace{2cm}}$ 。

解：

$$\begin{array}{cccc|c|l}
 1 & 5 & a & b & c & & \\
 & 1 & 6 & a+6 & a+b+6 & 1 & \Rightarrow \begin{cases} a+b+c+6=0 \\ 2a+b+19=0 \\ a+21=0 \end{cases} \\
 \hline
 1 & 6 & a+6 & a+b+6 & a+b+c+6 & & \\
 & 1 & 7 & a+13 & & & \\
 \hline
 1 & 7 & a+13 & 2a+b+19 & & & \Rightarrow \begin{cases} a=-21 \\ b=23 \\ c=-8 \end{cases} \\
 & 1 & 8 & & & & \\
 \hline
 1 & 8 & a+21 & & & &
 \end{array}$$





回家作業



1. 已知 $f(x) = x^3 - 5mx + 4n$ 可被 $(x-1)^2$ 整除，試求 m, n 的值。



2. 設 $x^3 + 2x^2 + ax + b$ 有因式 $x^2 - 2x - 3$ ，則 $a = \underline{\hspace{2cm}}$, $b = \underline{\hspace{2cm}}$ 。

3. $f(x) = 2x^3 - 5x^2 - 8x + a$, $g(x) = x^2 - 4x + b$ ，已知 $f(x)$ 是 $g(x)$ 的倍式，求 a, b 之值。

4. 設 m, n 為常數。若 $x^3 + 2x^2 + mx + 8$ 能被 $x^2 - 2x + n$ 整除，則 m, n 之值各為何？

簡答

1. $(m, n) = (\frac{3}{5}, \frac{1}{2})$ 2. $(a, b) = (-11, -12)$ 3. $(a, b) = (6, 2)$
4. $(m, n) = (-6, 2)$



回家作業



5. (95 學測試題)

學生練習計算三次多項式 $f(x)$ 除以一次多項式 $g(x)$ 的餘式。已知 $f(x)$ 的三次項係數為 3，一次項係數為 2。甲生在計算時把 $f(x)$ 的三次項係數錯看成 2(其他係數沒看錯)，乙生在計算時把 $f(x)$ 的一次項係數錯看成 -2 (其它係數沒看錯)。而甲生和乙生算出來的餘式剛好一樣。試問 $g(x)$ 可能等於以下哪些一次式？

- (1) x (2) $x-1$ (3) $x-2$ (4) $x+1$ (5) $x+2$

6. (105 數乙試題)

下列哪一個選項是方程式 $7x^5 - 2x^4 + 14x^3 - 4x^2 + 7x - 2 = 0$ 的根？

- (1) -1 (2) $\frac{1}{7}$ (3) $-\frac{1}{7}$ (4) $\frac{2}{7}$ (5) $-\frac{2}{7}$



5. (1) (3) (5) 6. (4)



回家作業



7. (106 數乙試題)

設 $f(x) = x^3 + ax^2 + bx + c$ 為實係數多項式函數。若 $f(1) = f(2) = 0$ 且 $f(3) = 4$ ，則 $a + 2b + c$ 的值是下列哪一個選項？

- (1) 1 (2) 2 (3) 3 (4) 4 (5) 5



7. (4)

主題 7 餘式的求法

型一 除式為組合式

例 1. $f(x)$ 為多項式， $f(x)$ 除以 $x+1$ 得餘式為 5， $f(x)$ 除以 $x-2$ 得餘式為 8，求 $f(x)$ 除以 x^2-x-2 的餘式？

解：由題目知 $f(-1)=5$ ， $f(2)=8$ ，且 $x^2-x-2=(x+1)(x-2)$



法 1 令 $f(x) = (x+1)(x-2)q(x) + \overset{\text{一次式}}{\boxed{}}$

$$\begin{cases} f(-1)=5 \\ f(2)=8 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} -a+b=5 \\ 2a+b=8 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a= \\ b= \end{cases}$$

$$\therefore r(x) =$$

法 2 令 $f(x) = (x+1)(x-2)q(x) + \overset{\text{一次式}}{a(x+1)+b}$ ← 除式為二個組合型式
餘式可用原除式來組成

$$\begin{cases} f(-1)=5 \\ f(2)=8 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} b=5 \\ 3a+b=8 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a= \\ b= \end{cases}$$

$$\therefore r(x) =$$

例 2. $f(x)$ 除以 $x^2 + x - 2$ 得餘式為 $5x - 2$ ， $f(x)$ 除以 $x^2 - x - 6$ 得餘式為 $23x + 34$ ，求 $f(x)$ 除以 $x^2 - 4x + 3$ 的餘式？



解： 1° $x^2 + x - 2 = (x + 2)(x - 1)$
 $\therefore f(x) = (x + 2)(x - 1)Q(x) + 5x - 2$
 $\Rightarrow f(-2) = \quad, f(1) =$

2° $x^2 - x - 6 = (x - 3)(x + 2)$
 $\therefore f(x) = (x - 3)(x + 2)M(x) + 23x + 34$
 $\Rightarrow f(3) = \quad, f(-2) =$

3° $x^2 - 4x + 3 = (x - 1)(x - 3)$

$\therefore f(x) = (x - 1)(x - 3)T(x) + \boxed{\text{一次式}}$

例 3. $f(x)$ 除以 $(x - b)(x - c)$ 的餘式為 $3x + 1$ ，
 $f(x)$ 除以 $(x - c)(x - a)$ 的餘式為 $x + 1$ ，
 $f(x)$ 除以 $(x - a)(x - b)$ 的餘式為 $2x + 3$



- (1) 求 a, b, c 值？
 (2) 求 $f(x) \div (x - a)(x - b)(x - c)$ 的餘式？

解：

例 4. $f(x)$ 除以 $2x^2 + x + 3$ 得餘式為 $2x + 5$ ， $f(x)$ 除以 $x + 2$ 得餘式為 19，求 $f(x)$ 除以 $(x + 2)(2x^2 + x + 3)$ 的餘式？



二次式

解： 1° 令 $f(x) = (x + 2)(2x^2 + x + 3)q(x) +$

除式為二個多項式組成
餘式可利用除式來表示



例 5. $f(x) \div (x-1)^2$ 餘 $3x+2$, $f(x) \div (x+2)^2$ 餘 $5x-3$

(1) $f(x) \div (x-1)^2(x+2)$ 餘式 = _____

(2) $f(x) \div (x-1)(x+2)^2$ 餘式 = _____

(3) $f(x) \div (x-1)^2(x+2)^2$ 餘式 = _____

解： (1) 1° 看到題目聯想 $f(1)=5$, $f(-2)=-13$

2° 令 $f(x) = (x-1)^2(x+2)q(x) + \boxed{\hspace{10em}}$ 二次式

除式為組合情形
餘式用除式來表示

(3) 1° 令 $f(x) = (x-1)^2(x+2)^2q(x) + \boxed{(ax+b)(x-1)^2 + 3x+2}$

2° 令 $f(x) = (x-1)^2(x+2)^2q(x) + \boxed{(ax+c)(x+2)^2 + 5x-3}$ (二餘式相同)

3° 比較係數：
$$\begin{cases} x^0: b+2=4c-3 \\ x^1: -2b+a+3=4c+4a+5 \\ x^2: b-2a=c+4a \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} b-4c=-5 \\ 3a+2b+4c=-2 \\ 6a-b+c=0 \end{cases}$$

可求得 $\begin{cases} a=-\frac{4}{9} \\ b=-\frac{17}{9} \\ c=\frac{7}{9} \end{cases} \therefore \text{餘式} = \left(-\frac{4}{9}x - \frac{17}{9}\right)(x-1)^2 + 3x+2$

型二 除式為 $(x-a)^k$

IALQ



例 1. $f(x) = x^7 + 1$ ，求 $f(x)$ 除以 $(x-1)^2$ 之餘式？

解：1° 令 $f(x) = x^7 + 1 = (x-1)(x-1)q(x) + \overset{\text{一次式}}{a(x-1)+b}$ ← 除式為組合
餘式用除式表示

2° 令 $x=1$ 代入 $f(1) = 2 = b$

3° $\Rightarrow x^7 + 1 = (x-1)^2 q(x) + a(x-1) + 2$

$$\Rightarrow x^7 - 1 = (x-1)^2 q(x) + a(x-1)$$

$$\Rightarrow x^6 + x^5 + x^4 + x^3 + x^2 + x + 1 = (x-1)q(x) + a$$

$x=1$ 代入得 $7 = a$

餘式 $= 7(x-1) + 2 = 7x - 5$

(註)

(1) $x^2 - 1 = (x-1)(x+1)$

(2) $x^3 - 1 = (x-1)(x^2 + x + 1)$

(3) $x^4 - 1 = (x-1)(x^3 + x^2 + x + 1)$

(4) $x^5 - 1 = (x-1)(x^4 + x^3 + x^2 + x + 1)$

(5) $x^6 - 1 = (x-1)(x^5 + x^4 + x^3 + x^2 + x + 1)$

(6) $x^7 - 1 = (x-1)(x^6 + x^5 + x^4 + x^3 + x^2 + x + 1)$

型三 被除式為 $[p(x)]^k$

例 1. $f(x) = (x^3 - 3x - 5)^3$ 除以 $(x^2 + 2x + 2)$ ，求餘式？

解： $f(x) = (x^3 - 3x - 5)^3$

$$\begin{aligned} &= [\underline{(x-2)(x^2+2x+2)} + \underline{(-x-1)}]^3 \\ &= (x-2)^3(x^2+2x+2)^3 + 3(x-2)^2(x^2+2x+2)^2(-x-1) \\ &\quad + 3(x-2)(x^2+2x+2)(-x-1)^2 + (-x-1)^3 \\ &= (x^2+2x+2)Q(x) + (-x-1)^3 \\ &= (x^2+2x+2)Q(x) + (x^2+2x+2)(-x-1) + (x+1) \\ &= (x^2+2x+2)[Q(x) + (-x-1)] + (x+1) \\ \therefore \text{餘式} &= x+1 \end{aligned}$$



型四 除式為二項式

例 1. $f(x) = x^5 + 2x^4 - 3x^3 + x^2 + 5x + 1$ 除以 $x^2 + 1$ ，求餘式？

解：1° 令 $x^5 + 2x^4 - 3x^3 + x^2 + 5x + 1 = (x^2 + 1)q(x) + \boxed{r(x)}$

2° 令 $x^2 = -1$ 代入左式右式化簡得

$$\text{右式} = r(x)$$

$$\text{左式} =$$



結論：由以上方法分析遇到除式為二項式

可直接令除式為 0，代入左右式進行化簡，其結果即為餘式

例 2. $f(x)=x^3+2x-1$, $g(x)=x^2+4x+1$, $h(x)=x^4+x^2+1$

$f(x^3)+g(x^3)x+h(x^3)x^2$ 去除以 x^3-1 , 求餘式?

解: 1° 令 $f(x^3)+g(x^3)x+h(x^3)x^2=(x^3-1)q(x)+r(x)$

2° 令 $x^3=1$ 代入左右化簡得

右式= $r(x)$

左式=

UKCK



例 3. $f(x)=x^{1987}+2x^{1980}-3x^{799}$ 去除以 x^4-x^2 , 求餘式?

解: 1° $f(x)=x^{1987}+2x^{1980}-3x^{799}=(x^4-x^2)q(x)+r(x)$

$$2^\circ \text{ 令 } \begin{cases} x^4 = x^2 \\ x^5 = x^3 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x^6 = x^4 = x^2 \\ x^7 = x^3 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x^{2k} = x^2 \\ x^{2k+1} = x^3 \end{cases}$$

代入左式右式化簡得

右式= $r(x)$

左式=

IMHZ



型五 除式為降冪規則

例 1. $f(x) = x^{32} - 3x^{25} + 3x^{14} - 4x^7 + 5x^6$ ，求 $f(x) \div (x^2 + x + 1)$ 之餘式？

解：1° $x^{32} - 3x^{25} + 3x^{14} - 4x^7 + 5x^6 = (x^2 + x + 1)q(x) + r(x)$

$$2^\circ \text{ 令 } \begin{cases} x^2 + x + 1 = 0 \\ (x-1)(x^2 + x + 1) = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x^2 + x + 1 = 0 \\ x^3 = 1 \end{cases} \quad \text{代入左右化簡}$$

右式 = $r(x)$

左式 =



例 2. 求 $13^{10} - 2 \times 13^2 + 1$ 除以 $13^4 - 13^2 + 1$ 之餘式？

解：1° $x^{10} - 2x^2 + 1 = (x^4 - x^2 + 1)q(x) + r(x)$

$$2^\circ \text{ 令 } \begin{cases} x^4 - x^2 + 1 = 0 \\ (x^2 + 1)(x^4 - x^2 + 1) = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x^4 - x^2 + 1 = 0 \\ x^6 = -1 \end{cases} \quad \text{代入左右化簡得}$$

右式 = $r(x)$

左式 = $-x^4 - 2x^2 + 1 \equiv -3x^2 + 2 = -505$

但餘數不可為負，故餘數為 $(13^4 - 13^2 + 1) - 505 = 27888$





回家作業



1. 設多項式 $P(x)$ 滿足：“ $\deg P(x)=3$ ，首項係數是 2”，若 $P(x)$ 分別除以 x^2-4x+1 ， $x-1$ 的餘式依次為 $7x+1$ ，2
(1) 求 $P(x)$ (2) 求 $P(x)$ 除以 $x+1$ 的餘式。



2. 設多項式 $f(x)$ 除以 $x-1$ ， x^2+2x+3 的餘式依次是 3， $4x+6$ ，求 $f(x)$ 除以 $(x-1)(x^2+2x+3)$ 的餘式。

[提示] 設 $f(x) = (x^2+2x+3) \cdot q_1(x) + (4x+6)$

$$\begin{aligned} &= (x^2+2x+3)[(x-1) \cdot q_2(x) + a] + (4x+6) \\ &= (x^2+2x+3)(x-1) \cdot q_2(x) + \underbrace{a(x^2+2x+3) + (4x+6)}_{\text{餘式}} \end{aligned}$$

3. 設 $\deg f(x) \geq 3$ ，若多項式 $f(x)$ 除以 $x-1$ ， $x+2$ ， $x-2$ 之餘數依次為 3，-3，1，試求 $f(x)$ 除以 $(x-1)(x+2)(x-2)$ 之餘式。

簡答

1. (1) $2x^3 - 7x^2 + 5x + 2$ (2) -12 2. $-\frac{7}{6}x^2 + \frac{5}{3}x + \frac{5}{2}$ 3. $-x^2 + x + 3$



回家作業



4. 若以 $x-2$ 除 $3x^2+ax+b$ 的餘式為 -2 ；以 $x-3$ 除 $3x^2+ax+b$ 的餘式為 3 ，
則 $a = \underline{\hspace{2cm}}$ ， $b = \underline{\hspace{2cm}}$ 。
5. 設 $f(x)$ 是多項式。 $f(x)$ 除以 $x+1$ 得餘式為 5 ； $f(x)$ 除以 $x-2$ 得餘式為 20 ；
 $f(x)$ 除以 $x+4$ 得餘式為 44 。求 $f(x)$ 除以 $(x+1)(x-2)(x+4)$ 的餘式為何？
6. 多項式 $f(x)$ 除以 $x-2$ 餘 1 ，除以 $x+1$ 餘 -5 ，求 $f(x)$ 除以 $(x-2)(x+1)$ 的餘式。



4. $(a, b) = (-10, 6)$ 5. $3x^2 + 2x + 4$ 6. $2x - 3$



回家作業



7. 多項式 $f(x)$ 係數的和為 -5 ，且 $f(x)$ 除以 x^2+x+1 餘 $3x-2$ ，求 $f(x)$ 除以 x^3-1 的餘式。

8. 設 $f(x)$ 是三次式。若以 $x+1$ 除之，餘式為 -5 ；以 $(x-1)^2$ 除之，餘式為 -9 ；以 $x+2$ 除之，餘式為 -18 。求 $f(x)$ 。

9. 利用 $x^{50} = (x^3-1) \cdot q(x) + x^2$ ，求 x^{50} 除以 x^2+x+1 的餘式。



7. $-2x^2 + x - 4$ 8. $2x^3 - x^2 - 4x - 6$ 9. $-x - 1$

陳立數學~51~絕對智慧
尊重著作權所有・盜翻印法律追究



回家作業



10. $x^{9999} - x^9 + 1$ 除以 $x^2 - 1$ ，則餘式為何？

11. 設 $f(x)$ 為整係數多項式，若 $f\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right) = \frac{-11-7\sqrt{5}}{2}$ ，則 $f(x) \div (x^2 - x - 1)$ 之餘式為多少？



10. 1 11. $-7x - 2$



回家作業



12. (96 數甲試題)

設 $P(x)$ 是一個五次實係數多項式。若 $P(x)$ 除以 $x-3$ 的餘式是 2，且商 $Q(x)$ 是一個係數均為正數的多項式，試問下列哪些選項是正確的？

- (1) $P(x) = 0$ 與 $Q(x) = 0$ 有共同的實根
- (2) 3 是 $P(x) = 2$ 唯一的實根
- (3) $P(x)$ 不能被 $x-4$ 整除
- (4) $P(x) = 0$ 一定有小於 3 的實根
- (5) $P(x)$ 除以 $(x-3)(x+3)$ 的餘式也是 2

13. (104 數乙試題)

設 $f(x)$ 為一實係數多項式，且 $f(x)$ 除以 $(x-1)(x-2)^2$ 的餘式為 $(x-2)^2 + g(x)$ ，其中 $g(x)$ 為一次多項式。請選出正確的選項。

- (1) 若知道 $f(1)$ 及 $f(2)$ ，則可求出 $g(x)$
- (2) $f(x)$ 除以 $(x-2)$ 的餘式是 $g(2)$
- (3) $f(x)$ 除以 $(x-1)$ 的餘式是 $g(1)$
- (4) $f(x)$ 除以 $(x-2)^2$ 的餘式是 $g(x)$
- (5) $f(x)$ 除以 $(x-1)(x-2)$ 的餘式是 $x-2+g(x)$



12. (3) (4) 13. (1) (2) (4)



回家作業



14. (105 數乙試題)

設 $f(x)$ 為一未知的實係數多項式，但知道 $f(x)$ 除以 $(x-5)(x-6)^2$ 的餘式為 $5x^2 + 6x + 7$ 。根據上述所給條件，請選出正確的選項。

- (1) 可求出 $f(0)$ 之值
- (2) 可求出 $f(11)$ 之值
- (3) 可求出 $f(x)$ 除以 $(x-5)^2$ 的餘式
- (4) 可求出 $f(x)$ 除以 $(x-6)^2$ 的餘式
- (5) 可求出 $f(x)$ 除以 $(x-5)(x-6)$ 的餘式

15. (107 學測試題)

已知多項式 $f(x)$ 除以 $x^2 - 1$ 之餘式為 $2x + 1$ 。試選出正確的選項。

- (1) $f(0) = 1$
- (2) $f(1) = 3$
- (3) $f(x)$ 可能為一次式
- (4) $f(x)$ 可能為 $4x^4 + 2x^2 - 3$
- (5) $f(x)$ 可能為 $4x^4 + 2x^3 - 3$



14. (4) (5) 15. (2) (3) (5)

◀ ◀ ◀ ◀ ◀ ◀ ◀ ◀ ◀ ◀ ◀ ◀ ◀ ◀ ◀ ◀ ◀ ◀ ◀ ◀

① x 降冪型假設法：

② 除式已知假設法：

$$f(x) = \boxed{\hspace{10cm}} \quad (\text{除以 } x^2 + 3x + 1 \text{ 餘 } x + 5)$$

$$f(x) = \boxed{\hspace{10cm}} \quad (\text{除以 } x-1, x-2 \text{ 皆餘 } 7)$$
$$f(x) = \boxed{} \quad (\text{除以 } x-1, x-2 \text{ 分別餘 } 3, 4)$$

或 $f(x) =$ (除以 $x-1$, $x-2$ 分別餘 3, 4)

① x 降冪型假設法：

陳立數學 - 39 - 絕對智慧
尊重著作權所有。盜翻印法律追究

② 除式已知假設法：

$$f(x) = \boxed{} \quad (\text{除以 } x-2 \text{ 餘 } 7)$$

$$f(x) = \boxed{} \quad (\text{除以 } x^2 + x + 1 \text{ 餘 } x + 5)$$

③ 同餘假設法：

$$f(x) = \boxed{} \quad (\text{除以 } x-1, x-2, x-3 \text{ 皆餘 } 4)$$

$$f(x) = \boxed{\hspace{8cm}} \quad (\text{除以 } x-1, x-2 \text{ 皆餘 } 3)$$

④ 牛頓 (Newton) 插值階梯假設法：

$f(x) =$

$f(x) =$

(除以 $x-1$, $x-2$, $x-3$ 分別餘 $4, 7, 8$, 即 $f(1)=4$, $f(2)=7$, $f(3)=8$)

2. 多項式餘式求法

(1) 同餘化簡迭代法：

① 同餘符號：[自行參考]

整數 12 除以 5 餘 2，整數 27 除以 5 餘 2，我們可以說這兩個除法同餘。

表示為 $12 \equiv 27 \pmod{5}$ ；同理，若多項式 $f(x)$ 除以 $g(x)$ 的餘式為 $r(x)$ ，

多項式 $h(x)$ 除以 $g(x)$ 的餘式為 $r(x)$ ，可以表為 $f(x) \equiv h(x) \pmod{g(x)}$ 。

② 餘式化簡迭代法：[通常用於 $f(x)$ 已知時]

Step 1 可令除式 $g(x)$ 為 0，而將所得之關係式代入 $f(x)$ 中化簡。

Step 2 化簡時，若所得各項中，次數小於 $\deg g(x)$ 者，則保留；

次數大於 $\deg g(x)$ 者，則利用所得之關係式繼續降次化簡。

Step 3 直到每一項之次數均小於 $\deg g(x)$ 時，所得即餘式 $r(x)$ 。

② 除式已知假設法：

$$f(x) = \boxed{} \quad (\text{除以 } x-2 \text{ 餘 } 7)$$

$$f(x) = \boxed{} \quad (\text{除以 } x^2 + x + 1 \text{ 餘 } x + 5)$$

③ 同餘假設法：

$$f(x) = \boxed{} \quad (\text{除以 } x-1, x-2, x-3 \text{ 皆餘 } 4)$$

$$f(x) = \boxed{} \quad (\text{除以 } x-1, x-2 \text{ 皆餘 } 3)$$

④ 牛頓 (Newton) 插值階梯假設法：

$f(x) =$

[illegible]

(除以 $x-1$, $x-2$, $x-3$ 分別餘 4, 7, 8, 即 $f(1)=4$, $f(2)=7$, $f(3)=8$)

2. 多項式餘式求法

(1) 同餘化簡迭代法：

① 同餘符號：[自行參考]

整數 12 除以 5 餘 2，整數 27 除以 5 餘 2，我們可以說這兩個除法同餘。

表示為 $12 \equiv 27 \pmod{5}$ ；同理，若多項式 $f(x)$ 除以 $g(x)$ 的餘式為 $r(x)$ ，

多項式 $h(x)$ 除以 $g(x)$ 的餘式為 $r(x)$ ，可以表為 $f(x) \equiv h(x) \pmod{g(x)}$ 。

② 餘式化簡迭代法：[通常用於 $f(x)$ 已知時]

Step 1 可令除式 $g(x)$ 為 0，而將所得之關係式代入 $f(x)$ 中化簡。

Step 2 化簡時，若所得各項中，次數小於 $\deg g(x)$ 者，則保留；

次數大於 $\deg g(x)$ 者，則利用所得之關係式繼續降次化簡。

Step 3 直到每一項之次數均小於 $\deg g(x)$ 時，所得即餘式 $r(x)$ 。

【說例】

欲求「多項式 $f(x) = (x^2 + 2x + 3)^2$ 除以 $g(x) = x^2 + x + 1$ 的餘式」處理方式如下：

$$\begin{aligned} f(x) &\equiv (\quad)^2 \quad [\text{拆出除式 } x^2 + x + 1 \text{ 即可消去除式}] \\ &\equiv \quad \quad \quad [\text{由於次數不低於 } x^2 + x + 1, \text{ 故繼續消去}] \\ &\equiv \quad \quad \quad [\text{次數小於 } x^2 + x + 1, \text{ 故為餘式}] \end{aligned}$$

(2) 除式為組合式： [通常此種題型的被除式皆是未知]

給定若干個多項式 $f(x)$ 的除法表現，而新除式為組合式，則餘式可利用階梯假設法完成。

【說例 1】

多項式 $f(x)$ 除以 $x-1$ 餘 7； $f(x)$ 除以 $x+2$ 餘 3，則可設：

$$f(x) = (x-1)(x+2)Q(x) + \boxed{a(x-1)+7}$$

$$\text{或 } f(x) = (x-1)(x+2)Q(x) + \boxed{a(x+2)+3}。$$

【說例 2】

多項式 $f(x)$ 除以 $x-1$ 餘 5； $f(x)$ 除以 $x^2 + 3x + 1$ 餘 $2x + 3$ ，則可設：

$$f(x) = (x-1)(x^2 + 3x + 1)Q(x) + \boxed{(x-1)(ax+b)+5}$$

$$\text{或 } f(x) = (x-1)(x^2 + 3x + 1)Q(x) + \boxed{a(x^2 + 3x + 1) + 2x + 3}。$$

型二**給定已知函數值求新函數值****例 3**

已知 $f(x)$ 為二次多項式 $f(x)$ 且 $f(1) = 4$, $f(2) = 5$, $f(3) = 8$, 求 $f(4)$ 之值。

解 【法一】牛頓插值法

【法二】差分理論 [注意使用條件]

例 4

若三次多項式 $f(x)$ 滿足 $f(97)=1$, $f(98)=2$, $f(99)=4$, $f(100)=11$, 試求 $f(101)$ 之值。

解 【法一】差分理論 [注意使用條件]

【法二】牛頓插值法

1° 可設 $f(x) =$

$$2^{\circ} \quad \begin{cases} f(98) = c + 1 = 2 \\ f(99) = 2b + 2c + 1 = 4 \\ f(100) = 6a + 6b + 3c + 1 = 11 \end{cases} \Rightarrow (a, b, c) = \left(\frac{2}{3}, \frac{1}{2}, 1\right)$$

$$3^{\circ} \quad \text{故 } f(x) = \frac{2}{3}(x-97)(x-98)(x-99) + \frac{1}{2}(x-97)(x-98) + (x-97) + 1$$

$$4^{\circ} \quad f(101) = \frac{2}{3}(4)(3)(2) + \frac{1}{2}(4)(3) + (4) + 1 = 27$$



簡單多項式函數及其圖形

主題 8 一次函數及其圖形

RZYY



【觀念一】函數的概念

令 x, y 為兩變數，當給定 x 的值時， y 的值就被唯一確定。

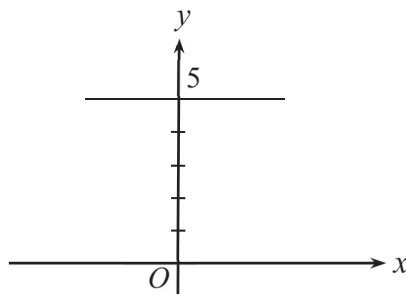
則此對應關係即稱 y 為 x 之函數，記為 _____。

【觀念二】常數函數

(1) 型式如： $y = f(x) = c$ ($c \in \mathbb{R}$)

(2) 圖形在 xy 平面上是：_____

《說明》 $y = f(x) = 5$

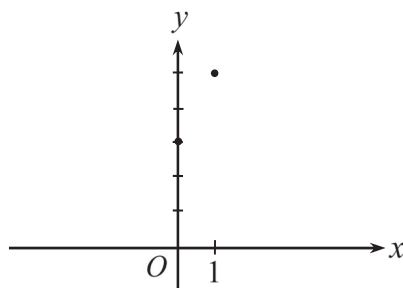


【觀念三】一次函數

(1) 型式如： $y = f(x) = ax + b$ ($a, b \in \mathbb{R}, a \neq 0$)

(2) 圖形在 xy 平面上是：_____

《說明》 $y = f(x) = 2x + 3$



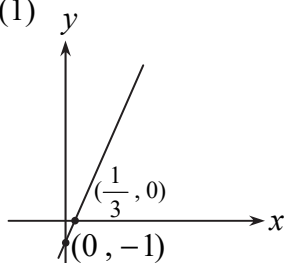
例 1. (能力指標：一次函數作圖)

試畫出下列函數的圖形

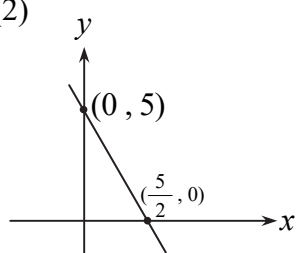
(1) $y = 3x - 1$ (2) $2x + y - 5 = 0$ (3) $y = -\frac{1}{2}x + 3, -4 \leq x \leq 2$



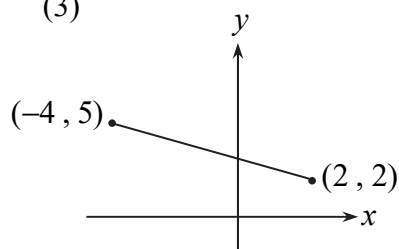
解：(1)



(2)



(3)



例 2. (能力指標：斜率比較)

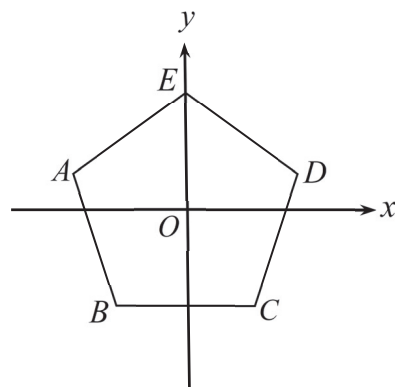
設正五邊形 $ABCDE$ 中心在原點，頂點 E 在正 y 軸上，如圖。

若直線 AB, BC, CD, DE, EA 之斜率分別為 m_1, m_2, m_3, m_4, m_5 ，

試比較此五數之大小。



解：



例 3. (能力指標：斜率)

已知 $y = f(x) = 2331x + 3875$ ，求 $\frac{f(8765) - f(5678)}{8765 - 5678} = \underline{\hspace{2cm}}$ 。

解：



例 4. (能力指標：直線運動)

有一個質點在數線上作等速運動，已知時刻 $t=1$ 時，其位置坐標為 4，而時刻 $t=3$ 時，其位置坐標為 10，試求此質點的速度，並將其坐標 x 表示成時刻 t 的函數。

解：



例 5. (能力指標：直線方程式應用)

$-1 < a < 1, -1 < b < 1, -1 < c < 1$ ，求證： $ab + bc + ca > -1$ 。



證：定義 $f(x) = (b+c)x + bc + 1$

$$f(1) = b + c + bc + 1 = (b+1)(c+1) > 0$$

$$f(-1) = -(b+c) + bc + 1 = (1-b)(1-c) > 0$$

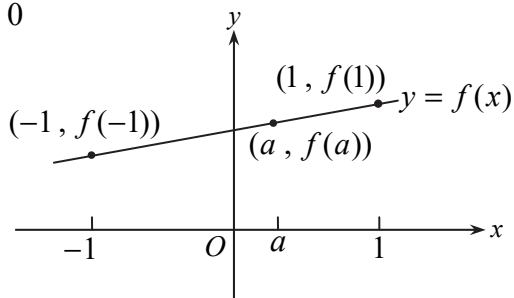
$$\Rightarrow f(a) = (b+c)a + bc + 1$$

$$= ab + bc + ac + 1$$

$$\because -1 < a < 1$$

$\therefore f(a)$ 介在 $f(1)$ 與 $f(-1)$ 之間

故 $f(a) > 0 \Rightarrow ab + bc + ca > -1$ 得證。





回家作業



1. 已知線型函數 $y = ax + b$ 的圖形過 $(2, 5)$, $(1, -1)$ ，求 $x = -5$ 時， y 的對應值。



2. 設 $f(x)$ 為一次函數，若 $f(-1) = 2$, $f(3) = -2$ ，試在 xy 平面上畫出 $y = f(x)$ 之圖形，並求其斜率。

簡答

1. -37 2. 圖略；斜率 $= -1$



回家作業

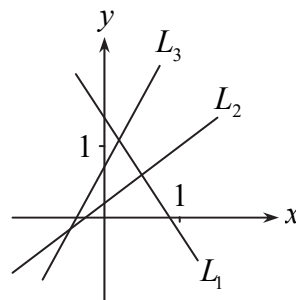


3. $A(k, 5), B(1, 3), C(-2, 1)$ ， $\triangle ABC$ 為直角三角形，且 $\angle B$ 為直角，求 $k = ?$

4. 如右圖，平面上有三直線 $L_1: y = ax + b, L_2: y = cx + d, L_3: y = ex + f$ ，

下列何者正確？請選出來：

- (A) $ab > 0$ (B) $cd < 0$ (C) $a > -1$
(D) $0 < c < 1$ (E) $f > 1$ 。



3. $-\frac{1}{3}$ 4. (D)

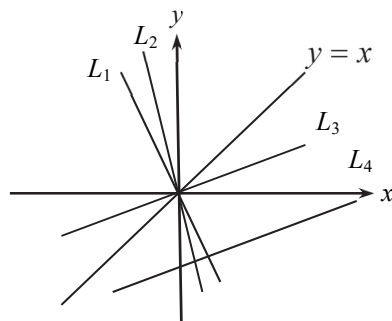


回家作業



5. (98 學測試題)

坐標平面上四條直線 L_1, L_2, L_3, L_4 與 x 軸、 y 軸及直線 $y=x$ 的相關位置如圖所示，其中 L_1 與 L_3 垂直，而 L_3 與 L_4 平行。設 L_1, L_2, L_3, L_4 的方程式分別為 $y = m_1x$, $y = m_2x$, $y = m_3x$ 以及 $y = m_4x + c$ 。



- (1) $m_3 > m_2 > m_1$ (2) $m_1 \cdot m_4 = -1$ (3) $m_1 < -1$
(4) $m_2 \cdot m_3 < -1$ (5) $c > 0$



5. (2)(3)(4)



回家作業

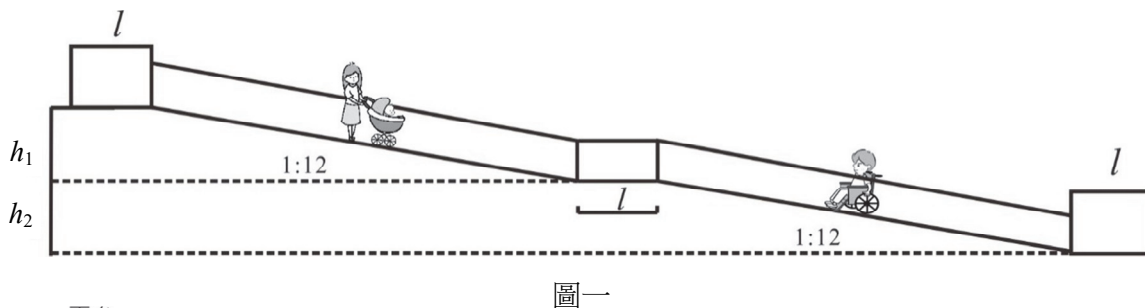


6. (104 數乙試題)

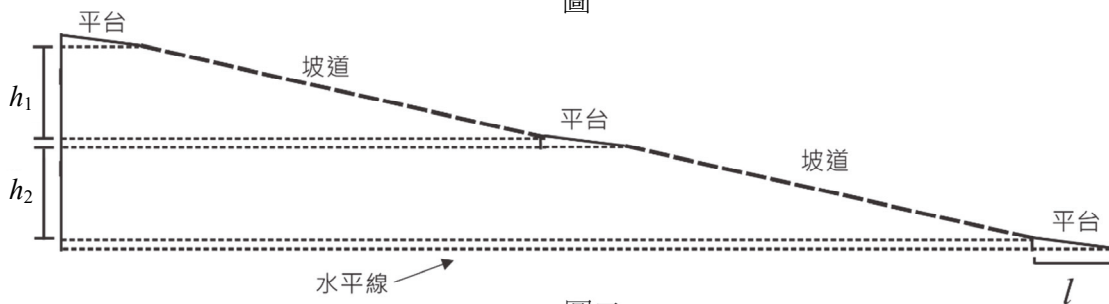
根據內政部營建署《建築物無障礙設施設計規範》，無障礙通路之設計需符合以下規定。

- 坡道之坡度(高度與水平長度之比值)不得大於 $\frac{1}{12}$
- 坡道之起點及終點，應設置長、寬各 150 公分以上之平台。此處的長，指的是水平長度，而非斜面的長度。
- 坡道的中間應設置適當數量的平台，使得每段坡道的高差不超過 75 公分，且平台的水平長度至少 150 公分。
- 各平台之坡度不得大於 $\frac{1}{50}$ 。

圖一與圖二為側面示意圖，圖一摘自此規範書，圖二為圖一的簡明版，其中 $l \geq 150$ ， $h_1, h_2 \leq 75$ ；坡道之坡度相當於坡道斜率之絕對值。



圖一



圖二

依上述規定，一條升高 2 公尺的無障礙坡道，在無轉彎的條件下，其最小可能的水平長度(含平台)為多少公尺？

簡答

6. 28.56 公尺

主題 9 一次函數及其圖形

RZVX



1. 函數的定義

(1) 函數的意義：

令 x, y 為兩變數，當給定 x 的值時， y 的值就被唯一確定。則此對應關係即稱「 y 為 x 之函數」。

(2) 函數的符號：

通常將「 y 為 x 之函數」記為 $y = f(x)$ 。

2. 常數函數

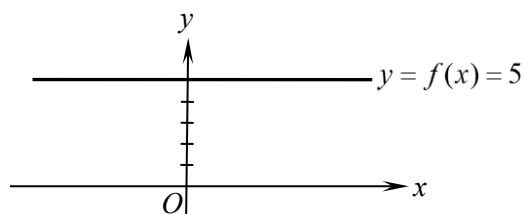
(1) 定義：

若 $f(x) = c$ ，其中 c 為常數。則稱 $f(x)$ 為常數函數。

(2) 圖形表現：

若 $f(x) = c$ ，其中 c 為實數。則 $y = f(x)$

在 xy 平面上的圖形是水平線。

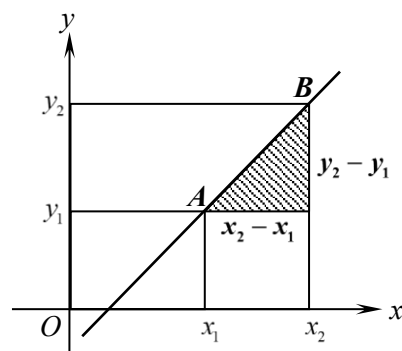


3. 直線的斜率

(1) 斜率的定義：

平面上兩點 $A(x_1, y_1)$ 及 $B(x_2, y_2)$ 間的斜率 m 被定義為鉛直變化量 Δy 與水平變化量 Δx 之比值，即：

$$m = \frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} = \frac{y_1 - y_2}{x_1 - x_2}。$$



(2) 直線的分類：

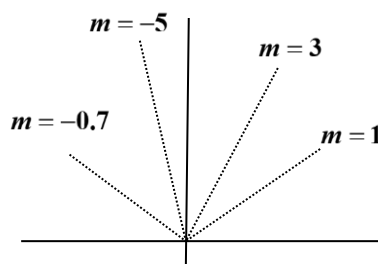
平面上的直線斜率有四種情形：

- ① 若直線右上升，則斜率 $m > 0$ 。
- ② 若直線右下降，則斜率 $m < 0$ 。
- ③ 水平線斜率 $m = 0$ 。
- ④ 鉛直線斜率 不存在。

(3) 斜率與直線的傾斜程度：

假設直線的斜率為 m ，則

「直線越陡 $\Leftrightarrow |m|$ 越大」。



4. 一次函數

(1) 截距的定義：

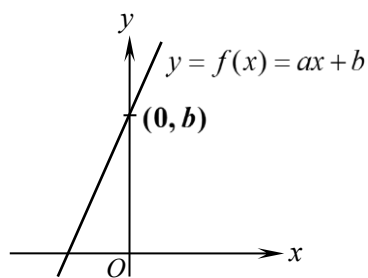
圖形與 x 軸交點之 x 坐標稱為 x 截距；圖形與 y 軸交點之 y 坐標稱為 y 截距。

(2) 斜截式：

$y = ax + b$ 在 xy 平面上的圖形為一直線，且其中 a 為直線的斜率， b 為 y 截距。

(3) 一次函數即直線斜截式：

若 $f(x) = ax + b$ ，其中 $a \neq 0$ 。則稱 $f(x)$ 為一次函數。 $y = f(x)$ 在 xy 平面上的圖形是斜直線。

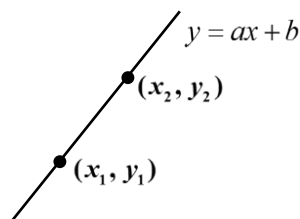


【說明】

設 $(x_1, y_1), (x_2, y_2)$ 為直線 $y = ax + b$ 上的相異兩點，

則 $\begin{cases} y_1 = ax_1 + b \\ y_2 = ax_2 + b \end{cases}$ ，將兩式相減可得 $y_2 - y_1 = a(x_2 - x_1)$ ，

即 $a = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}$ (a 為直線的斜率)。



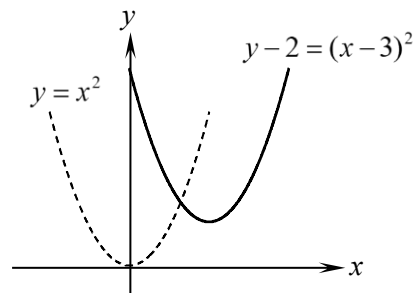
5. 函數圖形的平移

(1) 拋物線平移：

若原圖形 $y = x^2$ 平移 (h, k) ，則新圖形方程式為 $y - k = (x - h)^2$ 。

【說明】

以 $y = x^2$ 與 $y - 2 = (x - 3)^2$ 圖形為例，
如右圖。兩拋物線開口大小與方向皆相同，
互為平移過後的圖形。



(2) 圖形平移：

若平面任意圖形 $f(x, y) = 0$ 平移 (h, k) ，則新圖形為 $f(x - h, y - k) = 0$ 。

【口訣】

方程式圖形平移多少，就減多少

【說例】

若圖形 $y = x^2 + |x|$ 在 xy 平面上平移 $(3, 9)$ ，則新圖形方程式為

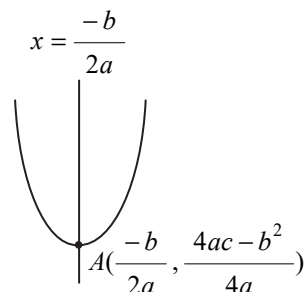
。

主題 9 二次函數及其圖形



【觀念一】 $y = ax^2 + bx + c$ ($a, b, c \in \mathbb{R}, a \neq 0$)

配方得 $y = a(x + \frac{b}{2a})^2 + \frac{4ac - b^2}{4a}$



(1) 開口向上 $\cup$ 條件：

開口向下 $\cap$ 條件：

(2) $a > 0$ ，當 $x = \frac{-b}{2a}$ 有最小值 $= \frac{4ac - b^2}{4a}$

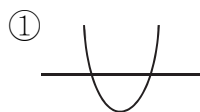
$a < 0$ ，當 $x = \frac{-b}{2a}$ 有最大值 $= \frac{4ac - b^2}{4a}$

$\therefore$ 頂點坐標為 (,)

(3) 對稱軸方程式：

(4) 與 y 軸有交點 (,)

(5) 與 x 軸交點情形



二個交點 $\Rightarrow$ 表示方程式有二相異實根
條件：



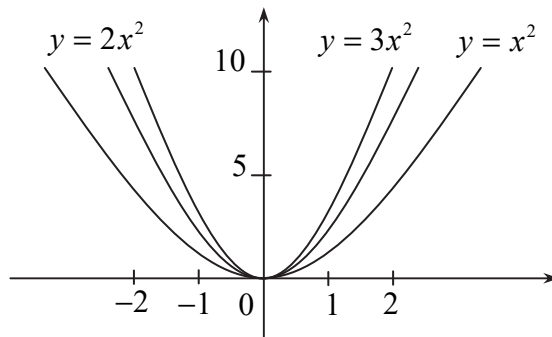
一個切點 $\Rightarrow$ 表示方程式有二相等實根
條件：



無交點 $\Rightarrow$ 表示方程式無實根(是共軛虛根)
條件：

【觀念二】觀察：下列函數圖形(畫在同一坐標平面上)

① $y = f(x) = x^2$ ② $y = f(x) = 2x^2$ ③ $y = f(x) = 3x^2$

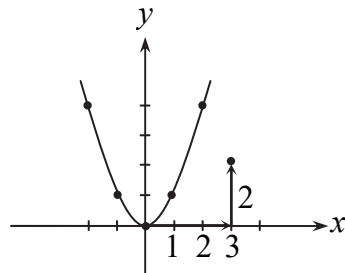


結論 $y = ax^2 + bx + c \Rightarrow |a|$ 愈大，開口 _____

【觀念三】(1) $y = x^2$ 往右 3 單位，往上 2 單位 $\Rightarrow$ 平移(,)

將 $y = x^2$ 平移(3, 2)

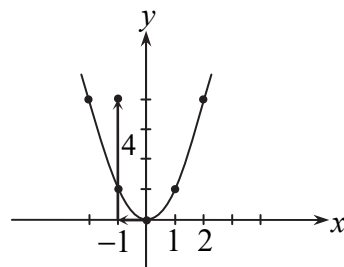
得新函數 $\Rightarrow$



(2) $y = x^2$ 往左 1，往上 4 $\Rightarrow$ 平移(,)

將 $y = x^2$ 平移(-1, 4)

得新函數 $\Rightarrow$

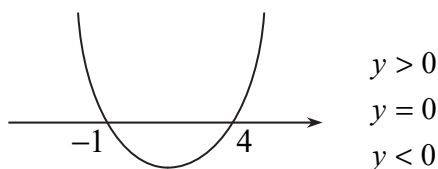


【觀念四】 $y = f(x)$ 平移 $(h, k) \Rightarrow$

口訣 平移 (h, k) ，減 (h, k)

【觀念五】 $y = x^2 - 3x - 4 = (x - 4)(x + 1)$

(1) 圖形



(2) $y > 0$ 即 $(x - 4)(x + 1) > 0 \Rightarrow$

(3) $y = 0$ 即 $(x - 4)(x + 1) = 0 \Rightarrow$

(4) $y < 0$ 即 $(x - 4)(x + 1) < 0 \Rightarrow$

例 1. (能力指標：三點定二次函數)

二次函數 $y = f(x)$ 圖形過 $(0, 1), (1, 3), (2, 7)$ ，求 $f(x) = ?$

解：令 $y = f(x) = ax^2 + bx + c$

$$\begin{aligned} \begin{cases} (0, 1) \text{ 代入} \\ (1, 3) \text{ 代入} \\ (2, 7) \text{ 代入} \end{cases} &\Rightarrow \begin{cases} 1 = c \\ 3 = a + b + c \\ 7 = 4a + 2b + c \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} c = 1 \\ a + b = 2 \\ 4a + 2b = 6 \end{cases} \\ &\Rightarrow \begin{cases} c = 1 \\ a + b = 2 \\ 2a + b = 3 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a = 1 \\ b = 1 \\ c = 1 \end{cases} \end{aligned}$$

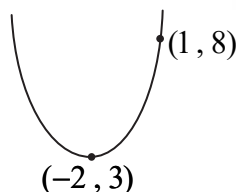
$$\therefore f(x) = x^2 + x + 1$$



例 2. (能力指標：已知頂點)

二次函數 $y = f(x)$ 圖形，頂點 $(-2, 3)$ 且過 $(1, 8)$ ，求 $f(x)$ ？

解： 令 $y = f(x) =$



例 3. (能力指標：已知對稱軸)

二次函數 $y = f(x)$ ，且 $f(1-x) = f(1+x)$ ，並過 $(2, 3), (-1, 0)$ ，求 $f(x)$ ？

解：



例 4. (能力指標：切 x 軸)

二次函數 $y = f(x)$ 圖形切 x 軸且過 $(1, 1), (4, 4)$ ，求 $f(x)$ ？

解： 1° 切點 $(h, 0) \Rightarrow$ 令 $y = f(x) = a(x-h)^2 + 0$

$$2^\circ f(x) \text{ 過 } (1, 1), (4, 4) \Rightarrow \begin{cases} 1 = a(1-h)^2 \dots\dots\dots ① \\ 4 = a(4-h)^2 \dots\dots\dots ② \end{cases}$$

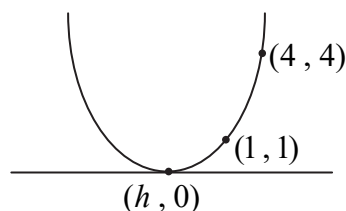
$$\frac{①}{②} \Rightarrow \frac{1}{4} = \frac{(1-h)^2}{(4-h)^2}$$

$$\Rightarrow (2-2h)^2 = (4-h)^2 \Rightarrow (h+2)(3h-6) = 0$$

$$\Rightarrow h = 2, -2$$

$$3^\circ h = 2 \Rightarrow a = 1; h = -2 \Rightarrow a = \frac{1}{9}$$

$$\text{故 } f(x) = (x-2)^2 \text{ 或 } f(x) = \frac{1}{9}(x+2)^2$$



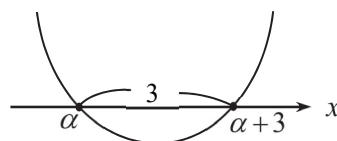
例 5. (能力指標：截軸長)

x 軸被二次函數圖形 $y = f(x)$ 所截線段長為 3，且過 $(0, -4), (3, 8)$ ，求 $f(x)$ ？



解：1° 令圖形與 x 軸分別交於二點， x 坐標分別為 $\alpha, \alpha+3$

$$\Rightarrow y = f(x) =$$



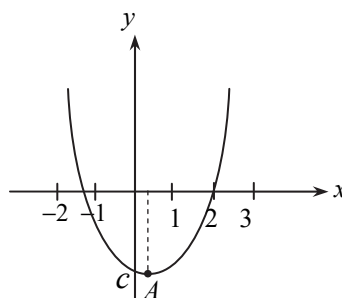
例 6. (能力指標：係數正負判斷)

$y = f(x) = ax^2 + bx + c$ 圖形如右，判斷下列正負？



- | | | | |
|-------------|-------------|-----------|-----------------|
| (1) a | (2) b | (3) c | (4) $b^2 - 4ac$ |
| (5) $a+b+c$ | (6) $a-b+c$ | (7) $a+c$ | (8) $9a+3b+c$ |

解：



例 7. (能力指標：過四象限)

$y = f(x) = (k-1)x^2 + 3x + (2-k)$ ($k \in \mathbb{R}, k \neq 1$) 的圖形通過 4 個象限，求 k 的範圍？

解：

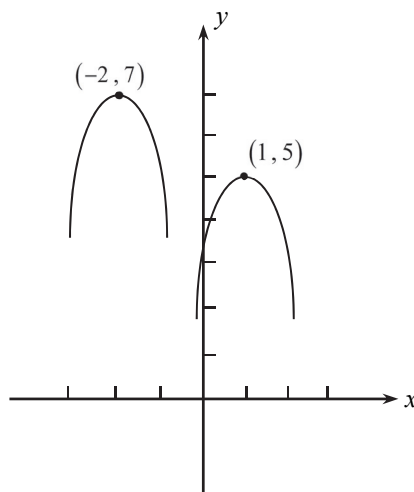


例 8. (能力指標：平移)

$y = -x^2 - 4x + 3$ 圖形沿著 x 軸移動 a 單位，沿著 y 軸移動 b 單位，所得圖形與 $y = -x^2 + 2x + 4$ 之圖形重疊，求 a, b 。

解： 1° $y = -x^2 - 4x + 3 = -(x+2)^2 + 7$

2° $y = -x^2 + 2x + 4 = -(x-1)^2 + 5$



例 9. (能力指標：平移)



$y = x^2$ 向下平移 k ，與 x 軸交於 A, B ，新頂點 C ，若 $\triangle ABC$ 為正 $\triangle$ ，求 k 。

解： 1° $y = x^2$ 向下平移 k ，即平移 $(0, -k)$

$$\therefore \text{新方程式： } y + k = x^2$$

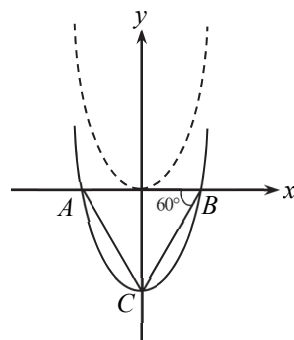
2° 如圖知

$$\text{令 } x = 0 \Rightarrow y = -k \quad \therefore C(0, -k)$$

$$\text{令 } y = 0 \Rightarrow x^2 = k \Rightarrow x = \pm\sqrt{k}$$

$$\therefore A(-\sqrt{k}, 0), B(\sqrt{k}, 0)$$

3°



例 10. (能力指標：鏡射)



二次函數 $f(x) = ax^2 + bx + c$ 之圖形過 $(2, 23), (8, 23)$ 兩點，且 $f(4) > f(5) > 0$ ，若 $f(x)$ 之圖形經適當平移及鏡射後可得 $g(x) = -2x^2 + 5x$ 的圖形，則 $f(6) = \underline{\hspace{2cm}}$ 。

解：

例 11. (能力指標：係數與幾何)

$y = f(x) = ax^2 + bx + c$ 圖形如右，求下列的值(用 a, b, c 表達)？



解：(1) $\overline{PQ} =$

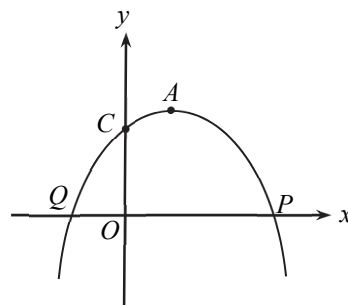
(2) $\triangle APQ$ 面積 =

(3) $\triangle CPQ$ 面積 =

(4) $\overline{OP} \cdot \overline{OQ} =$

(5) $\overline{OP}^2 + \overline{OQ}^2 =$

(6) $\frac{1}{\overline{OP}} + \frac{1}{\overline{OQ}} = \frac{\overline{OP} + \overline{OQ}}{\overline{OP} \cdot \overline{OQ}} =$





回家作業



1. 已知二次函數 $x=2$ 時，有最小值 -1 ，且圖形過 $(4, 7)$ ，求此函數。



2. 設一個二次函數 $y = ax^2 + bx + c$ 的圖形通過 $(0, -7)$, $(1, -11)$ 與 $(2, -11)$ ，
試求 a, b, c 之值。

3. 設一拋物線之對稱軸平行於 y 軸，頂點為 $(-1, -4)$ ，且通過點 $(2, 14)$ ，
試求此拋物線之方程式。

[提示] 可設方程式為 $y = a(x+1)^2 - 4$



1. $y = 2x^2 - 8x + 7$ 2. $a = 2, b = -6, c = -7$ 3. $y = 2x^2 + 4x - 2$



回家作業



4. 設二次函數 $f(x) = ax^2 + bx + c$ 之圖形通過三點 $(-1, 0)$, $(2, 3)$, $(0, 3)$ ，試求：
- (1) $f(x)$ (2) 拋物線 $y = f(x)$ 之頂點坐標。
5. 函數 $f(x) = x^2 + ax + b$ 的頂點坐標為 $(3, 6)$ ，則此函數圖形與 x 軸的交點坐標為何？
6. 函數 $f(x) = ax^2 + bx + c$ 與 y 軸交於 $(0, 4)$ ，且當 $x = 2$ 時， $f(x)$ 有最大值 12，則 a, b, c 之值各是多少？。

簡 答

4. (1) $-x^2 + 2x + 3$ (2) $(1, 4)$ 5. 無交點 6. $a = -2, b = 8, c = 4$

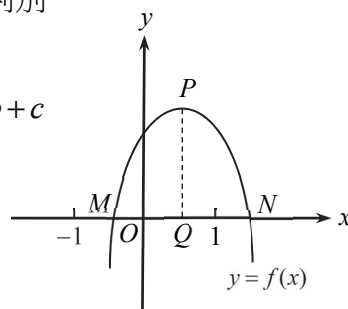


回家作業



7. 已知二次函數 $f(x) = ax^2 + bx + c$ 的圖形如右圖，試判別下列各小題的正負：

- (1) a (2) b (3) c (4) $a+b+c$
(5) $a-b+c$ (6) b^2-4ac (7) $a-\frac{1}{2}b+\frac{1}{4}c$
(8) $2a+b$



8. 將 $y = x^2 + 3x$ 的圖形沿 x 軸平移正 2 單位，再沿 y 軸平移負 5 單位得到函數 $y = f(x)$ 的圖形，試求 $f(x)$ 。

9. 已知 $f(x) = x^2 - 2x + 2$ 與 $g(x) = 2$ 圖形交於 A, B 兩點， C 點為函數 $f(x)$ 的頂點，求 $\triangle ABC$ 的面積。



7. (1)負 (2)正 (3)正 (4)正 (5)負 (6)正 (7)負 (8)負 8. $x^2 - x - 7$ 9. 1



回家作業



10. 設 k 為實數，若二次函數 $y = 2x^2 - 3x + k - 1$ 的圖形與 x 軸交於相異兩點，求 k 的範圍。

11. 已知二次函數 $f(x)$ 的開口向下且滿足 $f(-2+x) = f(-2-x)$ ，

則 $a = f(-\frac{\sqrt{3}}{2})$ 、 $b = f(-\frac{\pi}{3})$ 、 $c = f(-1)$ 。

則 a 、 b 、 c 三數的大小順序為 _____。



10. $k < \frac{17}{8}$

11. $b > c > a$



回家作業



12. (102 學測試題)

設 $a < b < c$ 。已知實係數多項式函數 $y = f(x)$ 的圖形為一開口向上的拋物線，且與 x 軸交於 $(a, 0)$ 、 $(b, 0)$ 兩點；實係數多項式函數 $y = g(x)$ 的圖形亦為一開口向上的拋物線，且跟 x 軸相交於 $(b, 0)$ 、 $(c, 0)$ 兩點。請選出 $y = f(x) + g(x)$ 的圖形可能的選項。

- (1) 水平直線
- (2) 和 x 軸僅交於一點的直線
- (3) 和 x 軸無交點的拋物線
- (4) 和 x 軸僅交於一點的拋物線
- (5) 和 x 軸交於兩點的拋物線

13. (102 數乙試題)

設 a, b, c 為實數，且二次多項式 $f(x) = ax(x-1) + bx(x-3) + c(x-1)(x-3)$ 滿足 $f(0) = 6$ 、 $f(1) = 2$ 、 $f(3) = -2$ 。請問 $a + b + c$ 等於下列哪一個選項？

- (1) 0
- (2) $\frac{2}{3}$
- (3) 1
- (4) $-\frac{1}{2}$
- (5) $-\frac{4}{3}$



12. (4) (5) 13. (2)



回家作業



14. (105 學測試題)

設 $f(x)$ 為二次實係數多項式，已知 $f(x)$ 在 $x = 2$ 時有最小值 1 且 $f(3) = 3$ 。

請問 $f(1)$ 之值為下列哪一選項？

- (1) 5 (2) 2 (3) 3 (4) 4 (5) 條件不足，無法確定

15. (106 數乙試題)

考慮實數 a, b, c ，其中 $a \neq 0$ 。令 Γ 為 $y = ax^2 + bx + c$ 的圖形。試選出正確的選項。

- (1) 若 $a > 0$ ，則 Γ 會通過第一象限 (2) 若 $a < 0$ ，則 Γ 會通過第一象限
(3) 若 $b^2 - 4ac > 0$ ，則 Γ 會通過第一象限 (4) 若 $c > 0$ ，則 Γ 會通過第一象限
(5) 若 $c < 0$ ，則 Γ 會通過第一象限



14. (3) 15. (1) (4)

主題 10 二次函數最大、最小值

NHQQ



【觀念一】 $y = f(x) = ax^2 + bx + c$ ($a, b, c \in \mathbb{R}, a \neq 0$), $x \in \mathbb{R}$

(1) $a > 0$, 當 $x = \frac{-b}{2a}$, y 最小值 =

(2) $a < 0$, 當 $x = \frac{-b}{2a}$, y 最大值 =

【觀念二】 $y = f(x) = ax^2 + bx + c$ ($a, b, c \in \mathbb{R}, a \neq 0$), x 有限制範圍

(1)



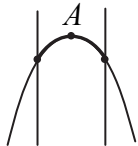
(2)



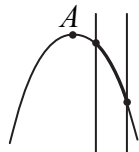
(3)



(4)



(5)



(6)



【觀念三】最小二乘方(平方係數皆為 1)

$$\begin{aligned} (1) \quad f(x) &= (x-a)^2 + (x-b)^2 + (x-c)^2 \\ &= 3x^2 - 2(a+b+c)x + a^2 + b^2 + c^2 \\ &= 3\left(x - \frac{a+b+c}{3}\right)^2 + a^2 + b^2 + c^2 - \frac{(a+b+c)^2}{3} \end{aligned}$$

(2) 當 $x = \frac{a+b+c}{3}$, $f(x)$ 最小值 $= f\left(\frac{a+b+c}{3}\right)$

結論 平方和求最小值時 x = 算術平均數

【觀念四】二乘方的最大、最小值

$$\begin{aligned}f(x) &= a(x-\alpha)^2 + b(x-\beta)^2 + c(x-\gamma)^2 \\&= (a+b+c)\left(x - \frac{a\alpha+b\beta+c\gamma}{a+b+c}\right)^2 + \square\end{aligned}$$

$$\text{當 } x = \frac{a\alpha+b\beta+c\gamma}{a+b+c} \text{ (加權平均)}$$

且 $a+b+c < 0$ 時， $f(x)$ 有最大值

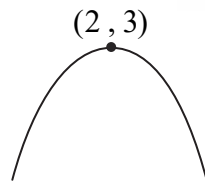
$a+b+c > 0$ 時， $f(x)$ 有最小值

$$\begin{aligned}\text{《說例》 } f(x) &= \left(\frac{x+1}{3}\right)^2 + \sqrt{2}(x-5)^2 - (3x+7)^2 \\&= \frac{1}{9}(x+1)^2 + \sqrt{2}(x-5)^2 - 9\left(x+\frac{7}{3}\right)^2 \\&\text{當 } x = \frac{\frac{1}{9}(-1) + \sqrt{2}(5) + (-9)\left(-\frac{7}{3}\right)}{\frac{1}{9} + \sqrt{2} + (-9)} \text{ 時， } f(x) \text{ 有最大值}\end{aligned}$$

例 1. (能力指標：極值定係數)

$$y = f(x) = ax^2 + bx + \frac{1}{a} \text{ 在 } x = 2 \text{ 有最大值 } 3, \text{ 求 } a, b ?$$

解：



例 2. (能力指標：合成極值)

$f(x) = x^2 + 2x + 3$, $-1 \leq x \leq 1$, 求 $f(f(x))$ 最大值、最小值？

解：(1) $f(x) = (x+1)^2 + 2$ ($-1 \leq x \leq 1$)

當 $x = -1$, 最小值 = 2

當 $x = 1$, 最大值 = 6

$$\therefore 2 \leq f(x) \leq 6$$

(2) $f(f(x)) = f(t) = (t+1)^2 + 2$ ($2 \leq t \leq 6$)

當 $t =$, 最小值 =

當 $t =$, 最大值 =

例 3. (能力指標：圖解極值)

設函數 $y = f(x) = |x^2 - 1| + x$,

(1) 求 $f(x)$ 的最小值。

(2) $|x^2 - 1| + x = k$, 就 k 值討論實數根個數。

解：



例 4. (能力指標：最小二乘方)

LNPC



$$y = f(x) = (x-1)^2 + 2(x-2)^2 + 3(x-3)^2, \text{ 求 } f(x) \text{ 最小值} = ?$$

解： $f(x) = (x-1)^2 + 2(x-2)^2 + 3(x-3)^2$

$$= (x-1)^2 + (x-2)^2 + (x-2)^2 + (x-3)^2 + (x-3)^2 + (x-3)^2$$

看成六組完全平方和，當 $x =$

$f(x)$ 有最小值 =

例 5. (能力指標：最小二乘方)

RGHB



$$y = f(x) = (x-1)^2 + \frac{1}{2}(x-2)^2 + \frac{1}{3}(x-3)^2, \text{ 求 } f(x) \text{ 最小值} = ?$$

解： **法 1** $y = f(x) = (x-1)^2 + \frac{1}{2}(x-2)^2 + \frac{1}{3}(x-3)^2$

$$= \frac{1}{6}[6(x-1)^2 + 3(x-2)^2 + 2(x-3)^2]$$

看成 11 組完全平方和，當

$$x = \frac{1+1+1+1+1+1+2+2+2+3+3}{11} = \frac{18}{11}$$

$f(x)$ 有最小值 =

法 2 當 $x = \frac{1 \times 1 + \frac{1}{2} \times 2 + \frac{1}{3} \times 3}{1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3}} = \frac{3}{\frac{6+3+2}{6}} = \frac{18}{11}$ 時， $f(x)$ 有最小值

例 6. (能力指標：共同項設 t)

$f(x) = (x^2 + 4x + 5)(x^2 + 4x + 2) + 2x^2 + 8x + 1$ ，求 $f(x)$ 最小值？

解： 1° 令 $t = x^2 + 4x = (x + 2)^2 - 4$ ($\therefore t \geq -4$)

2° 原式 $y = (t + 5)(t + 2) + 2t + 1$

$$= t^2 + 9t + 11$$

$$= \left(t + \frac{9}{2}\right)^2 - \frac{37}{4} \quad (\because t \geq -4)$$

EYCL



例 7. (能力指標：共同項設 t)

設函數 $f(x) = -x^2 - 6x + 4 - \frac{6}{x} - \frac{1}{x^2}$

(1) 若 $x > 0$ ，試求 $f(x)$ 之最大值與此時的 x 值。

(2) 若 $x < 0$ ，試求 $f(x)$ 之最大值與此時的 x 值。

解：

CCJE



例 8. (能力指標：集項配方法、偏配方法)

$$f(x, y) = 5x^2 - 4xy + y^2 - 10x + 6y + 5$$

當 $x = \underline{\hspace{2cm}}$, $y = \underline{\hspace{2cm}}$ 時, $f(x)$ 有最小值 $= \underline{\hspace{2cm}}$ 。

解：1° 觀察 x^2, y^2 係數, y^2 較簡單對 y 作配方

$$\begin{aligned} f(x, y) &= 5x^2 - 4xy + y^2 - 10x + 6y + 5 \\ &= y^2 + (6 - 4x)y + (5x^2 - 10x + 5) \\ &= (y + 3 - 2x)^2 + x^2 + 2x - 4 \\ &= (y + 3 - 2x)^2 + (x + 1)^2 - 5 \end{aligned}$$

$$\text{令 } \begin{cases} y + 3 - 2x = 0 \\ x + 1 = 0 \end{cases} \quad \text{得 } x = -1, y = -5$$

故最小值 $= -5$

UITA



例 9. (能力指標：開放置換)

$x + 2y = 1$, 求 $x^2 + y^2$ 最小值?

解：1° $\because x + 2y = 1 \therefore x = 1 - 2y$ 代入

$$2^\circ \therefore x^2 + y^2 = (1 - 2y)^2 + y^2 = 5y^2 - 4y + 1$$

MWEL



例 10. (能力指標：封閉置換)

$x^2 + y^2 = 1$ ，求 $x^2 + 2y^2$ 最大、最小值？

解：本題要小心：

$$1^\circ \quad y^2 = 1 - x^2 \quad \because y^2 \geq 0 \quad \therefore 1 - x^2 \geq 0 \Rightarrow -1 \leq x \leq 1$$

$$2^\circ \quad x^2 + 2y^2 = x^2 + 2(1 - x^2) = -x^2 + 2 \quad (-1 \leq x \leq 1)$$

ASCL



例 11. (能力指標：三元化一元)

$x, y, z \in \mathbb{R}$, $\begin{cases} x - y + z = 3 \\ 2x - y - z = 4 \end{cases}$ ，求 $x^2 + y^2 + z^2$ 最小值？

解： $1^\circ \quad \begin{cases} x - y = 3 - z \\ 2x - y = 4 + z \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = 2z + 1 \\ y = 3z - 2 \end{cases}$

$$2^\circ \quad x^2 + y^2 + z^2 = (2z + 1)^2 + (3z - 2)^2 + z^2 \\ = 14z^2 - 8z + 5$$

FJZL



例 12. (能力指標：判別式法)

$x \in \mathbb{R}$, $f(x) = \frac{x^2 - x + 1}{x^2 + x + 1}$, 求 $f(x)$ 的最大值、最小值？

解：



例 13. (能力指標：判別式應用)

已知 $x^2 + xy + y^2 = 1$, 求 $x + y$ 最大、最小值？

解：



例 14. (能力指標：消 k 判別式法)

已知 $x^2 + xy + y^2 = 1$, 求 $x^2 - xy + y^2$ 最大、最小值？

解：





回家作業



1. 設 x, y 為實數，且 $2x+3y=4$ ，試求 $2x^2+3y^2$ 之最小值。



2. 求下列函數的最大值或最小值：

(1) $f(x) = -x^2 + 4x + 3$ ，其中 $|x-1| \leq 4$

(2) $g(x) = |x^2 - 9| - 4x$ ，其中 $-3 \leq x \leq 2$

3. 已知二次函數 $y = ax^2 + bx + 5$ 在 $x = 2$ 時有最小值 1，試求常數 a, b 的值。



1. $\frac{16}{5}$ 2. (1) 最大 7，最小 -18 (2) 最大 13，最小 -3 3. $a=1, b=-4$

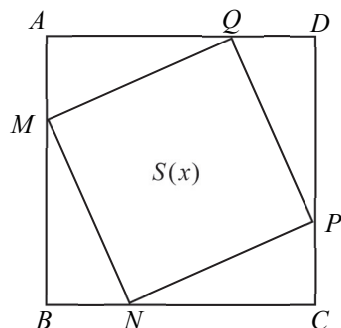


回家作業



4. 設 $f(x) = (x-2.1)^2 + (x-2.2)^2 + (x-2.3)^2 + (x-3.7)^2 + (x-3.8)^2 + (x-3.9)^2$ ，
如果 $f(x)$ 在 $x = x_0$ 時，取得最小值 y_0 ，試求 x_0 及 y_0 。

5. 給定一個正方形 $ABCD$ ，邊長為 a ，今在四條邊上分別取 M, N, P, Q 四點使 $\overline{AM} = \overline{BN} = \overline{CP} = \overline{DQ}$ ，
連接 M, N, P, Q 得到一個內接正方形，設 $\overline{AM} = x$ ，
試將正方形 $MNPQ$ 的面積為 S 表示成 x 的函數。
又 x 取何值時，面積 S 有最小值？



6. 設 x, y 為任意實數且滿足 $x^2 + 3y^2 = 1$ ，求 $2x + 3y^2$ 之最大值及最小值。

簡 答

4. $x_0 = 3, y_0 = 3.88$ 5. $x = \frac{1}{2}a, S = \frac{1}{2}a^2$ 6. 最大 2，最小 -2



回家作業



7. 設 $x \in \mathbb{R}$ ，求函數 $f(x) = (x^2 + 3x + 1)(x^2 + 3x + 2) + 3x^2 + 9x + 2$ 之最小值及相對應的 x 值。

【提示】令 $t = x^2 + 3x$ ，將 $f(x)$ 表成 t 的二次函數，並注意 t 值範圍。

8. 一根繩子長 180 公分欲圍成最大矩形，則矩形面積是多少？

9. 設 $x^2 + 3y^2 = 4$ ，求 $5x + 6y^2$ 的最大值與最小值。



7. 最小 $-\frac{71}{16}$ ， $x = -\frac{3}{2}$ 8. 2025 9. 最大 $\frac{89}{8}$ ，最小 -10



回家作業



10. 假設 α, β 是多項方程式 $x^2 - (k+2)x + (-k^2 + k + 1) = 0$ 的兩個實根, k 是實數。
求 (1) k 的範圍 (2) $\alpha^2 + \beta^2$ 的最小值。

11. 設有二個正數之和為 10, 則此二正數之積的最大值是_____。

12. 已知二次函數 $f(x) = -x^2 + ax + b$, $x \in \mathbb{R}$, 當 $x = 1$ 時, $f(x)$ 有最大值 3,
則 $a =$ _____, $b =$ _____。



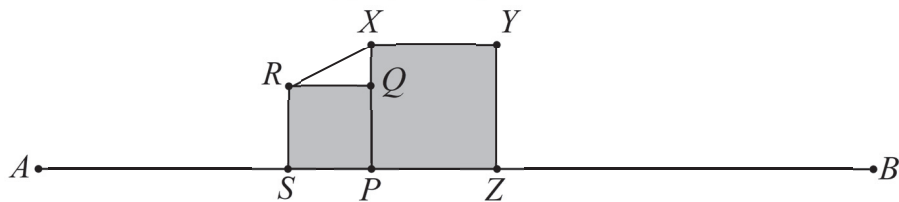
10. (1) k 為任意實數 (2) $\frac{5}{3}$ 11. 25 12. $a = 2, b = 2$



回家作業



13. 如下圖， $\overline{AB}$ 是一條長度為 20 的鐵絲， P 是 $\overline{AB}$ 上一點，將 $\overline{PA}$ 分為四等分使其圍成一正方形 $PQRS$ ；將 $\overline{PB}$ 分為四等分，使其圍成另一正方形 $PXYZ$ ，連接 $\overline{RX}$ ，則當 $\overline{RX}$ 長度為最小時，試求 $\overline{AP}$ 的長度。



14. 利用圖形討論方程式 $x^2 + 5x - |3x + 6| = a$ 的相異實根個數與 a 值範圍的關係。

15. 設 x 為實數，求 $f(x) = \frac{5x^2 + 8x + 5}{x^2 + 1}$ 的最大值與最小值。



13. 8 14. 見詳解 15. 最大值為 9，最小值為 1



回家作業



16. (96 學測試題)

設某沙漠地區某一段時間的溫度函數為 $f(t) = -t^2 + 10t + 11$ ，其中 $1 \leq t \leq 10$ ，則這段時間內該地區的最大溫差為

- (1) 9 (2) 16 (3) 20 (4) 25 (5) 36

17. (98 數乙試題)

某玩具製造工廠，每次接到訂單都需開模 5 萬元，製造每一千個玩具材料費需 2 萬元，由此建立生產的基本成本函數 $f(x) = 5 + 2x$ ，其中 x 以千個為單位。依過去經驗，接到訂單數量與報價總值有如下關係：

數量(千個)	報價總值(萬元)
5	37.5
10	70
15	97.5

以此資料建立一個二次函數的報價總值函數 $g(x)$ ，以及獲利函數

$$h(x) = g(x) - f(x)$$

- (1) 若接到訂單為 20 千個，試問交貨時，每千個玩具的基本成本平均是多少萬元？
- (2) 試求報價總值函數 $g(x)$ 。
- (3) 根據 $h(x)$ ，試問訂單數量是多少時，獲利總值最高？



16. (4) 17. (1) 2.25 萬元 (2) $g(x) = 8x - \frac{x^2}{10}$ (3) 3 萬個



回家作業



18. (101 數乙試題)

設二次實係數多項式函數 $f(x) = ax^2 + 2ax + b$ 在區間 $-1 \leq x \leq 1$ 上的最大值為 7、最小值為 3。試求數對 (a, b) 的所有可能值。



18. $(1, 4), (-1, 6)$

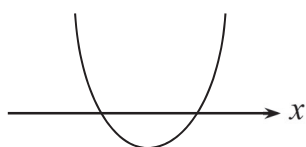
主題 11 二次函數與直線的關係

VRZR

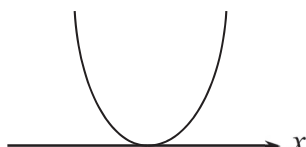


【觀念一】 $f(x) = ax^2 + bx + c$ ，方程式 $f(x) = 0$ 的實根

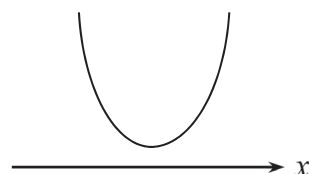
$\Rightarrow y = f(x)$ 圖形與 x 軸交點的 x 坐標



$$b^2 - 4ac > 0$$



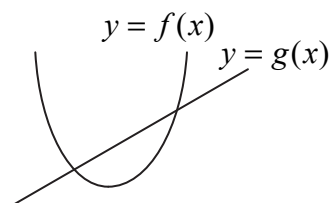
$$b^2 - 4ac = 0$$



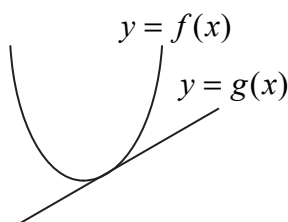
$$b^2 - 4ac < 0$$

【觀念二】 $\begin{cases} y = f(x) = ax^2 + bx + c \\ y = g(x) = px + q \end{cases}$

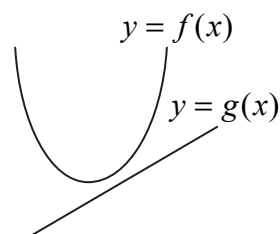
方程組的實數解 $\Rightarrow y = f(x)$ 與 $y = g(x)$ 圖形交點的 x 坐標



$$D > 0$$



$$D = 0$$



$$D < 0$$

例 1. (能力指標：x 軸弦長)

$a, b \in \mathbb{R}$ ，已知坐標平面上拋物線 $y = x^2 + ax + b + 1$ 與 x 軸交於 P, Q 兩點，且 $\overline{PQ} = 9$ 。若拋物線 $y = x^2 + ax + (b + 3)$ 與 x 軸的兩交點為 R, S ，則 $\overline{RS} =$ _____。

解：



例 2. (能力指標：恰交一點)

坐標平面上，若直線 $y = ax + b$ (其中 $a, b \in \mathbb{R}$) 與二次函數 $y = x^2$ 的圖形恰交於一點，亦與二次函數 $y = (x - 2)^2 + 12$ 的圖形恰交一點，則 $a =$ _____， $b =$ _____。

解：





回家作業



1. 已知拋物線 $f(x) = -x^2 + ax + b$ 的圖形與 x 軸交於 A, B 兩點，
且 $\overline{AB} = \sqrt{15}$ ， $y = f(x)$ 圖形與直線 $y = x$ 恰相交於一點，
試求 $a = \underline{\hspace{2cm}}$ ， $b = \underline{\hspace{2cm}}$ 。

本題無數位影音服務，
請同學詳實練習並善用輔導資源



1. $a = 8, b = -\frac{49}{4}$



回家作業



2. (105 數甲試題)

假設 a, b 皆為非零實數，且坐標平面上二次函數 $y = ax^2 + bx$ 與一次函數 $y = ax + b$ 的圖形相切。請選出切點所在位置為下列哪一個選項。

- (1) 在 x 軸上
- (2) 在 y 軸上
- (3) 在第一象限
- (4) 在第四象限
- (5) 當 $a > 0$ 時，在第一象限；當 $a < 0$ ，在第四象限



2. (1)



1. 二次方程式根的處理

(1) 韋達定理：

二次方程式 $ax^2 + bx + c = 0$ 的兩根為 α, β ，則

$$\begin{cases} \alpha + \beta = -\frac{b}{a} \\ \alpha\beta = \frac{c}{a} \end{cases}。$$

【說明】

$$ax^2 + bx + c = a(x - \alpha)(x - \beta) \Rightarrow x^2 + \frac{b}{a}x + \frac{c}{a} = x^2 - (\alpha + \beta)x + (\alpha\beta)$$

(2) 代數聯想：

由二次方程式 $ax^2 + bx + c = 0$ 的兩根為 α, β ，必須要想到：

① 因式分解： $ax^2 + bx + c = a(x - \alpha)(x - \beta)$

② 根與係數關係： $\alpha + \beta = \frac{-b}{a}, \alpha\beta = \frac{c}{a}$

③ 根代入方程式： $\begin{cases} a\alpha^2 + b\alpha + c = 0 \\ a\beta^2 + b\beta + c = 0 \end{cases}$

【說例】

已知二次方程式 $3x^2 - 5x - 4 = 0$ 之兩根為 α, β ，則我們可以聯想

① 因式分解：

② 根與係數關係：

③ 根代入方程式：

2. 二次函數圖形與直線的交點

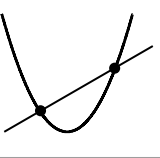
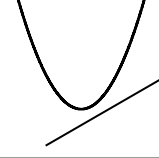
(1) 判斷交點：

判斷平面上的二次函數圖形 $\Gamma: y = ax^2 + bx + c$ 和直線 $L: y = mx + k$ 有無交點，可由

方程組 $\begin{cases} \Gamma: y = ax^2 + bx + c \\ L: y = mx + k \end{cases}$ 合併成 $Ax^2 + Bx + C = 0$ ，接著再求方程式的實數解個數。

(2) 交點個數：

在 $Ax^2 + Bx + C = 0$ 中，令 $D = B^2 - 4AC$ ，由 D 可判斷交點數。

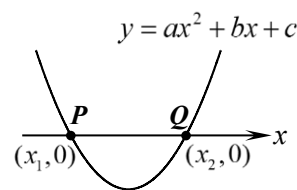
圖形			
幾何意義	兩圖形交兩點	兩圖形切一點	兩圖形無交點
條件	$D > 0$	$D = 0$	$D < 0$

3. 弦長公式 [非課綱範圍公式，請自行參考]

(1) 弦在 x 軸上：

若二次函數圖形 $y = ax^2 + bx + c$ 與 x 軸交於

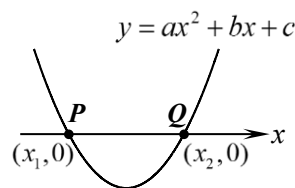
$P(x_1, 0)$, $Q(x_2, 0)$ 兩點，則 $\overline{PQ} = \frac{\sqrt{b^2 - 4ac}}{|a|}$ 。



【說明】

$$\begin{cases} y = ax^2 + bx + c \\ y = 0 \end{cases} \Rightarrow ax^2 + bx + c = 0 \quad [\text{兩根 } x_1, x_2]$$

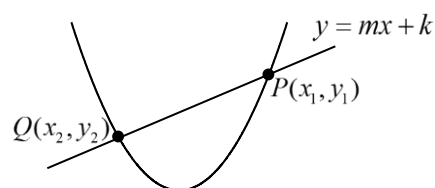
$$\begin{aligned} \overline{PQ} &= |x_1 - x_2| = \sqrt{(x_1 + x_2)^2 - 4x_1x_2} \\ &= \sqrt{\left(\frac{-b}{a}\right)^2 - 4\left(\frac{c}{a}\right)} = \frac{\sqrt{b^2 - 4ac}}{|a|} \end{aligned}$$



(2) 弦在斜直線上：

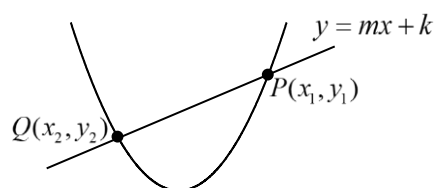
若任意二次曲線 $\Gamma: f(x, y) = 0$ 與直線 $L: y = mx + k$ 交於 $P(x_1, y_1)$, $Q(x_2, y_2)$ 兩點，若將兩方程式併成 $Ax^2 + Bx + C = 0$ 且兩根為 x_1, x_2 ，則弦長

$$\overline{PQ} = \boxed{\sqrt{(1+m^2)[(x_1+x_2)^2 - 4(x_1x_2)]}} \quad .$$



【說明】

$$\begin{aligned} \overline{PQ} &= \sqrt{(x_1 - x_2)^2 + (y_1 - y_2)^2} \\ &= \sqrt{(x_1 - x_2)^2 + m^2(x_1 - x_2)^2} \\ &= \sqrt{(1+m^2)(x_1 - x_2)^2} \\ &= \sqrt{(1+m^2)[(x_1+x_2)^2 - 4(x_1x_2)]} \end{aligned}$$



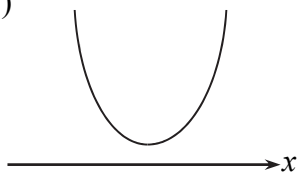
主題 12 二次函數恆正恆負

NSIA



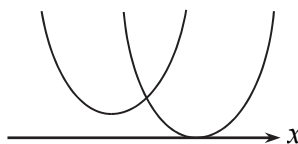
【觀念一】關於 $y = ax^2 + bx + c$ 圖形如下：

(1)



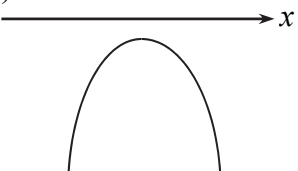
其意為 $\forall x \in \mathbb{R}, ax^2 + bx + c > 0$,
條件 {

(2)



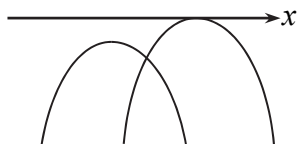
其意為 $\forall x \in \mathbb{R}, ax^2 + bx + c \geq 0$,
條件 {

(3)



其意為 $\forall x \in \mathbb{R}, ax^2 + bx + c < 0$,
條件 {

(4)



其意為 $\forall x \in \mathbb{R}, ax^2 + bx + c \leq 0$,
條件 {

【觀念二】使用上述恆正恆負觀念時，必須在 $a \neq 0$ ，圖形確定是拋物線才可使用。

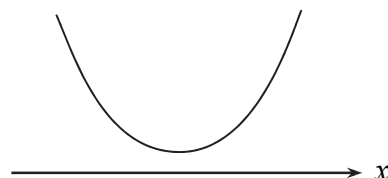
例 1. (能力指標：恆正)

$f(x) = ax^2 + bx + c$ ($a > 0$)，已知 $b^2 - 4ac < 0$ ，判斷
 $(a+b+c)(a-b+c)(2b-4a-c)$ 正負。



解：1° 由 $a > 0$ 且 $b^2 - 4ac < 0$ 知圖形如右

$$\begin{aligned} 2^\circ & (a+b+c)(a-b+c)(2b-4a-c) \\ &= (a+b+c)(a-b+c)(-1)(4a-2b+c) \\ &= \end{aligned}$$



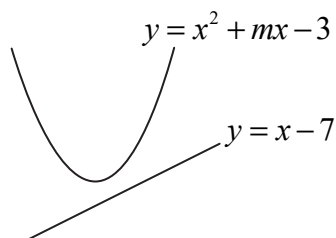
例 2. (能力指標：圖形上方、下方)

$y = x^2 + mx - 3$ 圖形在 $y = x - 7$ 之上方，求實數 m 範圍？



解：1° 由圖知 $x^2 + mx - 3 > x - 7$ (恆成立)

$$\Rightarrow x^2 + (m-1)x + 4 > 0 \text{ (恆成立)}$$



例 3. (能力指標：圖形上方、下方)

$\forall x \in \mathbb{R}, f(x) = x^2 - (k-3)x + 4, g(x) = -x^2 + (k-1)x + (k-2),$
 $y = f(x)$ 恆在 $y = g(x)$ 上方時，求 k 範圍。



解： $\forall x \in \mathbb{R}, y = f(x)$ 恆在 $y = g(x)$ 上方

$$\text{即 } \forall x \in \mathbb{R}, x^2 - (k-3)x + 4 > -x^2 + (k-1)x + (k-2)$$

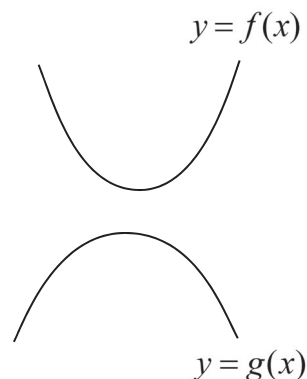
$$\Rightarrow \forall x \in \mathbb{R}, 2x^2 + (4-2k)x + (6-k) > 0$$

$$\Rightarrow \begin{cases} D < 0 \\ 2 > 0 \end{cases} \quad \therefore (4-2k)^2 - 8(6-k) < 0$$

$$\Rightarrow k^2 - 2k - 8 < 0$$

$$\Rightarrow (k-4)(k+2) < 0$$

$$\Rightarrow -2 < k < 4$$



例 4. (能力指標：夾擊不等式)

$\forall x \in \mathbb{R}, -6x - 9 < x^2 + ax + a - 1 < 2(x^2 + 2x + 2)$ 恆成立，
 求 a 範圍。



解： $1^\circ \forall x \in \mathbb{R}, \begin{cases} -6x - 9 < x^2 + ax + a - 1 \\ x^2 + ax + a - 1 < 2(x^2 + 2x + 2) \end{cases}$

$$\Rightarrow \forall x \in \mathbb{R}, \begin{cases} x^2 + (a+6)x + (a+8) > 0 \\ x^2 + (4-a)x + (5-a) > 0 \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} D_1 = (a+6)^2 - 4(a+8) < 0 \\ D_2 = (4-a)^2 - 4(5-a) < 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a^2 + 8a + 4 < 0 \\ a^2 - 4a - 4 < 0 \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} -4 - 2\sqrt{3} < a < -4 + 2\sqrt{3} \\ 2 - 2\sqrt{2} < a < 2 + 2\sqrt{2} \end{cases} \Rightarrow 2 - 2\sqrt{2} < a < -4 + 2\sqrt{3}$$

例 5. (能力指標：領導係數未知)

$\forall x \in \mathbb{R}, f(x) = ax^2 - 2ax + 2a, f(x) < 3$ 恆成立，求 a 範圍？

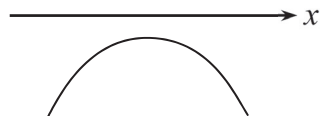
解：1° $\forall x \in \mathbb{R}, ax^2 - 2ax + 2a < 3 \Rightarrow \forall x \in \mathbb{R}, ax^2 - 2ax + 2a - 3 < 0$

2° 不能確定是否為二次函數 $\therefore$ 要討論

(1) 若 $a = 0$ ，則 $-3 < 0 \Rightarrow$

(2) 若 $a \neq 0$ ，則圖形為拋物線 $\Rightarrow$ 圖形可為

條件是 {



例 6. (能力指標：無實數解)

$mx^2 + 2x - 2 \geq 0$ 無實數解，求 m 範圍。

解：





回家作業



1. 若不論 x 為任何實數， $kx^2 + 2x + k > 0$ 恆成立，試求 k 的範圍。



2. 設 $y = x^2 - 2kx + 3k$ 的圖形恆在 $y = -4$ 的圖形上方，試求 k 的範圍。

3. 當 x 是任意實數時，不等式 $3x^2 + ax \geq a$ 恆成立，求實數 a 的範圍。



1. $k > 1$ 2. $-1 < k < 4$ 3. $-12 \leq a \leq 0$



回家作業



4. 設曲線 $\Gamma: y = x^2 + ax + a$ ($a \in \mathbb{R}$)，若 Γ 恆在直線 $y + 3 = 0$ 的上方，試求 a 的範圍。

5. 設 k 為實數，且不論 x 為何實數， $x^2 + kx + 4$ 的值恆為正，求 k 值的範圍。

6. 設 m 為一實數，若 $\frac{2x^2 + 2mx + m}{4x^2 + 6x + 3} < 1$ 對所有實數 x 均成立，試求 m 之範圍。



4. $-2 < a < 6$ 5. $-4 < k < 4$ 6. $1 < m < 3$



回家作業



7. (95 數甲試題)

試問方程式 $(x^2 + x + 1)^3 + 1 = 0$ 有幾個相異實數解？

- (1) 0 個 (2) 1 個 (3) 2 個 (4) 3 個 (5) 6 個



7. (1)



CRLN



1. (能力指標：限定範圍恆正)

當 $0 \leq x \leq 4$ 恆有 $f(x) = x^2 - 2mx + 2m + 3 > 0$ ，求 m 範圍。

解： 1° $f(x) = (x-m)^2 + (-m^2 + 2m + 3)$

頂點 $(m, -m^2 + 2m + 3)$

2° 為了使 $0 \leq x \leq 4$ 範圍內， $f(x) > 0$

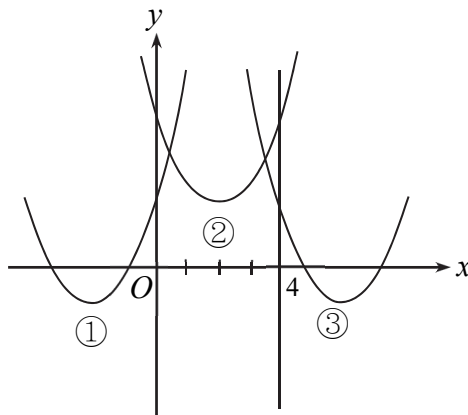
圖形有①②③種可能

$$\begin{aligned} \textcircled{1} \quad \begin{cases} m < 0 \\ f(0) > 0 \end{cases} &\Rightarrow \begin{cases} m < 0 \\ 2m + 3 > 0 \end{cases} \\ &\Rightarrow -\frac{3}{2} < m < 0 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \textcircled{2} \quad \begin{cases} 0 \leq m \leq 4 \\ -m^2 + 2m + 3 > 0 \end{cases} &\Rightarrow \begin{cases} 0 \leq m \leq 4 \\ -1 < m < 3 \end{cases} \\ &\Rightarrow 0 \leq m < 3 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \textcircled{3} \quad \begin{cases} m > 4 \\ f(4) > 0 \end{cases} &\Rightarrow \begin{cases} m > 4 \\ m < \frac{19}{6} \end{cases} \\ &\Rightarrow m \text{ 無解} \end{aligned}$$

$$\text{綜合}\textcircled{1}\textcircled{2}\textcircled{3} \Rightarrow -\frac{3}{2} < m < 3$$



(3) 重要觀念：

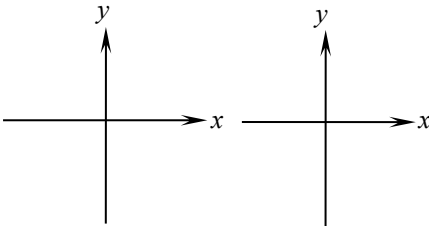
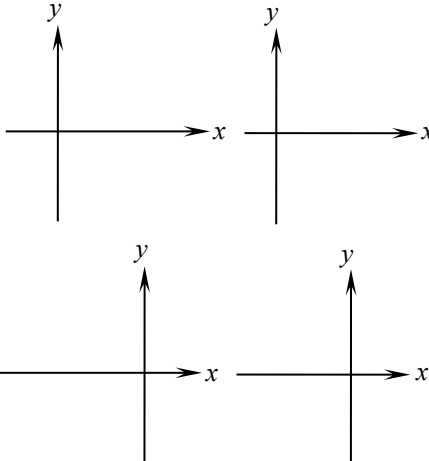
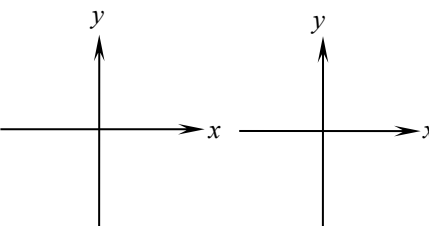
① 題給 $f(x) = ax^2 + bx + c$ 恆正或恆負時，必先判斷 a 是否為 0 。

② 若 $f(x) = ax^2 + bx + c \geq 0$ (或 ≤ 0) 且 $a \neq 0$ 時，則 $y = f(x)$ 圖形為拋物線，才可使用上述觀念處理；幾何上，可視為拋物線 $y = f(x)$ 。

③ 若 $f(x) = ax^2 + bx + c$ 恆正或恆負且 $a = 0$ 時，則 $y = f(x)$ 圖形為直線，即 $f(x) = bx + c$ ，且實際上應為 $f(x) = c$ ，因為水平線的函數值才能恆正或恆負。

2. 二次函數圖形過象限的討論 [自行參考]

二次實係數函數 $f(x) = ax^2 + bx + c$ 且方程式 $f(x) = 0$ 的兩根為 α, β ，作圖形討論：

圖形特徵	圖形聯想	條件
過四個象限		
過三個象限		
過兩個象限		



多項式函數圖形與多項式不等式

主題

13

三次函數及其圖形

JPUA



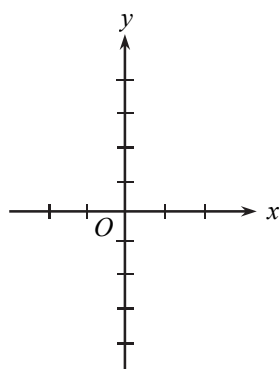
【觀念一】 $y = f(x) = ax^3$ 圖形

(1) $f(-x) = a(-x)^3 = -ax^3 = -f(x)$ ，函數為奇函數，圖形本身對稱原點 O ，即原點 O 為對稱中心。

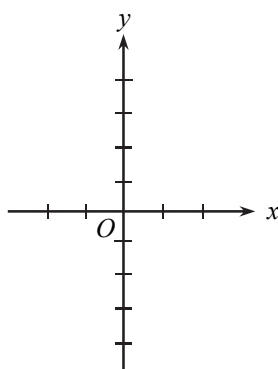
(2) $a > 0$ 圖形右上升

《說明》

$$y = x^3$$

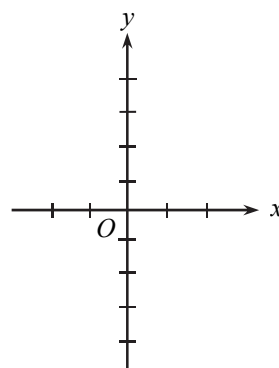


$$y = 2x^3$$

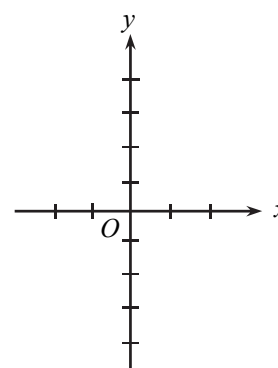


(3) $a < 0$ 圖形右下降

$$y = -x^3$$

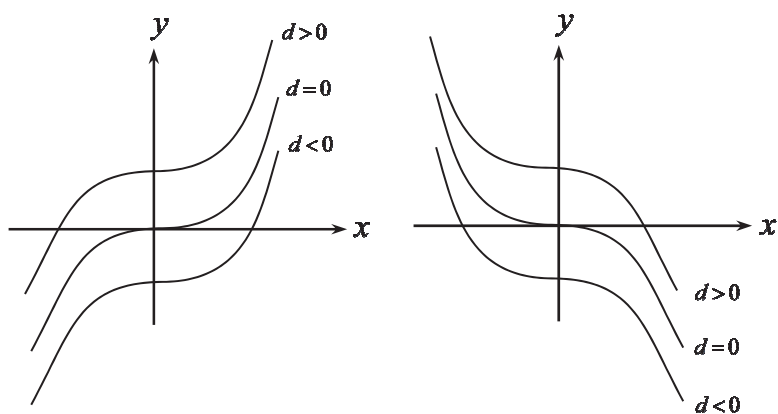


$$y = -2x^3$$



(4) $y = ax^3 + d$ 圖形是將 $y = ax^3$ 的圖形隨著 d 上下移動

其對稱中心為 $(0, d)$

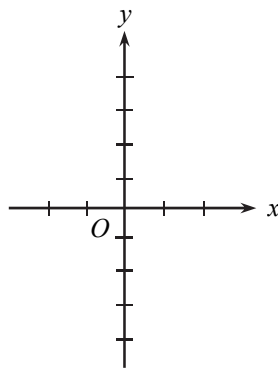


【觀念二】 $y = ax^3 + cx$ 圖形

(1) $f(-x) = a(-x)^3 + c(-x) = -(ax^3 + cx) = -f(x)$ ，函數為奇函數本身對稱原點 O ，即原點 O 為對稱中心。

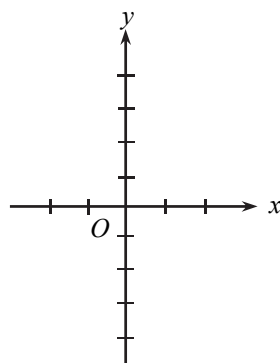
(2) $a > 0, c > 0$ 圖形為遞增函數

《說明》 $y = x^3 + x = x(x^2 + 1)$



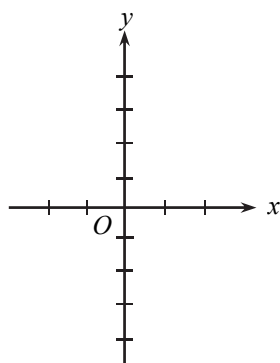
(3) $a > 0, c < 0$ 圖形右上升

《說明》 $y = x^3 - x = x(x^2 - 1) = x(x-1)(x+1)$



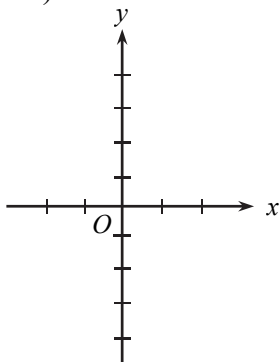
(4) $a < 0, c < 0$ 圖形為遞減函數

《說明》 $y = -x^3 - x = -x(x^2 + 1)$

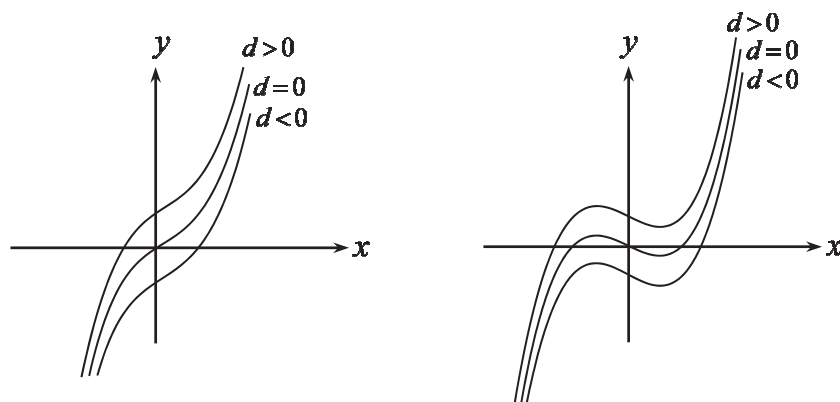


(5) $a < 0, c > 0$ 圖形右下降

《說明》 $y = -x^3 + x = -x(x^2 - 1) = -x(x-1)(x+1)$



- (6) $y = ax^3 + cx + d$ 圖形是將 $y = ax^3 + cx$ 的圖形隨著 d 上下移動，其對稱中心為 $(0, d)$



【觀念三】 $y = ax^3 + bx^2 + cx + d$ 圖形

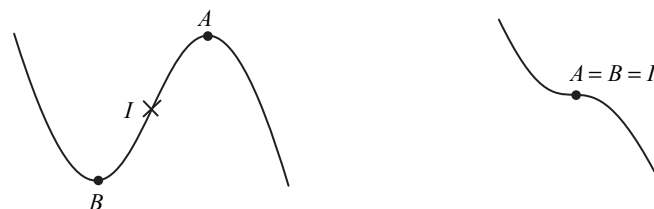
- (1) $a > 0$ 圖形右上升

《說明》



- (2) $a < 0$ 圖形右下降

《說明》



(3) 三次未退化圖形是指峰點、谷點、對稱中心皆不同一點

(4) 三次退化圖形是指峰點、谷點、對稱中心為同一點

(5) 未退化圖形規則：峰數+谷數+1=次數

(6) $y = ax^3 + bx^2 + cx + d$ 之對稱中心為 $(-\frac{b}{3a}, f(-\frac{b}{3a}))$

《說明》 1° $y = ax^3 + bx^2 + cx + d = a'(x-p)^3 + b'(x-p)^2 + c'(x-p) + d'$

2° 比較 x^3 與 x^2 係數得 $\begin{cases} a' = a \\ b' = b + 3ap \end{cases}$

3° 令 $b' = 0$ 即取 $p = -\frac{b}{3a}$

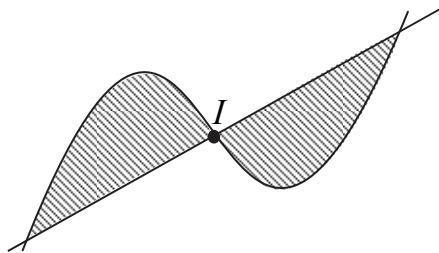
可以得到 $y = f(x) = a'(x + \frac{b}{3a})^3 + c'(x + \frac{b}{3a}) + d'$

4° 由觀念二知對稱中心 $\begin{cases} x + \frac{b}{3a} = 0 \\ y = d' \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = -\frac{b}{3a} \\ y = d' = f(-\frac{b}{3a}) \end{cases}$

(7) 對稱中心又稱反曲點 (inflection point)

(8) 通過對稱中心之直線與三次函數圖形所圍面積相同

《圖示》



(9) $y = f(x)$ 平移 $(h, k) \Rightarrow$ 新函數為 $y - k = f(x - h)$

《口訣》移動多少減多少

例 1. (能力指標：對稱中心)

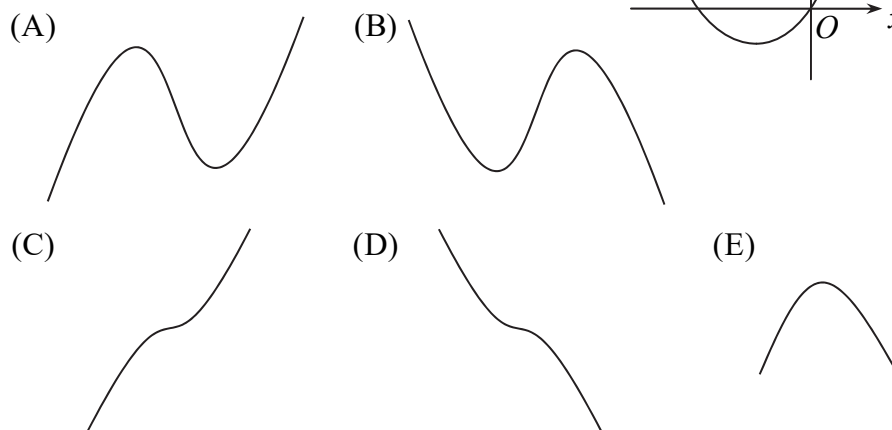
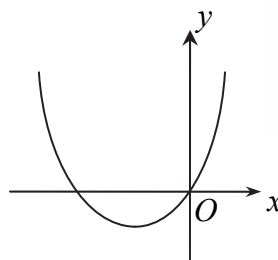
$y = f(x) = x^3 - 3x^2 - 9x + 1$ ，求對稱中心坐標。

解：



例 2. (能力指標：三次函數圖形)

已知二次函數 $y = ax^2 + bx$ 圖形如右，則下列哪一個最接近三次函數 $y = ax^3 + bx$ 的圖形？



解：

例 3. (能力指標：三次函數)



關於三次函數 $f(x) = 2(x-4)^3 + 5(x-4) + 7$ 之敘述，請選出下列何者正確？

- (1) $f(-x) = f(x)$
- (2) 點(4,7)是圖形 $y = f(x)$ 的對稱中心
- (3) $f(x)$ 有最小值
- (4) 圖形 $f(x)$ 在 $x = 4$ 附近的局部特徵近似於直線 $y = 5(x-4) + 7$
- (5) 不論 a 為任何實數，直線 $y = a(x-5) + 7$ 與函數 $y = f(x)$ 恆有交點

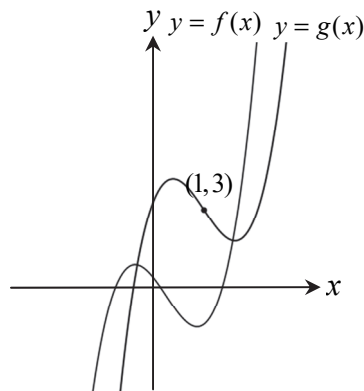
解：

例 4. (能力指標：三次函數平移)



已知三次函數 $y = f(x) = x^3 - 2x$ ， $y = g(x)$ 是由 $y = f(x)$ 平移而得，已知 $y = g(x)$ 對稱中心為(1,3)，求函數 $y = g(x)$

解：





回家作業



1. 已知 $f(x) = x^3 - x^2 - x + 1$ ，試在 $x = 2$ 附近估計 $f(1.99)$ 並四捨五入至小數點第二位。



2. 設三次函數 $f(x) = 3x^3 - 4x^2 + cx + d$ ，其中 c, d 為實數，請選出下列正確的選項：

- (1) 可以找到一個實數 x_0 滿足 $f(x_0) = 10^5$
- (2) $y = f(x)$ 圖形與 x 軸可能沒有交點
- (3) $y = f(x)$ 圖形的對稱軸為直線 $x = \frac{2}{3}$
- (4) $y = f(x)$ 圖形的對稱中心為 $(\frac{4}{9}, f(\frac{4}{9}))$
- (5) $f(\frac{4}{9}) = \frac{1}{2}(f(\frac{1}{9}) + f(\frac{7}{9}))$



1. 2.93 2. (1)(4)(5)



回家作業



3. 已知二次函數 $y = ax^2 + bx$ 圖形如右，則下列哪一個選項最接近三次函數 $y = ax^3 + bx$ 的圖形？

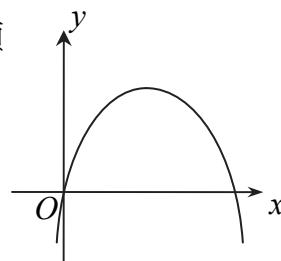
(1)



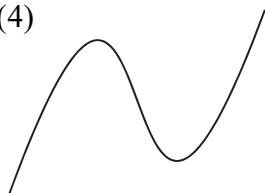
(2)



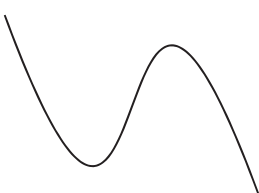
(3)



(4)



(5)



4. 已知 $P(x) = -2x^3 + 18x^2 - 51x + 49 = -2(x-a)^3 + k(x-a) + l$ ，求 (a, k, l)



3. (5) 4. (3, 3, 4)

主題 14 三次函數及其圖形

JPUA



1. 函數種類

(1) 增函數與減函數：

函數類型	絕對遞增函數	絕對遞減函數
定義	若 $m > n$ ，則 $f(m) > f(n)$	若 $m > n$ ，則 $f(m) < f(n)$
函數說例		
例圖		
圖形特徵	右上升	右下降

(2) 偶函數與奇函數：

函數類型	偶函數	奇函數
定義	$f(-x) = f(x)$ 吸收負號	$f(-x) = -f(x)$ 傳遞負號
函數說例		
例圖		
圖形特徵		

② 三次函數 $f(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d$ 圖形之對稱中心為 $(\frac{-b}{3a}, f(\frac{-b}{3a}))$ 。又稱為三次函數圖形的反曲點 (inflection point)。

【說例】

$$\begin{aligned} y &= 2x^3 + 12x^2 + 7x + 2 = 2(x^3 + 6x^2) + 7x + 2 \\ &= 2(x^3 + 3 \cdot x^2 \cdot 2) + 7x + 2 = 2(x^3 + 3 \cdot x^2 \cdot 2 + 3 \cdot x \cdot 2^2 + 2^3) + 7x + 2 - 2 \cdot 3 \cdot x \cdot 2^2 - 2 \cdot 2^3 \\ &= 2(x+2)^3 - 17x - 14 = 2(x+2)^3 - 17(x+2) + 20 \end{aligned}$$

【說明 1】

$$\begin{aligned} y &= ax^3 + bx^2 + cx + d = a(x^3 + \frac{b}{a}x^2) + cx + d \quad \text{[配立方]} \\ &= a[x^3 + 3 \cdot x^2 \cdot \frac{b}{3a} + 3 \cdot x \cdot (\frac{b}{3a})^2 + (\frac{b}{3a})^3] - 3a \cdot x \cdot (\frac{b}{3a})^2 - a(\frac{b}{3a})^3 + cx + d \\ &= a(x + \frac{b}{3a})^3 + \underbrace{(c - \frac{b^2}{3a})x + (d - \frac{b^3}{27a^2})}_{\text{令 } px+D} \quad \text{[配立方過程會將 } x^2 \text{ 項納入完全立方]} \\ &= a(x + \frac{b}{3a})^3 + px + D = a(x + \frac{b}{3a})^3 + p(x + \frac{b}{3a}) - p(\frac{b}{3a}) + D \quad \text{[令 } \frac{-pb}{3a} + D = k] \\ &= a(x + \frac{b}{3a})^3 + p(x + \frac{b}{3a}) + k \end{aligned}$$

故可得 $y = ax^3 + bx^2 + cx + d$ 的對稱中心為 $(\frac{-b}{3a}, k) = (\frac{-b}{3a}, f(\frac{-b}{3a}))$

【說明 2】

	二次函數	三次函數
一般式	$y = ax^2 + bx + c$	$y = ax^3 + bx^2 + cx + d$
標準式	$y = a(x - h)^2 + k$	$y = a(x - h)^3 + p(x - h) + k$
對稱軸或對稱中心	對稱軸 $x = \frac{-b}{2a}$	對稱中心 x 坐標 $x = \frac{-b}{3a}$
極值討論	只有最大值或只有最小值	沒有最大值且沒有最小值

【說明 3】

1° 對任意三次多項式 $f(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d$ 都可以 $x-h$ 做連續綜合除法：

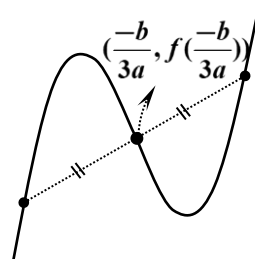
$$\text{故可得 } f(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d = a'(x-h)^3 + b'(x-h)^2 + c'(x-h) + d'$$

2° 比較 x^3 係數與 x^2 係數：
$$\begin{cases} a = a' \\ b = -3a'h + b' \end{cases}$$

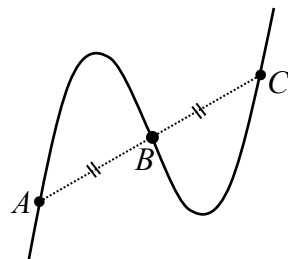
3° 令 $b' = 0$ 即取 $h = \frac{-b}{3a}$ 可得

$$f(x) = a'\left(x + \frac{b}{3a}\right)^3 + c'\left(x + \frac{b}{3a}\right) + d'$$

4° 由標準式格式可知對稱中心為 $\left(\frac{-b}{3a}, d'\right) = \left(\frac{-b}{3a}, f\left(\frac{-b}{3a}\right)\right)$



③ 若直線 L 與三次函數 $y = f(x)$ 圖形交點依次為 A, B, C 且 $\overline{AB} = \overline{BC}$ ，則 B 必為 $y = f(x)$ 之對稱中心。



④ 若三次函數 $f(x)$ 的對稱中心為 (h, k) ，則函數必滿足 $\frac{f(h-x) + f(h+x)}{2} = k$ 。

【說例】

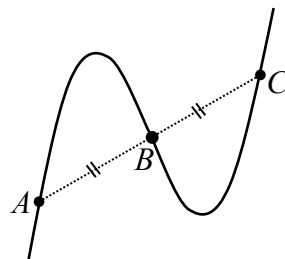
若直線 L 與三次函數 $y = f(x)$ 圖形交點依次為 $A, B(1, 3), C$ 且 $\overline{AB} = \overline{BC}$ ，則：

① 可設 $f(x) =$ 。

② $f(x)$ 滿足 ，

亦可表為 $f(1-x) + f(1+x) = 6$ 。

③ $f(x)$ 滿足 。



3. 廣域特徵與局部特徵

(1) 廣域特徵：

在一個非常大的範圍內 (例如所有的實數) 去觀察 $y=f(x)$ 圖形的特徵，稱為**廣域特徵**或**大域特徵**。

若 $f(x)=ax^3+bx^2+cx+d$ ($a \neq 0$)，當 $|x|$ 很大時，；

即三次函數 $y=f(x)=ax^3+bx^2+cx+d$ 的廣域特徵近似於曲線 $y=ax^3$ 。

(2) 局部特徵：

在一個非常小的範圍內 (例如 $1.01 \leq x \leq 1.02$) 去觀察 $y=f(x)$ 圖形的特徵，稱為**局部特徵**。若我們想知道多項式 $f(x)$ 在 $x=h$ 附近的函數值，但由於函數 $f(x)$ 是次數較高的多項式，而使得要求 $x=h$ 附近的函數值較不便計算，這時我們會用在 $x=h$ 附近的一次近似函數來估計真正的函數值，即 $x=h$ 附近的局部特徵。

(3) 一次近似函數：

① 若將三次函數 $f(x)$ 化為 $x-h$ 的多項式形式：

$$f(x)=a(x-h)^3+b(x-h)^2+c(x-h)+d，$$

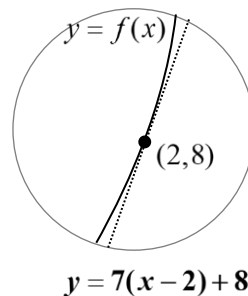
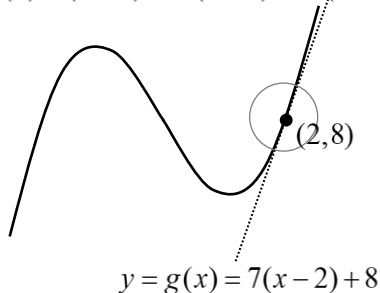
則三次函數 $f(x)$ 在 $x=h$ 附近的一次近似函數為 $g(x)=c(x-h)+d$ 。

② 任何多項式 $f(x)$ 在 $x=h$ 附近的一次近似函數亦即 $f(x)$ 除以 $(x-h)^2$ 的餘式。

③ 在 $x=h$ 附近的 $f(x)$ 函數值，皆可以此一次近似函數來估計。

【說明】

$$y=f(x)=(x-2)^3+5(x-2)^2+7(x-2)+8$$



一次近似函數是圖形 $y=f(x)$ 在 $x=2$ 的切線 [第五冊多項式函數的微積分]

【說例】

三次函數 $f(x)$ 滿足條件	廣域特徵接近 $2x^3$ ，對稱中心為 $(1,5)$
三次函數 $f(x)$ 假設法	

三次函數 $f(x)$ 滿足條件	對稱中心為 $(-2,7)$ ，平移後與 $y = x^3 - 3x$ 重合
三次函數 $f(x)$ 假設法	

三次函數 $f(x)$ 滿足條件	在 $x=2$ 時的一次近似為 $6x-3$
三次函數 $f(x)$ 假設法	

三次函數 $f(x)$ 滿足條件	對稱中心為 $(2,7)$ ，在 $x=2$ 時的一次近似為 $5x-3$
三次函數 $f(x)$ 假設法	

三次函數 $f(x)$ 滿足條件	廣域特徵接近 $2x^3$ ，對稱中心為 $(1, f(1))$ ，在 $x=1$ 時的一次近似為 $3x+7$
三次函數 $f(x)$ 假設法	

【說例】

三次函數 $f(x)$ 滿足條件	廣域特徵接近 $2x^3$ ，對稱中心為 $(1,5)$
三次函數 $f(x)$ 假設法	

三次函數 $f(x)$ 滿足條件	對稱中心為 $(-2,7)$ ，平移後與 $y = x^3 - 3x$ 重合
三次函數 $f(x)$ 假設法	

三次函數 $f(x)$ 滿足條件	在 $x=2$ 時的一次近似為 $6x-3$
三次函數 $f(x)$ 假設法	

三次函數 $f(x)$ 滿足條件	對稱中心為 $(2,7)$ ，在 $x=2$ 時的一次近似為 $5x-3$
三次函數 $f(x)$ 假設法	

三次函數 $f(x)$ 滿足條件	廣域特徵接近 $2x^3$ ，對稱中心為 $(1, f(1))$ ，在 $x=1$ 時的一次近似為 $3x+7$
三次函數 $f(x)$ 假設法	

主題 14 廣域特徵與局部特徵



【觀念一】局部特徵

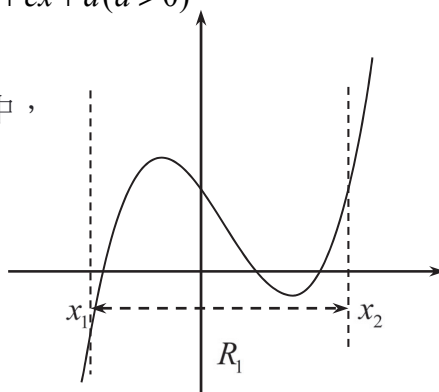
- (1) 三次函數 $y = f(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d (a > 0)$

的圖形，如右圖所示。

- (2) 在近距離 $R_1 (x_1 \leq x \leq x_2)$ 區域中，

可以看見圖形在局部，
起伏變化的細節。

- (3) 口訣：局部看細節。



【觀念二】廣域特徵

- (1) $y = ax^3 + bx^2 + cx + d$

$$= ax^3 \left[1 + \frac{b}{a} \left(\frac{1}{x} \right) + \frac{c}{a} \left(\frac{1}{x} \right)^2 + \frac{d}{a} \left(\frac{1}{x} \right)^3 \right]$$

- (2) 當 x 趨近 ∞ 時

$$\Rightarrow \frac{1}{x} \text{ 趨近 } 0, \left(\frac{1}{x} \right)^2 \text{ 趨近 } 0, \left(\frac{1}{x} \right)^3 \text{ 趨近 } 0$$

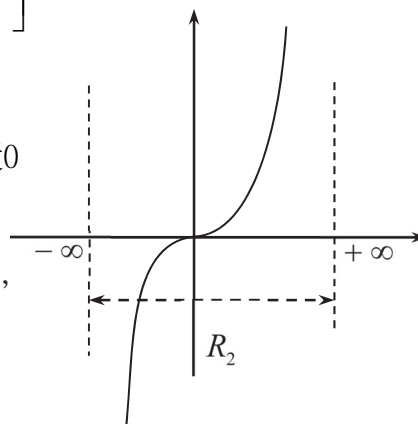
$$\Rightarrow y \approx ax^3$$

- (3) 在遠距離 $R_2 (-\infty < x < \infty)$ 區域中，

可以看見圖形全貌的外圍輪廓，

圖形很趨近 $y \approx ax^3$ 。

- (4) 口訣：全貌看輪廓。



【觀念三】一次近似

- (1) 三次函數 $y = ax^3 + bx^2 + cx + d$ ，

可以經由連續綜合除法，將三次函數表示成

$$y = a'(x-h)^3 + b'(x-h)^2 + c'(x-h) + d'。$$

- (2) 三次函數在 $x = h$ 的點附近的局部區域，

會使得 $(x-h)^3 \rightarrow 0$ 且 $(x-h)^2 \rightarrow 0$

$$\Rightarrow y = a'(x-h)^3 + b'(x-h)^2 + c'(x-h) + d' \approx c'(x-h) + d'。$$

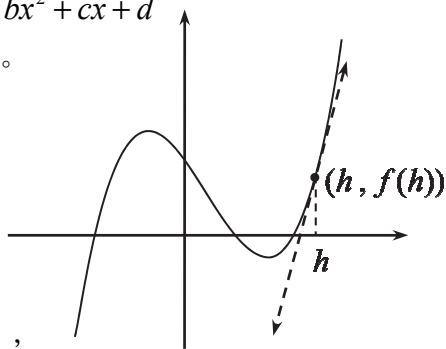
- (3) $y = c'(x-h) + d'$ 稱為 $y = ax^3 + bx^2 + cx + d$

在 $x = h$ 附近的一次近似函數。

- (4) 圖示幾何意義：

一次近似函數是原三次函數

過 $(h, f(h))$ 的切線。



【觀念四】二次近似

- (1) 三次函數 $y = ax^3 + bx^2 + cx + d$ ，

可以經由連續綜合除法，將三次函數表示成

$$y = a'(x-h)^3 + b'(x-h)^2 + c'(x-h) + d'。$$

- (2) 三次函數在 $x = h$ 的點附近的局部區域，會使得 $(x-h)^3 \rightarrow 0$

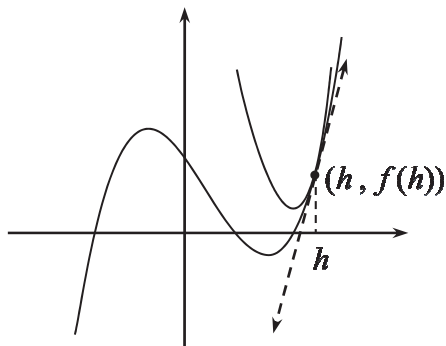
$$\Rightarrow y = a'(x-h)^3 + b'(x-h)^2 + c'(x-h) + d' \approx b'(x-h)^2 + c'(x-h) + d'$$

- (3) $y = b'(x-h)^2 + c'(x-h) + d'$ 稱為 $y = ax^3 + bx^2 + cx + d$ 在 $x = h$ 附近的二次近似函數。

- (4) 圖示幾何意義：

二次近似函數與原三次函數

相切於 $(h, f(h))$ 的拋物線。



例 1. (能力指標：局部特徵與近似)

設 $y = f(x) = a(x-2)^3 + b(x-2) + c$ ，若三次函數 $f(x)$ 的廣域特徵圖形近似 $y = 2x^3$ ，又在 $x = 2$ 附近的局部特徵圖形近似 $y = 4x - 3$ ，求數組 $(a, b, c) = \underline{\hspace{2cm}}$ 。

解：



例 2. (能力指標：廣域局部特徵與近似)

設三次函數 $f(x)$ 滿足 $f(1) = f(2) = 0$ ， $f(0) = 12$ 且 $f(-3) = 60$ ，
請選出所有正確的選項



- (1) $y = f(x)$ 圖形的廣域特徵近似於曲線 $y = x^3$
- (2) $f(6) = 0$
- (3) $\left(\frac{1}{2}, \frac{39}{8}\right)$ 為 $y = f(x)$ 圖形的對稱中心
- (4) $y = f(x)$ 的圖形在 $x = -1$ 附近的局部特徵近似於直線 $y = 19(x+1) + 30$
- (5) 若點 (a, b) 在 $y = f(x)$ 的圖形上，則點 $(-2-a, 60-b)$ 也在 $y = f(x)$ 的圖形上。

解：

主題 15 多項不等式



【觀念一】 $f(x) = a_n x^n + \cdots + a_1 x + a_0 \in \mathbb{R}[x]$

(1) 型如 $f(x) > 0$, $f(x) \geq 0$, $f(x) < 0$, $f(x) \leq 0$

稱為 n 次多項不等式或 n 次不等式

(2) 所謂解不等式即求滿足不等式的實數解 x

(3) x 稱為不等式的解

【觀念二】解不等式基本符號法則

(1) $AB > 0 \Leftrightarrow$ _____

(2) $AB < 0 \Leftrightarrow$ _____

(3) 若 $A > B$, 則 $A + C > B + C$

(4) 若 $A > 0, B > C$, 則 $AB > AC$

(5) 若 $A < 0, B > C$, 則 $AB < AC$

(6) 若 $A > 0, B > C$, 則 $\frac{B}{A} > \frac{C}{A}$

(7) 若 $A < 0, B > C$, 則 $\frac{B}{A} < \frac{C}{A}$

【觀念三】同學易犯錯誤

(1) $A > C, B > D \Rightarrow AB > CD$ (大乘大的迷思)

(2) $\frac{A}{B} > C \Rightarrow A > BC$ (左右同乘 B)

(3) $A > C, B \neq 0 \Rightarrow \frac{A}{B} > \frac{C}{B}$ (左右同除以 B)

(4) $AB > AC \Rightarrow B > C$ (隨便約分 A)

結論 左右同乘, 左右同除, 左右同時約分
一定要確定此數的正負, 才可進行

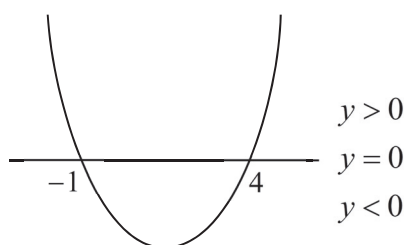
主題 16 二次不等式

TCPH



【觀念一】 $y = x^2 - 3x - 4 = (x-4)(x+1)$

(1) 圖形



(2) $y > 0$ 即 $(x-4)(x+1) > 0 \Rightarrow$

(3) $y = 0$ 即 $(x-4)(x+1) = 0 \Rightarrow$

(4) $y < 0$ 即 $(x-4)(x+1) < 0 \Rightarrow$

【觀念二】處理二次不等式方法：分下列三種方面處理

① $b^2 - 4ac > 0$ ② $b^2 - 4ac = 0$ ③ $b^2 - 4ac < 0$

說明 1 $b^2 - 4ac > 0$ 如何處理 $\Rightarrow$ 因式分解

(1) $x^2 - 3x - 4 > 0 \Rightarrow (x-4)(x+1) > 0 \Rightarrow$

(2) $x^2 - 3x - 4 < 0 \Rightarrow (x-4)(x+1) < 0 \Rightarrow$

(3) $x^2 - x - 1 \geq 0 \Rightarrow (x - \frac{1+\sqrt{5}}{2})(x - \frac{1-\sqrt{5}}{2}) \geq 0$

$\Rightarrow$

(4) $x^2 - x - 1 \leq 0 \Rightarrow (x - \frac{1+\sqrt{5}}{2})(x - \frac{1-\sqrt{5}}{2}) \leq 0$

$\Rightarrow$

說明 2 $b^2 - 4ac = 0$ 如何處理 $\Rightarrow$ 配方

(1) $x^2 - 4x + 4 \geq 0 \Rightarrow (x-2)^2 \geq 0 \Rightarrow$

(2) $x^2 - 4x + 4 > 0 \Rightarrow (x-2)^2 > 0 \Rightarrow$

(3) $x^2 - 4x + 4 \leq 0 \Rightarrow (x-2)^2 \leq 0 \Rightarrow$

(4) $x^2 - 4x + 4 < 0 \Rightarrow (x-2)^2 < 0 \Rightarrow$

說明 3 $b^2 - 4ac < 0$ 如何處理 $\Rightarrow$ 配方

$$(1) \quad x^2 + x + 1 > 0 \Rightarrow$$

$$(2) \quad x^2 + x + 1 < 0 \Rightarrow$$

【觀念三】同義不等式： $ax^2 + bx + c > 0$ 與 $lx^2 + mx + n > 0$

解相同之條件 $\Rightarrow$ ①

②

《說明》 $x^2 - 3x + 2 > 0 \Rightarrow (x-1)(x-2) > 0 \Rightarrow$

$$2x^2 - 6x + 4 > 0 \Rightarrow 2(x-1)(x-2) > 0 \Rightarrow$$

$$-2x^2 + 6x - 4 > 0 \Rightarrow -2(x-1)(x-2) > 0 \Rightarrow$$

例 1. (能力指標：二次不等式)

$ax^2 + bx + c > 0$ 之解為 $-2 < x < 7$ ，求 $ax^2 - bx + c < 0$ 之解？

解： $1^\circ -2 < x < 7 \Rightarrow (x+2)(x-7) < 0 \Rightarrow x^2 - 5x - 14 < 0$

$$\Rightarrow -x^2 + 5x + 14 > 0$$

$2^\circ -x^2 + 5x + 14 > 0$ 與 $ax^2 + bx + c > 0$ 為同義不等式

$$\Rightarrow \left\{ \right.$$

$$3^\circ ax^2 - bx + c < 0 \Rightarrow$$

FXMK



例 2. (能力指標：不等式變換)

$f(x)$ 是一個二次函數，且不等式 $f(x) > 0$ 的解是 $-4 < x < 2$ 。

試求下列不等式的解

(1) $f(2x+4) > 0$ (2) $f(3x) < 0$

解：



例 3. (能力指標：三角形邊長不等式)

設 $x, 2x-1, 2x+1$ 分別表示一個鈍角三角形三邊之長，

求 x 值的範圍？

解：



例 4. (能力指標：判別式法求極值)

$$f(x) = \frac{ax^2 + 8x + b}{x^2 + 1}, x \in \mathbb{R}, f(x) \text{ 之最大值} = 9, \text{ 最小值} = 1,$$

求數對 $(a, b) = ?$

解：





回家作業



1. 令 $f(x)$ 是一個二次函數，而且不等式 $f(x) > 0$ 的解是 $-1 < x < 3$ ，
試解不等式 $f(3x-5) < 0$ 。



2. 已知不等式 $ax^2 + bx + 1 > 0$ 之解為 $-\frac{5}{2} < x < \frac{2}{5}$ ，求實數 a, b 之值。

3. 解下列二次不等式：

(1) $3x^2 - 5x + 1 > 0$ (2) $4x^2 - 4x + 1 \leq 0$ (3) $-2x^2 + x - 3 < 0$

簡 答

1. $x < \frac{4}{3}$ 或 $x > \frac{8}{3}$ 2. $(a, b) = (-1, \frac{-21}{10})$

3. (1) $x < \frac{5-\sqrt{13}}{6}$ 或 $x > \frac{5+\sqrt{13}}{6}$ (2) $x = \frac{1}{2}$ (3) x 為任意實數



回家作業



4. 請問對於下列哪些選項，可以找到實數 a ，使得選項裡面所有的數都同時滿足一元二次不等式 $x^2 + (2-a)x - 2a < 0$ ？
- (1) $-1, 0$ (2) $1, 2, 3, \dots$ (所有的正整數)
(3) $-3, -4, -5, \dots$ (所有小於 -2 的整數) (4) $97, 2008$
(5) $-\pi, \pi$ (π 是圓周率)。



4. (1)(4)

主題 17 高次不等式

VCUG



【觀念一】 $y = (x-1)(x-2)(x-3)$

$$(1) \ y > 0 \Rightarrow (x-1)(x-2)(x-3) > 0$$

$\Rightarrow$

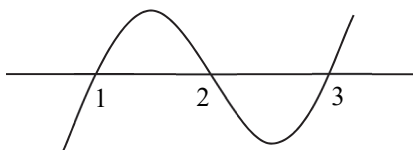
$$(2) \ y = 0 \Rightarrow (x-1)(x-2)(x-3) = 0$$

$\Rightarrow$

$$(3) \ y < 0 \Rightarrow (x-1)(x-2)(x-3) < 0$$

$\Rightarrow$

【觀念二】 領導係數為正的高次函數圖形，圖形由右上方開始



例 1. (能力指標：高次不等式)

$$\text{解不等式 } x^3 - 5x^2 + 2x + 8 < 0。$$

解：

DBIT



例 2. (能力指標：高次不等式)

$$(x^2 + x + 1)(x-1)(x-3)^3(x-2)^4 < 0，\text{解 } x \text{ 範圍？}$$

$$\text{解： } \underbrace{(x^2 + x + 1)}_{\text{恆正不考慮}} \underbrace{(x-3)^2(x-2)^4}_{\text{非負暫不考慮}} (x-1)(x-3) < 0$$

TZLT



例 3. (能力指標：高次不等式)

$$(x^2 - x + 1)(x + 2)^4(x - 1)(x - 3)^3 \leq 0, \text{ 解 } x \text{ 範圍?}$$

解： $\underbrace{(x^2 - x + 1)}_{\text{恆正}} \underbrace{(x + 2)^4(x - 3)^2}_{\text{非負}} (x - 1)(x - 3) \leq 0$





回家作業



1. 試解不等式 $(x+2)(x+3)(x+4)(x+5) < 120$



2. 解下列不等式：

(1) $2x^3 + 3x^2 - 12x + 7 > 0$

(2) $(x^2 + 6x + 8)(x^2 - 4x + 3) \leq 0$

3. 解下列多項不等式：

(1) $(x+1)^2(x-4)(4x+3)(2x-1)^3(3x-7)^4 \geq 0$

(2) $(x-2)(x+3)(2x^2-5x+1)(3x^2+2x+1) < 0$

簡答

1. $-7 < x < 0$ 2. (1) $x > -\frac{7}{2}$ 且 $x \neq 1$ (2) $-4 \leq x \leq -2$ 或 $1 \leq x \leq 3$

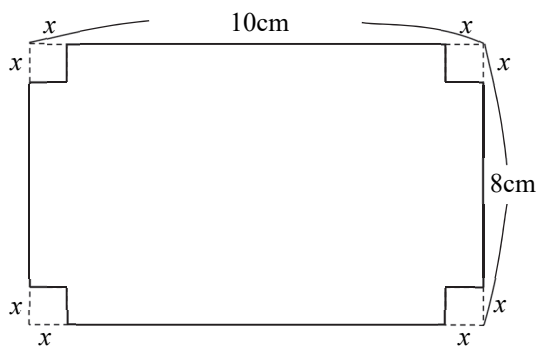
3. (1) $-\frac{3}{4} \leq x \leq \frac{1}{2}$ 或 $x \geq 4$, 或 $x = -1$ 或 $x = \frac{7}{3}$ (2) $-3 < x < \frac{5-\sqrt{17}}{4}$ 或 $2 < x < \frac{5+\sqrt{17}}{4}$



回家作業



4. 把一無蓋容器拆開，平鋪在地上，
如右圖。欲使其容積至少 48cm^3 ，
則 x 值的範圍為何？



5. 欲製造一容積至少 32π 立方公尺的圓柱形無蓋容器，已知底半徑比高多 2 公尺，則半徑至少為多少？

簡答

4. $1 \leq x \leq 2$ 5. 4



回家作業



6. (99 數乙試題)

關於多項式不等式：

$$x^2(x+5)(x+1)(x-4)(x-7) < (2x-3)(x+5)(x+1)(x-4)(x-7) ,$$

下列哪些選項是它的一個解？

- (1) -2π (2) $-\pi$ (3) π (4) 2π



6. (2) (4)

2. 重因式函數圖形

(1) 偶次重因式圖形局部特徵：

$y = (x-a)^4 Q(x)$, 其中 $Q(x)$ 為無 $x-a$ 因式之多項式。



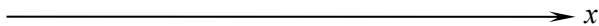
(2) 奇次重因式圖形局部特徵：

$y = (x-a)^3 Q(x)$, 其中 $Q(x)$ 為無 $x-a$ 因式之多項式。

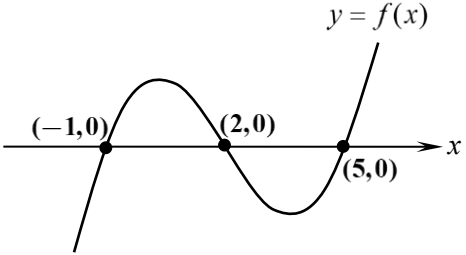
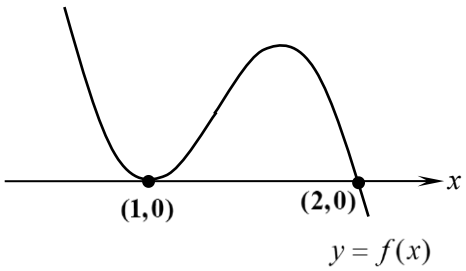
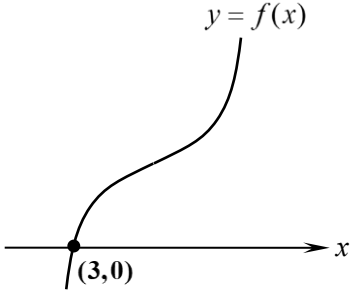


【說例】

試繪 $y = (x-3)^2(x^2-x+1)(x-4)^3$ 的概略圖形。



(3) 由圖形特徵假設多項式：

多項式函數 $y = f(x)$ 圖形特徵	如何假設多項式 $f(x)$?
	如果 $f(x)$ 為三次函數，則可設為 $f(x) =$ 。
	如果 $f(x)$ 為三次函數，則可設為 $f(x) =$ 。 不等式 $f(x) \leq 0$ 的解為 。
	如果 $f(x)$ 為三次函數，則可設為 $f(x) =$ ， 其中 。 不等式 $f(x) \geq 0$ 的解為 。

主題 18 分式不等式

HVIG



【觀念】

$\frac{B}{A} < 0$	$\frac{B}{A} \leq 0$	$\frac{B}{A} < C \Rightarrow \frac{B-AC}{A} < 0$	$\frac{B}{A} \leq C \Rightarrow \frac{B-AC}{A} \leq 0$

例 1. (能力指標：分式不等式)

$$\frac{3}{x+2} \leq x, \text{ 求 } x \text{ 範圍?}$$

解：

PEBV



例 2. (能力指標：分式不等式)

$$\frac{x^2-4x+1}{4x^2-3x-1} < 1, \text{ 求 } x \text{ 範圍?}$$

解：

BMPD





回家作業



1. 解不等式： $x < \frac{1}{x}$



2. 解不等式： $\frac{(x+2)}{(x^2+x+1)(x-1)} \leq 0$

3. 試問不等式 $(x-1)(x-2)(x-3) > 0$ 之解集合與下列何者相同？

(1) $(x-1)^3(x-2)^5(x-3)^7 > 0$ (2) $(x-1)^2(x-2)^4(x-3)^6 > 0$

(3) $\frac{1}{(x-1)(x-2)(x-3)} \geq 0$ (4) $\frac{x-1}{(x-2)(x-3)} > 0$

(5) $\frac{(x-1)(x-2)}{x-3} \geq 0$



1. $x < -1$ 或 $0 < x < 1$ 2. $-2 \leq x < 1$ 3. (1)(3)(4)



回家作業



4. 設 m 為一實數，若 $\frac{2x^2 + 2mx + m}{4x^2 + 6x + 3} < 1$ 對所有實數 x 均成立，試求 m 之範圍。



4. $1 < m < 3$



主題 19 絕對值不等式

EASF



【觀念一】(1) $|x-1| \geq 3 \Rightarrow x-1 \geq 3$ 或 $x-1 \leq -3 \Rightarrow x \geq 4$ 或 $x \leq -2$

(2) $|x-2| \leq 3 \Rightarrow -3 \leq x-2 \leq 3 \Rightarrow -1 \leq x \leq 5$

【觀念二】(1) 已知 $m \leq x \leq M \Rightarrow |x - \frac{M+m}{2}| \leq \frac{M-m}{2}$

(2) 已知 $x \geq M$ 或 $x \leq m \Rightarrow |x - \frac{M+m}{2}| \geq \frac{M-m}{2}$

【觀念三】雙絕對值： $|A| \geq |B| \Rightarrow$ 方法：平方

多絕對值： $|A| + |B| \geq |C| \Rightarrow$ 方法：去絕對值討論

1. (能力指標：絕對值不等式)

$|ax+1| \leq b$ 之解為 $-1 \leq x \leq 5$ ，求 a, b 值？

解：由 $-1 \leq x \leq 5 \Rightarrow |x - \frac{5+(-1)}{2}| \leq \frac{5-(-1)}{2}$

$$\Rightarrow |x-2| \leq 3 \Rightarrow |\frac{1}{2}x-1| \leq \frac{3}{2}$$

$$\Rightarrow |-\frac{1}{2}x+1| \leq \frac{3}{2} \Rightarrow a = -\frac{1}{2}, b = \frac{3}{2}$$

AWMM



2. (能力指標：雙絕對值)

$|x^2 - x - 5| > |2x - 1|$ ，求 x 範圍？

解：平方得 $(x^2 - x - 5)^2 - (2x - 1)^2 > 0$

$$\Rightarrow (x^2 - x - 5 - 2x + 1)(x^2 - x - 5 + 2x - 1) > 0$$

$$\Rightarrow (x^2 - 3x - 4)(x^2 + x - 6) > 0$$

$$\Rightarrow (x - 4)(x + 1)(x + 3)(x - 2) > 0$$

$$\Rightarrow x > 4 \text{ 或 } -1 < x < 2 \text{ 或 } x < -3$$

EQJZ



3. (能力指標：絕對值不等式)

$|x| + |x - 1| > 2|x - 2|$ ，求 x 範圍？

解： 1° $\begin{cases} x \geq 2 \\ 2x - 1 > 2x - 4 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x \geq 2 \\ -1 > 4 \end{cases} \Rightarrow x \geq 2$

$$2^\circ \begin{cases} 1 \leq x < 2 \\ x + x - 1 > -2x + 4 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 1 \leq x < 2 \\ x > \frac{5}{4} \end{cases} \Rightarrow \frac{5}{4} < x < 2$$

$$3^\circ \begin{cases} 0 \leq x < 1 \\ x - x + 1 > -2x + 4 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 0 \leq x < 1 \\ x > \frac{3}{2} \end{cases} \Rightarrow x \text{ 無解}$$

$$4^\circ \begin{cases} x < 0 \\ -x + 1 - x > -2x + 4 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x < 0 \\ 1 > 4 \end{cases} \Rightarrow x \text{ 無解}$$

綜合以上，得 $x \geq 2$ 或 $\frac{5}{4} < x < 2 \Rightarrow x > \frac{5}{4}$

DHZU



數位[㊦] 延伸閱讀回家作業



1. 解下列各不等式：

(1) $2 < |2x - 6| < 8$

(2) $|x - 1| + |x - 2| + |x + 1| < x + 4$

CNBN



2. 設 $|ax + 2| \leq b$ 的解為 $2 \leq x \leq 10$ ，則 $a + b =$ _____。



1. (1) $4 < x < 7$ 或 $-1 < x < 2$ (2) $0 < x < 3$ 2. 1



主題 20 根式不等式



【觀念一】

$\sqrt{A} < B$	$\sqrt{A} \leq B$	$\sqrt{A} > B$	$\sqrt{A} \geq B$
$\begin{cases} A \geq 0 \\ B > 0 \\ A < B^2 \end{cases}$	$\begin{cases} A \geq 0 \\ B \geq 0 \\ A \leq B^2 \end{cases}$	$\begin{cases} B \geq 0 \\ A > 0 \text{ 或 } \begin{cases} B < 0 \\ A \geq 0 \end{cases} \\ A > B^2 \end{cases}$	$\begin{cases} B \geq 0 \\ A \geq 0 \text{ 或 } \begin{cases} B < 0 \\ A \geq 0 \end{cases} \\ A \geq B^2 \end{cases}$

1. (能力指標：根式不等式)



$\sqrt{10-x^2} < x+2$ ，求 x 範圍？

$$\text{解：} \begin{cases} x^2 - 10 \leq 0 \\ x + 2 > 0 \\ 2x^2 + 4x - 6 > 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} (x - \sqrt{10})(x + \sqrt{10}) \leq 0 \\ x + 2 > 0 \\ (x + 3)(x - 1) > 0 \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} -\sqrt{10} \leq x \leq \sqrt{10} \\ x > -2 \\ x > 1 \text{ 或 } x < -3 \end{cases} \Rightarrow 1 < x \leq \sqrt{10}$$

2. (能力指標：根式不等式)

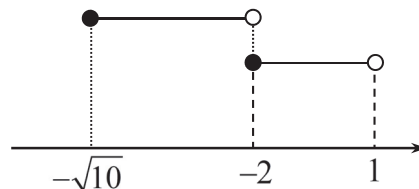
NWZU



$\sqrt{10-x^2} > x+2$ ，求 x 範圍？

$$\text{解：} 1^\circ \begin{cases} x+2 \geq 0 \\ x^2-10 < 0 \\ 2x^2+4x-6 < 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x+2 \geq 0 \\ (x-\sqrt{10})(x+\sqrt{10}) < 0 \\ (x+3)(x-1) < 0 \end{cases}$$

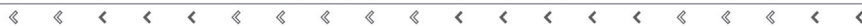
$$\Rightarrow \begin{cases} x \geq -2 \\ -\sqrt{10} < x < \sqrt{10} \\ -3 < x < 1 \end{cases} \Rightarrow -2 \leq x < 1$$



$$2^\circ \begin{cases} x+2 < 0 \\ 10-x^2 \geq 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x < -2 \\ -\sqrt{10} \leq x \leq \sqrt{10} \end{cases} \Rightarrow -\sqrt{10} \leq x < -2$$

由 $1^\circ, 2^\circ$ 知 $-2 \leq x < 1$ 或 $-\sqrt{10} \leq x < -2 \Rightarrow -\sqrt{10} \leq x < 1$

主題 21 多項式函數綜合題型



例 1. (能力指標：綜合除法應用)

$$\text{若 } 4(x+1)^3 - 2(x+1)^2 - 7(x+1) + 4$$

$$= a(x-1)(x+1)(x+2) + b(x-1)(x+2) + c(x+2) + d,$$

則求 $a+b+c+d =$ _____。

解：

EYJH



例 2. (能力指標：二次函數)

若 $f(x)$ 是二次函數，且 k 是某個特定的正數滿足條件：

$$f(k) = f(k+6) \text{ 和 } f(k-3) = f(2k)。則 k = \text{_____}。$$

解：

XQDE



例 3. (能力指標：二次函數)



小智在操場發現了高度為 $\frac{5}{2}$ 公尺的卡比獸，急忙丟出寶貝球。

已知在此次的拋擲中，寶貝球的路徑為一拋物線，1 秒後寶貝

球距離地面高度為 $\frac{11}{2}$ 公尺，2 秒後寶貝球距離地面高度為 $\frac{35}{6}$ 公尺，

3 秒後剛好丟中卡比獸，試問小智丟出寶貝球的瞬間，球距離地面
_____ 公尺。

解：

例 4. (能力指標：二次函數最大最小值)



已知二次實係數多項式函數 $f(x) = ax^2 + 4ax - b$ 在區間 $-3 \leq x \leq 1$ 上的最大值為 11，最小值為 -7，試求數對 $(a, b) =$ _____。

解：

例 5. (能力指標：平移)



已知 $f(x) = ax^3$ ，其中 a 為實數，若將函數 $f(x)$ 的圖形
向右平移 h 個單位，向上平移 k 單位，可得到函數

$g(x) = -x^3 + 6x^2 - 12x + 11$ 的圖形，則數對 $(h, k) =$ _____。

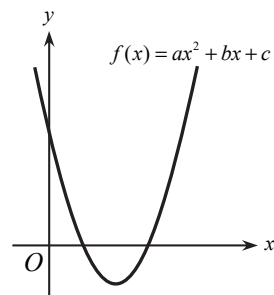
解：

例 6. (能力指標：函數圖形)



在坐標平面上，若函數 $f(x) = ax^2 + bx + c$ 的圖形如右，試選出
正確的選項。

- (1) $ab > 0$
- (2) $f_1(x) = bx + c$ 的圖形會通過第一象限
- (3) $f_2(x) = a(x-b)^2 + c$ 的圖形會通過第一象限
- (4) $f_3(x) = -ax^3 + c$ 為單調函數
- (5) $f_4(x) = ax^4 + bx^2 - c$ 為偶函數



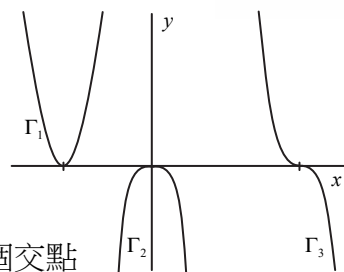
解：

例 7. (能力指標：函數圖形)

右圖為下列三個函數的圖形： $y = a(x-b)^2$ 、 $y = c(x-d)^3$ 、 $y = ex^4$ ，請選出正確的選項：



- (1) $a > 0$
- (2) $d > 0$
- (3) $e > 0$
- (4) 若直線 $L: y = ax + b$ ，則直線 L 的 y 截距為 b
- (5) 拋物線 $\Gamma: y = ax^2 + bx + c$ 的圖形與 x 軸有兩個交點



解：

例 8. (能力指標：函數圖形)

下列哪些正確？_____。



- (1) $f(x) = (x-1)^3$ 圖形對稱於原點。
- (2) $f(x) = (x-1)^4$ 是偶函數。
- (3) $f(x) = x^2 - 1$ 圖形對稱於 y 軸。
- (4) $f(x) = ax$ 與 $g(x) = bx^3$ 的圖形恰有 3 個相異交點，則 ab 必同號。
- (5) $f(x) = ax^2$ 與 $g(x) = bx^4$ 的圖形恰有 3 個相異交點，則 ab 必同號。

解：

例 9. (能力指標：函數圖形)

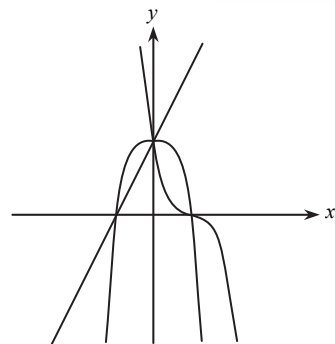
WDDDB



右圖中的函數 $f(x) = a(x-b)^3$ ， $g(x) = ax^4 + c$ ， $h(x) = -ax + d$ ，其中 a, b, c, d, e 為實數，其中任兩個圖形的交點落在坐標軸上，下列有關圖形的特性，哪些正確？

- (1) $a < 0$ (2) $c > 0$ (3) $c = d$
(4) $ab^4 = c$ (5) $b = 1$

解：



例 10. (能力指標：函數圖形)

XTVW



設三次函數 $f(x) = ax^3 + bx^2 + cx$ 的圖形對稱原點且

$f(4) > f(3)$ ，若 $y = ax^2 + bx + c$ 的圖形共通過 4 個象限，

則點 (a, c) 位在第 _____ 象限。

解：

例 11. (能力指標：高次不等式)

已知正整數 a 使不等式 $(x-1)^3(x-9)^7(x-18)^2(x-a^2)^4 < 0$ 有 6 個整數解，則 a 值為 _____。

解：



例 12. (能力指標：高次不等式)

設 $f(x)$ 為三次實係數多項式，若 $f(x) > 0$ 的解為 $x < -1$ 或 $2 < x < 6$ ，則不等式 $(x^2 - 1)^2 f(1 - 2x) \leq 0$ 的解為 _____。

解：



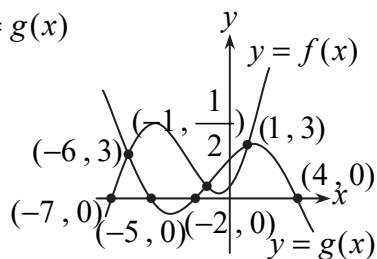
例 13. (能力指標：高次不等式)

右圖為兩個三次函數 $y = f(x)$ 、 $y = g(x)$

的圖形，則不等式 $\frac{f(x)}{g(x)} < 1$ 之解為

_____。

解：



UPEK



例 14. (能力指標：高次不等式)

已知二次不等式 $f(x) > 0$ 的解為 $-2 < x < 3$ ，則 $(x+2) \cdot f(x) \leq 0$ 的解為 _____。

解：

ZZMR



多項式函數綜合題型解析

1.【答】：2

【解】：1° 令 $x+1=t$

$$\Rightarrow 4t^3 - 2t^2 - 7t + 4$$

$$= a(t-2)t(t+1) + b(t-2)(t+1) + c(t+1) + d$$

$$2^\circ a+b+c+d$$

$$= 4 - 2 - 5 + 5 = 2$$

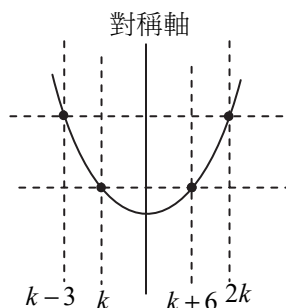
$$\begin{array}{cccc|c} 4 & -2 & -7 & 4 & \\ & -4 & 6 & 1 & -1, 2 \\ \hline 4 & -6 & -1 & & 5 \rightarrow d \\ & 8 & -4 & & \\ \hline 4 & -2 & -5 & & c \\ \downarrow & \downarrow & & & \\ a & b & & & \end{array}$$

2.【答】：9

【解】： $\frac{k+k+6}{2} = \frac{k-3+2k}{2}$

$$\Rightarrow 2k+6=3k-3$$

$$\Rightarrow k=9$$



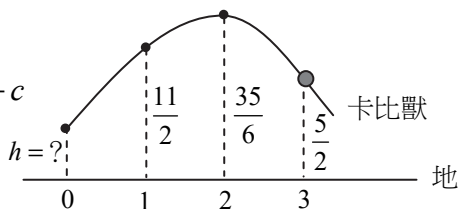
3.【答】： $\frac{3}{2}$

【解】：1° 作圖

$$2^\circ (1, \frac{11}{2})(2, \frac{35}{6})(3, \frac{5}{2})$$

$$\Rightarrow \text{令 } y = a(x-1)(x-2) + b(x-1) + c$$

$$\Rightarrow \begin{cases} x=1 \Rightarrow c = \frac{11}{2} \\ x=2 \Rightarrow b + \frac{11}{2} = \frac{35}{6} \Rightarrow b = \frac{1}{3} \\ x=3 \Rightarrow 2a + 2 \times \frac{1}{3} + \frac{11}{2} = \frac{5}{2} \Rightarrow a = -\frac{11}{6} \end{cases}$$



$$3^\circ x=0 \text{ 代入得 } y = 2a - b + c = -\frac{11}{3} - \frac{1}{3} + \frac{11}{2} = -4 + \frac{11}{2} = \frac{3}{2} \text{ (公尺)}$$

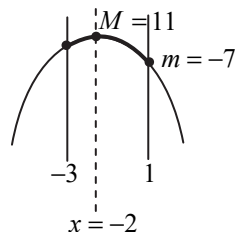
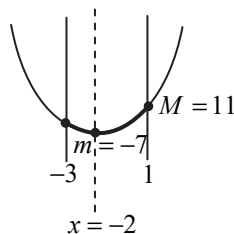
4.【答】： $(-2, -3)$

【解】： $1^\circ f(x) = ax^2 + 4ax - b \Rightarrow$ 對稱軸 $x = \frac{-4a}{2a} = -2$

$$2^\circ \begin{cases} a > 0 \\ f(-2) = -4a - b = -7 \\ f(1) = a + 4a - b = 11 \end{cases}$$

$$\text{或} \begin{cases} a < 0 \\ f(-2) = -4a - b = 11 \\ f(1) = 5a - b = -7 \end{cases}$$

$$\Rightarrow a = -2, b = -3$$



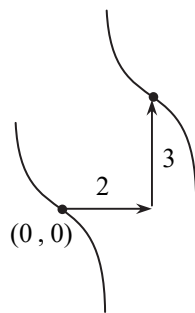
5.【答】： $(2, 3)$

【解】： $1^\circ f(x) = ax^3 \Rightarrow$ 對稱中心 $(0, 0)$

$$2^\circ g(x) = -x^3 + 6x^2 - 12x + 11$$

$$\text{對稱中心} \left(-\frac{b}{3a}, g\left(\frac{-b}{3a}\right)\right) = (2, g(2)) = (2, 3)$$

$$3^\circ (h, k) = (2, 3)$$



6.【答】： $(2)(3)(4)(5)$

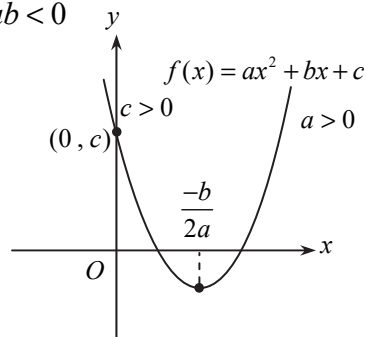
【解】： (1) 錯誤 $\begin{cases} a > 0 & (\text{右上升}) \\ -\frac{b}{2a} > 0 & (\text{頂點 } x \text{ 坐標}) \\ c > 0 & (y \text{ 軸截距}) \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a > 0 \\ b < 0 \Rightarrow ab < 0 \\ c > 0 \end{cases}$

(2) 正確 $f_1(x) = bx + c$, 通過第 I 象限

(3) 正確 $f_1(x) = a(x-b)^2 + c \Rightarrow$ 頂點 (b, c)
通過第 I 象限

(4) 正確 $f_3(x) = -ax^3 + c$
絕對遞減函數
單調函數

(5) 正確 $f_4(-x) = a(-x)^4 + b(-x)^2 - c = ax^4 + bx^2 - c = f_4(x)$
 $\therefore$ 為偶函數



7.【答】：(1)(2)(4)(5)

【解】：(1) 正確 $a > 0 \Rightarrow \Gamma_1$ 右上升

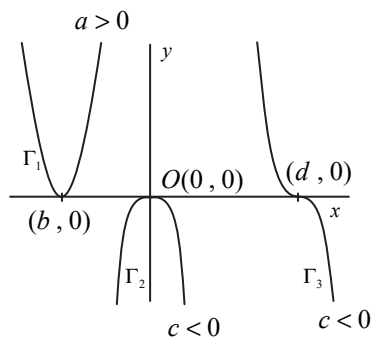
(2) 正確 $d > 0 \Rightarrow$ 三次函數
對稱中心

(3) 錯誤 $e < 0 \Rightarrow y = ex^4$ 右下降

(4) 正確 $y = ax + b \Rightarrow y$ 軸截距 $= b$

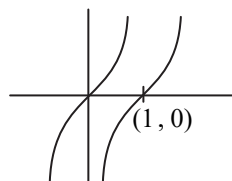
$$(5) \text{ 正確 } y = ax^2 + bx + c \Rightarrow \begin{cases} a > 0 \\ b < 0 \\ c < 0 \\ \text{頂點 } x = \frac{-b}{2a} > 0 \\ \text{頂點 } y = \frac{4ac - b^2}{4a} < 0 \end{cases}$$

與 x 軸有二個交點

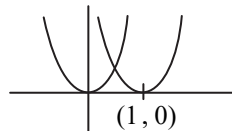


8.【答】：(3)(4)(5)

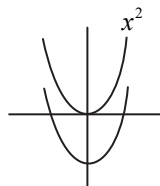
【解】：(1) 錯誤 $f(x) = x^3 \xrightarrow{\text{往右1單位}} g(x) = (x-1)^3$



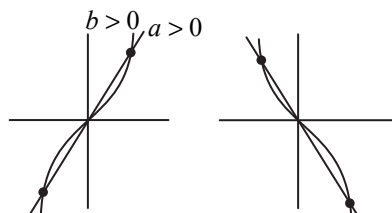
(2) 錯誤 $f(x) = x^4 \xrightarrow{\text{往右1單位}} g(x) = (x-1)^4$
 $f(-x) = (-x-1)^4 = (x+1)^4 \neq f(x)$



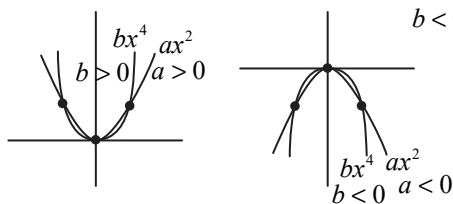
(3) 正確 $f(x) = x^2 - 1$



(4) 正確 a, b 同號



(5) 正確 $f(x) = ax^2, g(x) = bx^4$
 a, b 同號



9.【答】：(1)(2)(3)(5)

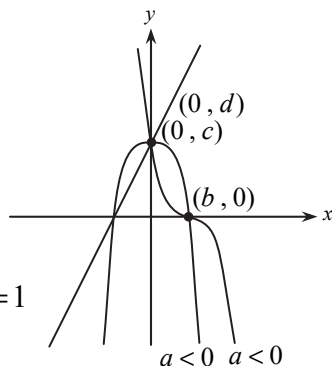
【解】：(1) 正確 圖形右邊看出 $a < 0$

(2) 正確 $g(0) = c > 0$

(3) 正確 $h(0) = d = c$

(4) 錯誤 $g(b) = ab^4 + c = 0 \Rightarrow ab^4 - c$

(5) 正確 $\begin{cases} ab^4 = -c \\ f(0) = a(0-b)^3 = c \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} ab^4 = -c \\ ab^3 = -c \end{cases} \Rightarrow b = 1$



10.【答】：第四象限

【解】：1° $y = f(x)$ 圖形對稱原點 $\Rightarrow$ 奇函數

$$y(-x) = a(-x)^3 + \underbrace{b(-x)^2}_{\text{令 } b=0} + c(-x)$$

$$= -(ax^3 + cx)$$

$$2^\circ y = f(x) = ax^3 + cx$$

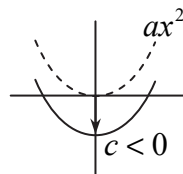
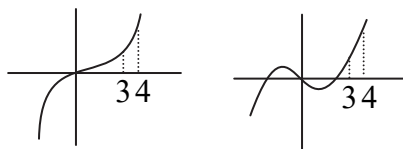
由 $f(4) > f(3) \Rightarrow$ 遞增

3° 確定 $a > 0$

$y = ax^2 + bx + c \Rightarrow$ 圖形過四個象限

$$\Rightarrow y = ax^2 + c$$

$\therefore (a, c)$ 落在第四象限

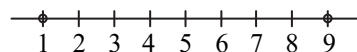


11.【答】：2

【解】：1° 原式 $\Rightarrow \boxed{(x-1)^2(x-9)^6(x-18)^2(x-a^2)^4} (x-1)(x-9) < 0$

$\Rightarrow 1 < x < 9$ 且 $x \neq 1, 9, 18, a^2$ (題目無等號)

$$\Rightarrow a^2 = 4 \Rightarrow a = 2$$



12.【答】： $x \leq -\frac{5}{2}$ 或 $-\frac{1}{2} \leq x \leq 1$ 或 $x = -1$

【解】：1° $f(x) > 0 \Rightarrow x < -1$ 或 $2 < x < 6$

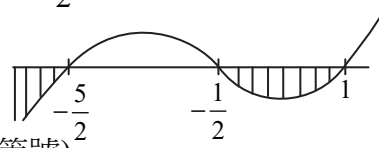
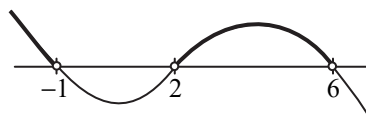
$$2^\circ (x^2 - 1)^2 f(1 - 2x) \leq 0$$

$$\Rightarrow (x-1)^2(x+1)^2(-1)(1-2x+1)(1-2x-2)(1-2x-6) \leq 0$$

$$\Rightarrow (x-1)^2(x+1)^2(-1)(-2)(x-1)(-2)(x+\frac{1}{2})(x+\frac{5}{2}) \leq 0$$

$$\Rightarrow \boxed{8(x-1)^2(x+1)^2} (x-1)(x+\frac{1}{2})(x+\frac{5}{2}) \leq 0$$

$$\Rightarrow x \leq -\frac{5}{2} \text{ 或 } -\frac{1}{2} \leq x \leq 1 \text{ 或 } x = -1 \text{ (題目有等號)}$$



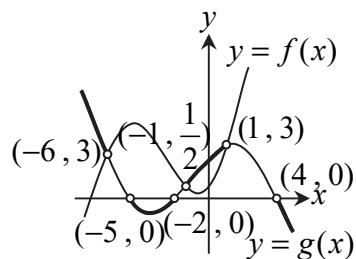
13.【答】： $x < -6$ 或 $-5 < x < -2$ 或 $-1 < x < 1$ 或 $x > 4$

$$\text{【解】} : 1^\circ \frac{f(x)}{g(x)} < 1 \Rightarrow \frac{f(x)}{g(x)} - 1 < 0 \Rightarrow \frac{f(x) - g(x)}{g(x)} < 0$$

$$\Rightarrow [f(x) - g(x)]g(x) < 0$$

$$\Rightarrow \begin{cases} g(x) > 0 \\ f(x) < g(x) \end{cases} \text{ 或 } \begin{cases} g(x) < 0 \\ f(x) > g(x) \end{cases}$$

$$\Rightarrow x < -6 \text{ 或 } -5 < x < -2 \text{ 或 } -1 < x < 1 \text{ 或 } x > 4$$



14.【答】： $x \geq 3$ 或 $x = -2$

【解】： $1^\circ f(x) > 0$ 解為 $-2 < x < 3$

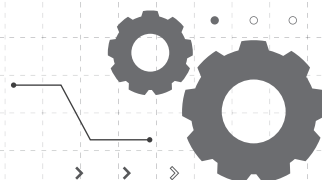
$$\Rightarrow \text{令 } f(x) = -(x+2)(x-3)$$

$$2^\circ (x+2)f(x) \leq 0 \Rightarrow (x+2)(-1)(x+2)(x-3) \leq 0$$

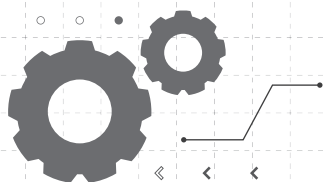
$$\Rightarrow (x+2)^2(x-3) \geq 0$$

$$\Rightarrow x \geq 3 \text{ 或 } x = -2$$

心得欄



心得欄





(一) BMI 指數的數學

身體質量指數(Body Mass Index , BMI)定義如下：

$$\text{BMI} = \frac{\text{體重}(kg)}{\text{身高平方}(m^2)}。$$

下表是成人體重分級與標準

分級	身體質量指數
體重過輕	$\text{BMI} < 18.5$
體重正常	$18.5 \leq \text{BMI} < 24$
體重過重	$24 \leq \text{BMI} < 27$
體重肥胖	$\text{BMI} \geq 27$



(1) 小牛身高 174cm，體重 87kg，請計算小牛 BMI 值？按照上表，小牛的體重是屬於那一個分級？

(2) 若小牛希望體重正常，則最少需減體重多少公斤？(四捨五入取整數值)

(3) 小牛一位好友小愛體重是 80 公斤，居然屬於體重過輕，請問小愛身高至少幾公分(四捨五入取整數)？

(4) NBA 籃球運動員林書豪身高 192cm、體重 92kg，小高身高 170cm，他說 BMI 值與林書豪相同，請問小高體重為何？(四捨五入取整數)

(二) WHIP值的數學

在職業棒球運動中，常定義一些統計量來衡量選手表現好壞，運動統計學的應用處處可見。其中在1979年，美國作家 Daniel Okrent 定義了WHIP值來衡量投手表現的好壞，其意義為一位投手的每一局被上壘率，公式如下：



$$\text{WHIP值} = \frac{\text{被安打數} + \text{非故意保送數}}{\text{投球總局數}}。$$

試回答下列問題:

- (1) 台灣之光陳偉殷在2018年效力於美國職棒邁阿密馬林魚隊，其在2018賽季的

被安打數為131支，非故意保送數為47次，投球總局數為 $133\frac{1}{3}$ 局，試求陳偉

殷在2018年的WHIP值為何？

- (2) 定義美國職棒大聯盟強力投手的 WHIP 值要不大於1，若將2018年賽季延長，陳偉殷需要連續投多少局的無安打且無非故意保送，在該季才可晉升美國職棒大聯盟強力投手的行列？

常用公式

$-$ $+$ $\div$ $=$ Σ π ∞ $\sqrt{\quad}$



公式 1 多項式係數

$$f(x) = a_0 + a_1x + a_2x^2 + \cdots + a_nx^n$$

$$(1) \text{ 常數項} = a_0 = \boxed{f(0)}$$

$$(2) \text{ 所有係數和} = a_0 + a_1 + \cdots + a_n = \boxed{f(1)}$$

$$(3) \text{ 所有係數交錯和} = a_0 - a_1 + a_2 - a_3 + \cdots + a_n(-1)^n = \boxed{f(-1)}$$

$$(4) \text{ 所有偶次項係數和} = a_0 + a_2 + a_4 + \cdots + a_{2k} = \boxed{\frac{f(1) + f(-1)}{2}}$$

$$(5) \text{ 所有奇次項係數和} = a_1 + a_3 + a_5 + \cdots + a_{2k+1} = \boxed{\frac{f(1) - f(-1)}{2}}$$

公式 2 綜合除法

(1) 綜合除法的目的是求 $\boxed{\text{商式}}$ 與 $\boxed{\text{餘式}}$

(2) 連續綜合除法的目的是將多項式表成另一種型式

$$(3) x^3 + 4x^2 + 6x + 1 = (x-1)^3 + 7(x-1)^2 + 17(x-1) + 12$$

將多項式表成泰勒展開式

$$(4) x^3 + 4x^2 + 6x + 1 = (x-1)(x-2)(x-3) + 10(x-1)(x-2) + 25(x-1) + 12$$

將多項式表成逐一減項

公式 3 置換(利用綜合除法)

$$\boxed{\text{型 1}} \quad x^3 + 2x^2 + 6x + 1 = (x-1)^3 + 5(x-1)^2 + 13(x-1) + 10$$

方法：利用連續綜合除法

$$\boxed{\text{型 2}} \quad (x+2)^3 + 2(x+2)^2 + 6(x+2) + 1 = (x+1)^3 + 5(x+1)^2 + 13(x+1) + 10$$

$$\Rightarrow t^3 + 2t^2 + 6t + 1 = (t-1)^3 + 5(t-1)^2 + 13(t-1) + 10$$

$$\boxed{\text{型 3}} \quad f(x-1) = x^3 + 2x^2 + 6x + 1 = (x-1)^3 + 5(x-1)^2 + 13(x-1) + 10$$

$$\therefore f(t) = t^3 + 5t^2 + 13t + 10 \quad \text{即} \quad f(x) = x^3 + 5x^2 + 13x + 10$$

公式 4 餘式定理

(1) 除法表現定理：被除式 = 除式 $\times$ 商式 + 餘式

(2) $\deg$ 餘式 $< \deg$ 除式 或 餘式 = 0

$$(3) f(x) = (x-a)q(x) + r \Rightarrow \boxed{r = f(a)}$$

$$(4) f(x) = (ax-b)q(x) + r \Rightarrow \boxed{r = f\left(\frac{b}{a}\right)}$$

(5) 多項式中，求餘式時，必使用除法表現定理

公式 5 同義不等式

(1) $ax+b > 0$ 與 $lx+m > 0$ 同義 (解相同)

$$\text{條件：} \left\{ \begin{array}{l} \frac{a}{l} = \frac{b}{m} \text{ (係數成比例)} \\ al > 0 \text{ (領導係數同號)} \end{array} \right.$$

(2) $ax^2+bx+c > 0$ 與 $lx^2+mx+n > 0$ 同義

$$\text{條件：} \left\{ \begin{array}{l} \frac{a}{l} = \frac{b}{m} = \frac{c}{n} \\ al > 0 \end{array} \right.$$

公式 6 二次不等式

$$(1) \left\{ \begin{array}{l} ax^2+bx+c > 0 \\ a > 0 \\ D > 0 \end{array} \right. \Rightarrow \begin{array}{c} \text{圖象} \\ \text{開口向上的拋物線，與x軸交於}\alpha\text{和}\beta \end{array} \Rightarrow \text{解為 } x > \beta \text{ 或 } x < \alpha$$

$$(2) \left\{ \begin{array}{l} ax^2+bx+c > 0 \\ a > 0 \\ D = 0 \end{array} \right. \Rightarrow \begin{array}{c} \text{圖象} \\ \text{開口向上的拋物線，與x軸相切於}\alpha \end{array} \Rightarrow \text{解為 } : x \in R \text{ 且 } x \neq \alpha$$

$$(3) \left\{ \begin{array}{l} ax^2+bx+c > 0 \\ a > 0 \\ D < 0 \end{array} \right. \Rightarrow \begin{array}{c} \text{圖象} \\ \text{開口向上的拋物線，完全在x軸上方} \end{array} \Rightarrow \text{解為 } : x \in R$$

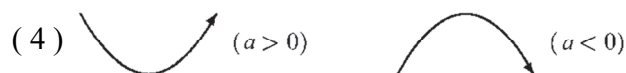
公式 7 二次函數

(1) $y = ax^2 + bx + c$ (一般式)

(2) $y = a(x - \alpha)(x - \beta)$ (二根分解式)



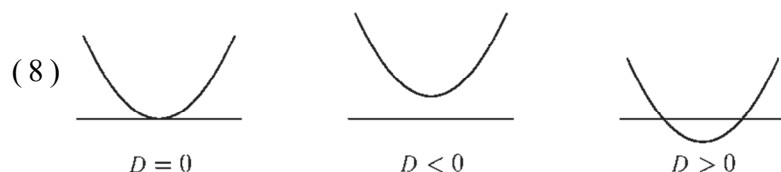
(3) $y = ax^2 + bx + c \Rightarrow y = a(x + \frac{b}{2a})^2 + \frac{4ac - b^2}{4a}$



(5) 頂點 $(-\frac{b}{2a}, \frac{4ac - b^2}{4a})$

(6) 對稱軸 $x = -\frac{b}{2a}$

(7) $\begin{cases} |a| \text{ 值愈大, 開口愈小} \\ |a| \text{ 值愈小, 開口愈大} \end{cases}$



公式 8 三次函數圖形

(1) $y = ax^3 + cx$ 圖形，原點 O 為對稱中心。

(2) $y = ax^3 + bx^2 + cx + d$ 之對稱中心為 $(-\frac{b}{3a}, f(-\frac{b}{3a}))$

公式 9 分式不等式

(1) $\frac{B}{A} < 0 \Rightarrow AB < 0$

(2) $\frac{B}{A} \leq 0 \Rightarrow \begin{cases} AB \leq 0 \\ A \neq 0 \end{cases}$

(3) $\frac{B}{A} < C \Rightarrow \frac{B - AC}{A} < 0 \Rightarrow A(B - AC) < 0$

(4) $\frac{B}{A} \leq C \Rightarrow \frac{B - AC}{A} \leq 0 \Rightarrow \begin{cases} A(B - AC) \leq 0 \\ A \neq 0 \end{cases}$

公式 10 根式不等式

$$(1) \sqrt{A} < B \Rightarrow \begin{cases} A \geq 0 \\ B > 0 \\ A < B^2 \end{cases}$$

$$(2) \sqrt{A} \leq B \Rightarrow \begin{cases} A \geq 0 \\ B \geq 0 \\ A \leq B^2 \end{cases}$$

$$(3) \sqrt{A} > B \Rightarrow \begin{cases} B \geq 0 \\ A > 0 \\ A > B^2 \end{cases} \quad \text{或} \quad \begin{cases} B < 0 \\ A \geq 0 \end{cases}$$

$$(4) \sqrt{A} \geq B \Rightarrow \begin{cases} B \geq 0 \\ A \geq 0 \\ A \geq B^2 \end{cases} \quad \text{或} \quad \begin{cases} B < 0 \\ A \geq 0 \end{cases}$$