



直線方程式及其圖形

主題 1 平面直角坐標系



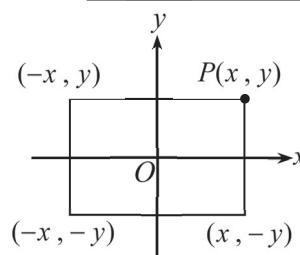
【觀念一】 (1) 二維直角坐標系分為 _____ 部分，即 _____

(2) x, y 軸不屬於任何 _____

(3) $P(x, y)$ 對稱 x 軸：(_____ , _____)

對稱 y 軸：(_____ , _____)

對稱 O 點：(_____ , _____)



(4) $P(x, y)$ 對 x 軸的垂足：(_____ , _____)

對 y 軸的垂足：(_____ , _____)

(5) $P(x, y)$ 到 x 軸的距離 = _____

到 y 軸的距離 = _____

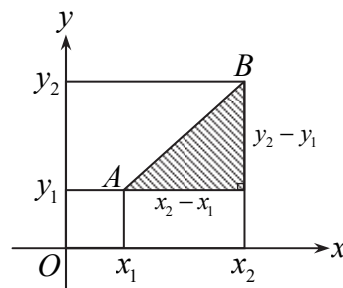
到 O 點的距離 = _____

(6) x 軸方程式： _____ , P 在 x 軸上可設 P (_____ , _____)

y 軸方程式： _____ , P 在 y 軸上可設 P (_____ , _____)

【觀念二】 $A(x_1, y_1), B(x_2, y_2)$, A, B 二點距離 $d(A, B) =$ _____

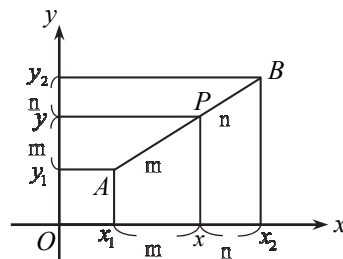
《說明》



【觀念三】內分點公式： $A(x_1, y_1), B(x_2, y_2), P(x, y)$

$$\overline{AP} : \overline{PB} = m : n$$

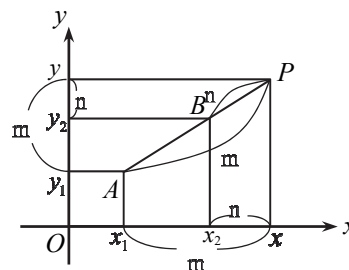
$$P : \begin{cases} x = \\ y = \end{cases}$$



【觀念四】外分點公式： $A(x_1, y_1), B(x_2, y_2), P(x, y)$

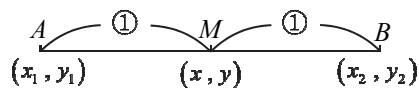
$$\overline{AP} : \overline{PB} = m : n \quad (m > n)$$

$$P : \begin{cases} x = \\ y = \end{cases}$$



【觀念五】中點坐標公式：

$$M : \begin{cases} x = \\ y = \end{cases}$$

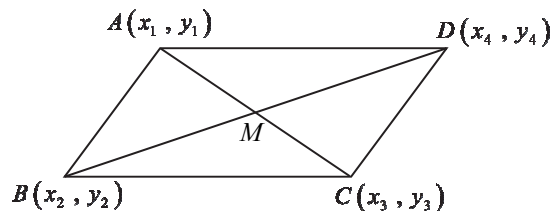


《推廣》(1) $M =$

(2) $B =$

【觀念六】平行四邊形坐標公式

{



例 1. (能力指標：平行四邊形坐標)

FDMV

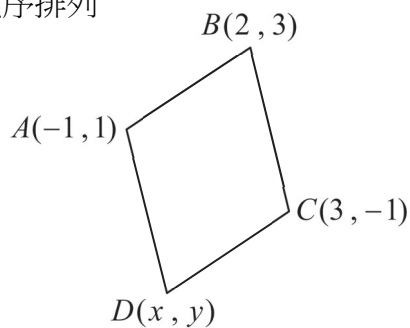


(1) $A(-1, 1)$, $B(2, 3)$, $C(3, -1)$, $ABCD$ 為平行四邊形，求 D 的坐標？

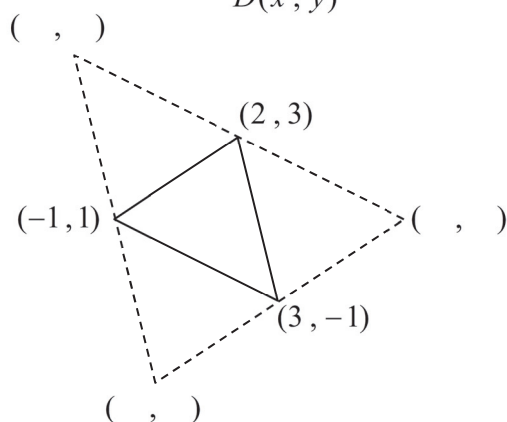
(2) $(-1, 1)$, $(2, 3)$, $(3, -1)$ 為平行四邊形三頂點，求第四點的坐標？

解： (1) $ABCD$ 為平行四邊形，其頂點必須按順序排列

{



(2)



例 2. (能力指標：內外分點公式)

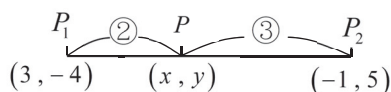
EJYC



$P_1(3, -4)$, $P_2(-1, 5)$, $P \in \overleftrightarrow{P_1P_2}$ 且 $\overline{P_1P} : \overline{PP_2} = 2:3$ ，求 P 的坐標？

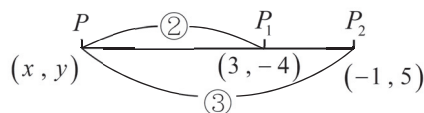
解： (1) 可能 P 為內分點

{
 $x =$
 $y =$



(2) 可能 P 為外分點

{
 $x =$
 $y =$



例 3. (能力指標：內外角平分線性質)

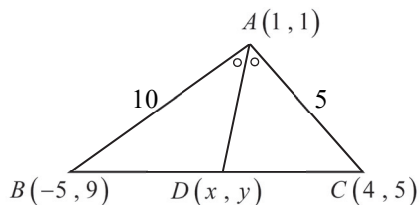
AYTD



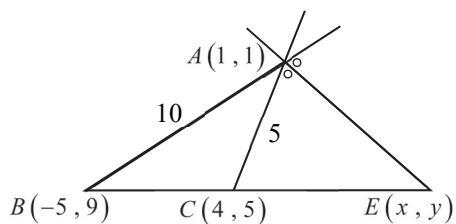
$A(1,1)$, $B(-5,9)$, $C(4,5)$, $\angle A$ 的內角平分線與 $\overline{BC}$ 交於 D ,
 $\angle A$ 的外角平分線與 $\overline{BC}$ 交於 E , 求 D, E 的坐標?

解： 1° $\overline{AB} = \sqrt{36+64} = 10$, $\overline{AC} = \sqrt{9+16} = 5$

$$D: \begin{cases} x = \\ y = \end{cases}$$



$$2^\circ E: \begin{cases} x = \\ y = \end{cases}$$



例 4. (能力指標：點在 x 軸上)

XICE



P 在 x 軸上, $A(-1,3)$, $B(2,1)$, P 到 A, B 二點等距,
 求 P 的坐標。

解： 1° P 在 x 軸上, P 可設 $(t, 0)$

2° 利用 $\overline{PA}^2 = \overline{PB}^2 \Rightarrow$

例 5. (能力指標：正三角形頂點坐標)

$A(1,1), B(0,3), C(x,y)$ ， C 點落在第 I 象限，且 $\triangle ABC$ 為正三角形，求 C 點的坐標？



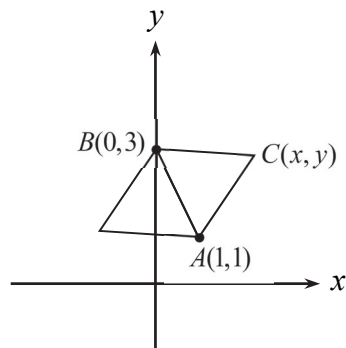
解：
$$\begin{cases} \overline{CB}^2 = \overline{CA}^2 \\ \overline{CB}^2 = \overline{AB}^2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x^2 + (y-3)^2 = (x-1)^2 + (y-1)^2 \\ x^2 + (y-3)^2 = 1+4 \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} 2x - 4y + 7 = 0 \\ x^2 + (y-3)^2 = 5 \end{cases}$$

$$\Rightarrow \left(\frac{4y-7}{2}\right)^2 + (y-3)^2 = 5 \Rightarrow y = 2 \pm \frac{\sqrt{3}}{2}$$

$$\Rightarrow \text{取 } y = 2 + \frac{\sqrt{3}}{2}, \text{ 可求出 } x = \frac{1}{2} + \sqrt{3}$$

$$\therefore C \text{ 坐標為 } \left(\frac{1}{2} + \sqrt{3}, 2 + \frac{\sqrt{3}}{2}\right)$$

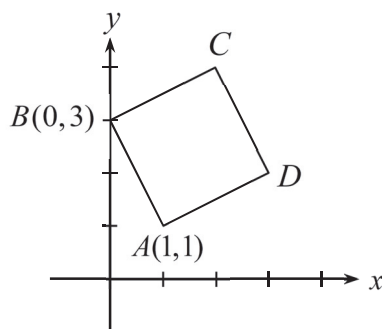


例 6. (能力指標：正方形頂點坐標)

如圖，一正方形 $ABCD$ ，且 $A(1,1), B(0,3)$ ，求 C, D 坐標？



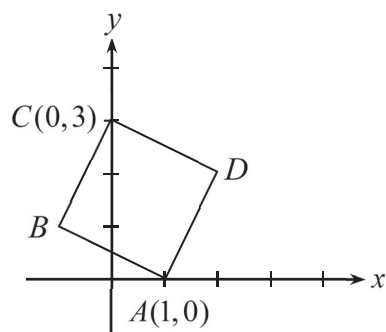
解



例 7. (能力指標：正方形頂點坐標)

如圖，一正方形 $ABCD$ ，且 $A(1, 0), C(0, 3)$ ，求 B, D 坐標？

解





回家作業



1. $ABCD$ 是一個平行四邊形，已知 $A(2, -1)$, $B(3, 4)$, $C(0, -5)$ ，求 D 點坐標。



2. 兩點 $(x, 3)$ 與 $(2, -1)$ 的距離為 5，則 $x =$ _____。



1. $(-1, -10)$ 2. 5 或 -1



回家作業



3. (94 學測試題)

在坐標平面上，正方形 $ABCD$ 的四個頂點坐標分別為 $A(0, 1)$, $B(0, 0)$, $C(1, 0)$, $D(1, 1)$ 。設 P 為正方形 $ABCD$ 內部的一點，若 $\triangle PDA$ 與 $\triangle PBC$ 的面積比為 $1:2$ ，且 $\triangle PAB$ 與 $\triangle PCD$ 的面積比為 $2:3$ ，則 P 點的坐標為_____。(化成最簡分數)

4. (96 數乙試題)

平面上坐標皆為整數的點稱為格子點，我們將原點以外的格子點分層，方法如下：若 (a, b) 是原點 $(0, 0)$ 以外的格子點，且 $|a|$ 和 $|b|$ 中最大值為 n ，則稱 (a, b) 是在第 n 層的格子點 (例如 $(3, -4)$ 是在第 4 層； $(8, -8)$ 是在第 8 層)。則在第 15 層的格子點個數為_____。



3. $(\frac{2}{5}, \frac{2}{3})$ 4. 120



回家作業



5. (102 學測試題)

坐標平面中 $A(a, 3), B(16, b), C(19, 12)$ 三點共線。已知 C 不在 A, B 之間，
且 $\overline{AC} : \overline{BC} = 3 : 1$ ，則 $a + b =$ _____。



5. 19

主題 1 平面直角坐標系

KKVD



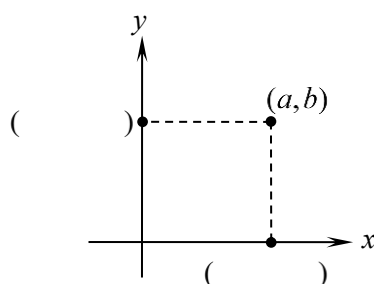
1. 對稱與投影

(1) 對坐標軸的投影：

點對於某直線的投影點又稱為_____。

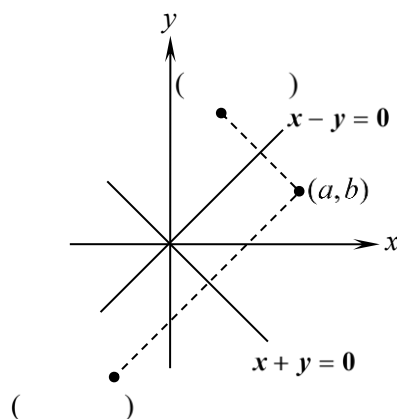
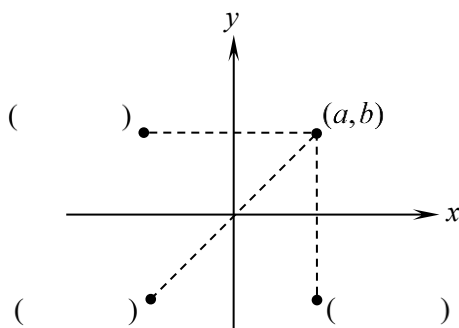
① $P(a, b)$ 對 x 軸的垂足為 $(a, 0)$ 。

② $P(a, b)$ 對 y 軸的垂足為 $(0, b)$ 。



(2) 五大基本對稱：

原坐標	對稱軸或對稱中心	對稱點坐標
(a, b)	x 軸 ($y = 0$)	$(a, -b)$
(a, b)	y 軸 ($x = 0$)	$(-a, b)$
(a, b)	原點	$(-a, -b)$
(a, b)	$x - y = 0$	(b, a)
(a, b)	$x + y = 0$	$(-b, -a)$



2. 平面上動點假設法

(1) 點在特殊直線上：

① 若點 P 在 x 軸上，可設 $P(t, 0), t \in \mathbb{R}$ 。

② 若點 P 在 y 軸上，可設 $P(0, t), t \in \mathbb{R}$ 。

③ 若點 P 在直線 $x - y = 0$ 上，可設 $P(\quad), t \in \mathbb{R}$ 。

(2) 點在任意直線上：

給定一直線 $L: ax + by + c = 0$ 及上一點 (x_0, y_0) ，則 L 上的動點參數式可寫成

$$(x, y) = (x_0 + bt, y_0 - at), t \in \mathbb{R}。$$

【說例 1】 直線方程式的係數有 1 時如何假設動點？

直線 $x + 2y - 7 = 0$ 上的動點可設為 $P(\quad), t \in \mathbb{R}$ 或

或 $P(\quad), t \in \mathbb{R}$ 。

【說例 2】 直線方程式的係數沒有 1 時如何假設動點？

以直線 $3x + 4y = 10$ 為例：

故直線 $3x + 4y = 10$ 上的動點可設為 $P(\quad), t \in \mathbb{R}$ 。

【說例 3】 直線方程式的係數沒有 1 時如何假設動點？

以直線 $3x - 2y = 5$ 為例：

故直線 $3x - 2y = 5$ 上的動點可設為 $P(\quad), t \in \mathbb{R}$ 。

(3) 由動點參數式反推直線：

若給定直線 L 上的動點參數式 $(x, y) = (x_0 + bt, y_0 + at)$, $t \in \mathbb{R}$ ，一般由消掉參數 t 可反求 x, y 的關係，即直線 L 的方程式。

【說例】已知直線上的動點參數式如何反求直線方程式？

已知平面上的動點坐標 $P: \begin{cases} x = 2t + 3 \\ y = 3t - 1 \end{cases}$

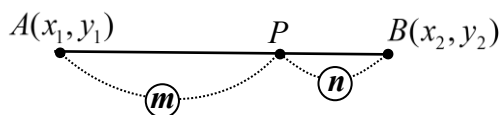
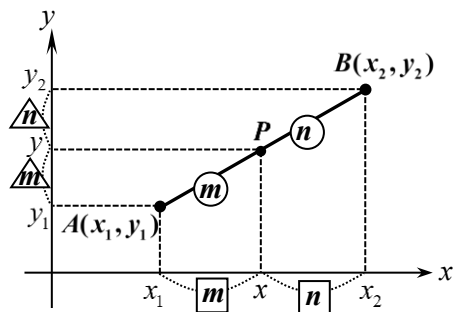
故動點 $P(2t + 3, 3t - 1)$ 恆在直線_____上。

(4) 格子點：

若 xy 平面上某個點的 x 坐標與 y 坐標皆為整數，我們稱之為_____。

3. 分點公式

(1) 內分點公式：

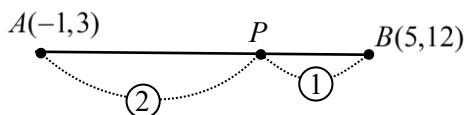


平面上有兩點 $A(x_1, y_1)$ 及 $B(x_2, y_2)$ ，且 P 在線段 $\overline{AB}$ 上， $\overline{AP}:\overline{PB} = m:n$ ， P 即為

$\overline{AB}$ 的內分點，公式為：

$$P: \begin{cases} x = \frac{mx_2 + nx_1}{m + n} \\ y = \frac{my_2 + ny_1}{m + n} \end{cases}。$$

【說例】



主題 2 重心、內心、外心

MAXG

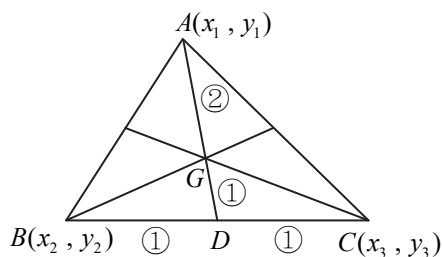


【觀念一】重心 (三中線交點)

(1) $D(\quad , \quad)$

(2) $G: \begin{cases} x = \\ y = \end{cases}$

公式 $G(\frac{x_1+x_2+x_3}{3}, \frac{y_1+y_2+y_3}{3})$



【觀念二】內心 (三內角平分線交點)

(1) $\overline{BD} : \overline{DC} = c : b$

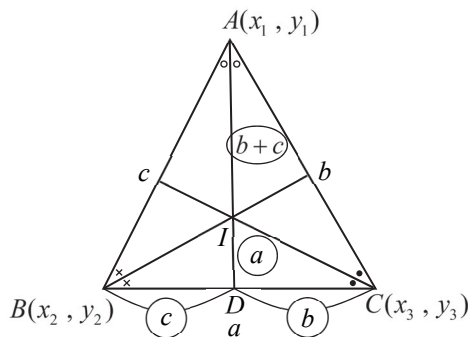
(2) $\overline{BD} = \frac{c}{c+b} \cdot a$

(3) $\frac{\overline{AI}}{\overline{ID}} = \frac{\overline{AB}}{\overline{BD}} = \frac{c}{\frac{c}{c+b} \cdot a} = \frac{b+c}{a}$

(4) $D(\frac{bx_2+cx_3}{b+c}, \frac{by_2+cy_3}{b+c})$

(5) $I: \begin{cases} x = \\ y = \end{cases}$

公式 $I(\frac{ax_1+bx_2+cx_3}{a+b+c}, \frac{ay_1+by_2+cy_3}{a+b+c})$

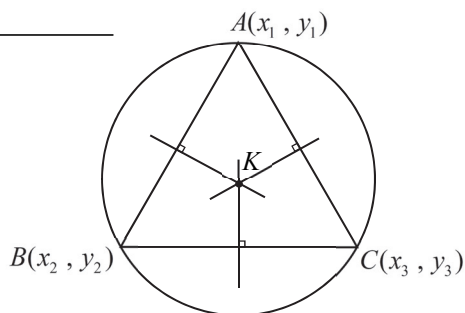


【觀念三】外心 (三邊中垂線交點)

(1) $\triangle ABC$ 外接圓圓心為 _____

(2) $\triangle ABC$ 外接圓半徑為

$$\overline{KA} = \overline{KB} = \overline{KC}$$



例 1. (能力指標：重心坐標)

已知 $G(2, -1)$ 為 $\triangle ABC$ 的重心，若 $A(3, 5)$, $B(-1, 3)$ ，
求 C 的坐標？

解：

GZBV



例 2. (能力指標：距離平方和最小值)

$A(1, -1)$, $B(5, 6)$, $C(0, 1)$, $P(x, y)$ ，求 $\overline{PA}^2 + \overline{PB}^2 + \overline{PC}^2$
的最小值及 P 的坐標。

解： $1^\circ \overline{PA}^2 + \overline{PB}^2 + \overline{PC}^2 = (x-1)^2 + (y+1)^2 + (x-5)^2 + (y-6)^2 + x^2 + (y-1)^2$
 $= 3x^2 + 3y^2 - 12x - 12y + 64$
 $= 3(x-2)^2 + 3(y-2)^2 + 40$

IVWN



心得 $\overline{PA}^2 + \overline{PB}^2 + \overline{PC}^2$ 最小值時， $P = \frac{A+B+C}{3}$

例 3. (能力指標：外心坐標)

$A(5, 5), B(-2, 6), C(1, 7)$ ，求 $\triangle ABC$ 外心的坐標？

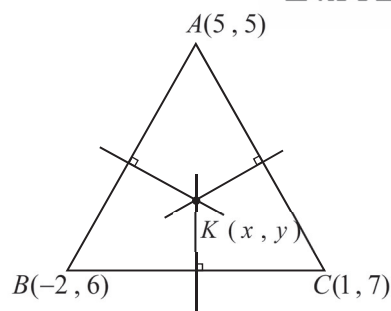


解： 1° 令 $K(x, y)$ 利用 $\begin{cases} \overline{KA}^2 = \overline{KB}^2 \\ \overline{KA}^2 = \overline{KC}^2 \end{cases}$

$$\Rightarrow \begin{cases} (x-5)^2 + (y-5)^2 = (x+2)^2 + (y-6)^2 \\ (x-5)^2 + (y-5)^2 = (x-1)^2 + (y-7)^2 \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} \\ \end{cases}$$

$$\Rightarrow \text{解出} \begin{cases} x=1 \\ y=2 \end{cases} \text{ 外心 } K(1, 2)$$



例 4. (能力指標：內心坐標)

$A(-1, 1), B(2, -3), C(5, 9)$ ，求 $\triangle ABC$ 內心的坐標？

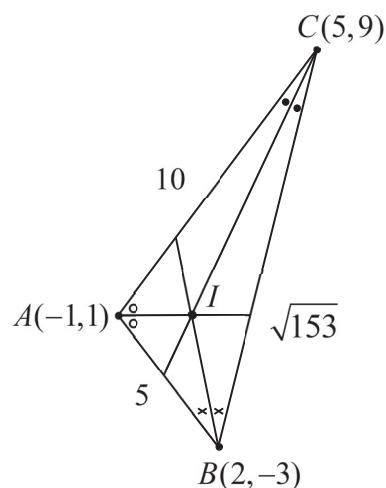


解： $\overline{AB} = \sqrt{9+16} = 5$

$$\overline{AC} = \sqrt{36+64} = 10$$

$$\overline{BC} = \sqrt{9+144} = \sqrt{153}$$

$$I: \begin{cases} x = \\ y = \end{cases}$$





回家作業



1. $\triangle ABC$ 的三頂點為 $A(3, 5)$, $B(-1, 2)$, $C(9, -3)$

(1) 分別求 $\overline{AB}$ 與 $\overline{AC}$ 的中垂線方程式。

(2) 求 $\triangle ABC$ 的外心坐標 ($\triangle ABC$ 的外接圓圓心叫做外心)。



2. $A(1, 2)$, $B(-3, 1)$, $C(-2, -4)$

(1) 求 $\triangle ABC$ 的外心坐標。

(2) 求 $\triangle ABC$ 的重心坐標。

(3) 求證：三邊上的高交於一點。(此點稱為 $\triangle ABC$ 的垂心)

(4) 判斷 $\triangle ABC$ 的外心、重心、垂心是否共線。



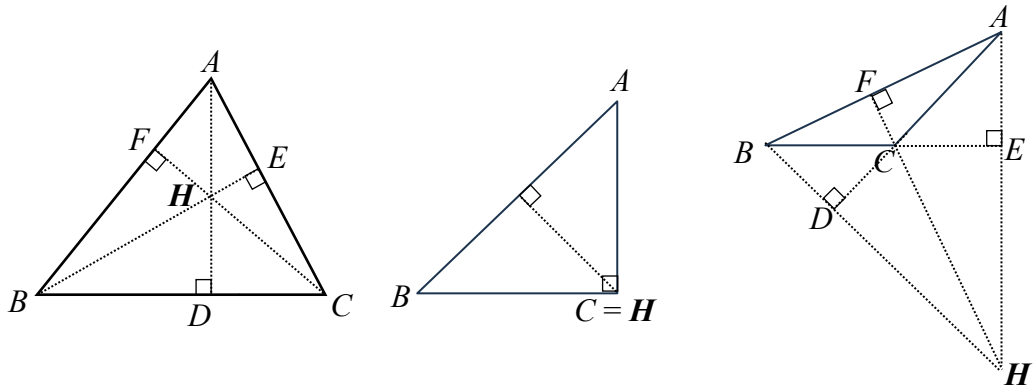
1. (1) $\overline{AB}$ 中垂線： $8x + 6y - 29 = 0$ $\overline{AC}$ 中垂線： $3x - 4y - 14 = 0$ (2) $(4, -\frac{1}{2})$

2. (1) $(-\frac{5}{14}, -\frac{15}{14})$ (2) $(-\frac{4}{3}, -\frac{1}{3})$ (3) 見詳解 (4) 見詳解

4. 三角形的垂心

(1) 定義：

平面上 $\triangle ABC$ 的三高交於點 H ， H 點即稱為垂心。且垂心 H 可能在 $\triangle ABC$ 內部、外部或邊上。

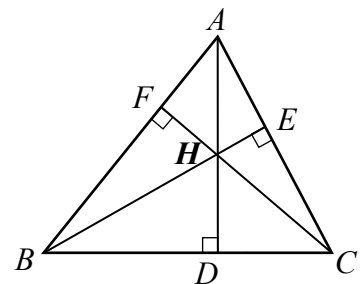


(2) 坐標求法：

① 假設垂心坐標 $H(x, y)$ ，

再利用 $\begin{cases} m_{AH} \cdot m_{BC} = -1 \\ m_{BH} \cdot m_{AC} = -1 \end{cases}$ 得 H 。

② 求出 AH 和 BH 的直線方程式，
再利用 AH 和 BH 交點得 H 。



5. 尤拉線 [非課綱範圍，請自行參考]

(1) 意義：

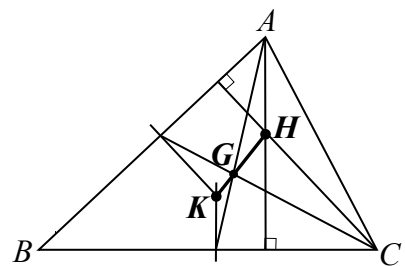
所有的三角形之外心、重心、垂心皆會共線，
此線稱為尤拉線。

(2) 性質：

若三角形之外心、重心、垂心分別為 K, G, H ，則：

① 外心 K 、重心 G 、垂心 H 共線。

② $\overline{KG}:\overline{GH}=1:2$ 。



【證明】

1° K 為 $\triangle ABC$ 外接圓圓心

作直線 BK 交圓於 F 且 $\overline{BF}$ 為直徑

$$\therefore \overline{BM} : \overline{MC} = \overline{BK} : \overline{KF} = 1:1$$

$$\therefore \overline{FC} \perp \overline{BC} \text{ 且 } \overline{FC} = 2\overline{KM}$$

$$\Rightarrow \overline{FC} \parallel \overline{AH} \text{ 且 } \overline{FC} = 2\overline{KM} \dots\dots ①$$

2° $\because \overline{BF}$ 為直徑 $\therefore \overline{AF} \perp \overline{AB}$

又 $\overline{CQ}$ 為 $\overline{AB}$ 邊上的高 $\therefore \overline{CQ} \perp \overline{AB}$

故 $\overline{AF} \parallel \overline{CH} \dots\dots ②$

3° 由①②可得知 $AFCH$ 為平行四邊形

$$\text{且 } \overline{AH} = \overline{FC} = 2\overline{KM} \quad (\triangle BKM \sim \triangle BFC) \dots\dots ③$$

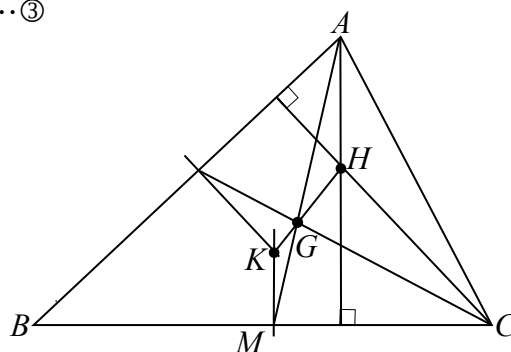
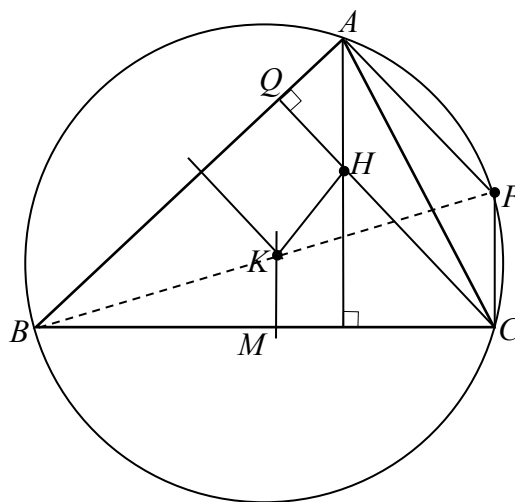
4° 連接中線 $\overline{AM}$ ，重心 G 在 $\overline{AM}$ 上

$$\text{且 } \overline{MG} : \overline{GA} = 1:2 \dots\dots ④$$

5° 由③④且 $\angle KMG = \angle GAH$ (內錯角)

$$\therefore \triangle GMK \sim \triangle GAH \text{ 且 } \overline{KG} : \overline{GH} = 1:2$$

故 K 、 G 、 H 共線，且 $\overline{KG} : \overline{GH} = 1:2$



主題 3 斜率

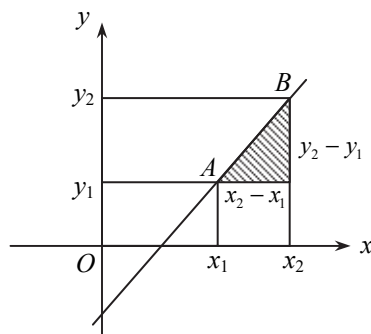
GYFA



【觀念一】直線斜率定義

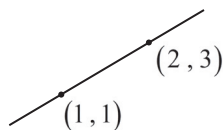
直線上任二點 $A(x_1, y_1)$, $B(x_2, y_2)$ 其間鉛直變化量與水平變化量之比值 (一般用 m 表示)

$$m = \frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} = \frac{y_1 - y_2}{x_1 - x_2}$$



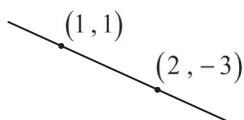
【觀念二】直線斜率可分四種情形

(1)



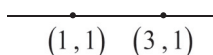
$m =$

(2)



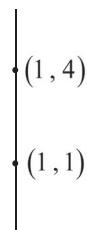
$m =$

(3)



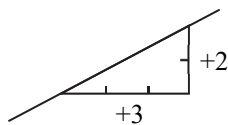
$m =$

(4)

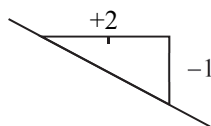


$m =$

【觀念三】(1) 直線 L : 若 x 增加 3 單位, 則 y 增加 2 單位 $\Rightarrow m =$



(2) 直線 L : 若 x 增加 2 單位, 則 y 減少 1 單位 $\Rightarrow m =$

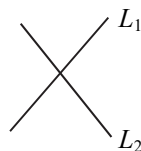
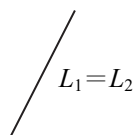
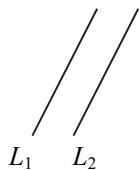


【觀念四】二直線的關係有三種

(1) 平行

(2) 重合

(3) 相交一點

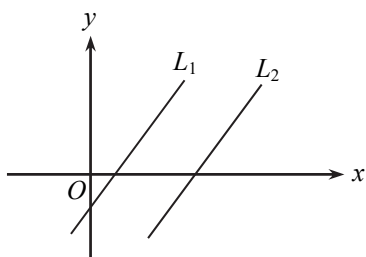


【觀念五】 (1) 若 $L_1 \parallel L_2$ (L_1, L_2 不為鉛直線), 則 $m_1 = m_2$

(2) 若 $L_1 = L_2$ (L_1, L_2 不為鉛直線), 則 $m_1 = m_2$

(3) 若 $m_1 = m_2$, 則 L_1, L_2 可能 _____ 或 _____

《說明》



【觀念六】 (1) 若 $L_1 \perp L_2$ (L_1, L_2 不為鉛直、水平), 則 $m_1 m_2 = -1$

(2) 若 $m_1 m_2 = -1$, 則 $L_1 \perp L_2$

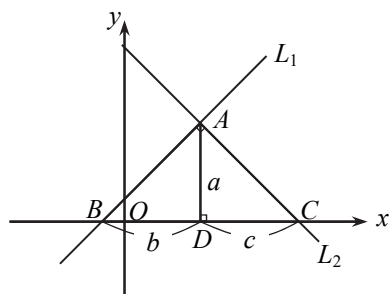
《說明》(1) $\triangle ABD \sim \triangle CAD$

$$\therefore \frac{a}{b} = \frac{c}{a}$$

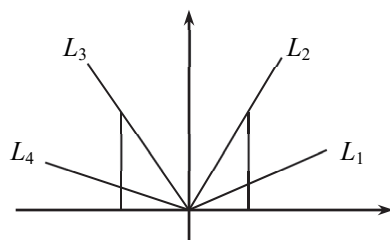
(2) $m_1 =$

$m_2 =$

$\Rightarrow m_1 m_2 =$



【觀念七】斜率比較大小

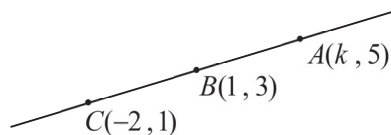


例 1. (能力指標：三點共線)

$A(k, 5)$, $B(1, 3)$, $C(-2, 1)$ 三點共線，求 $k = ?$

解： $m_{\overline{AB}} = m_{\overline{BC}}$

$\Rightarrow$



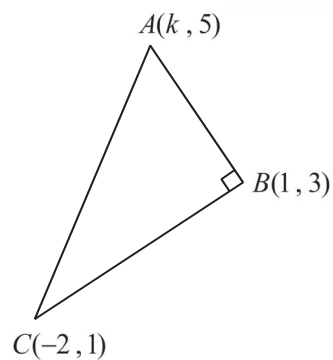
例 2. (能力指標：直角三角形)

$A(k, 5)$, $B(1, 3)$, $C(-2, 1)$ ， $\triangle ABC$ 為直角三角形，
且 $\angle B$ 為直角，求 $k = ?$

解： $m_{\overline{AB}} =$

$m_{\overline{BC}} =$

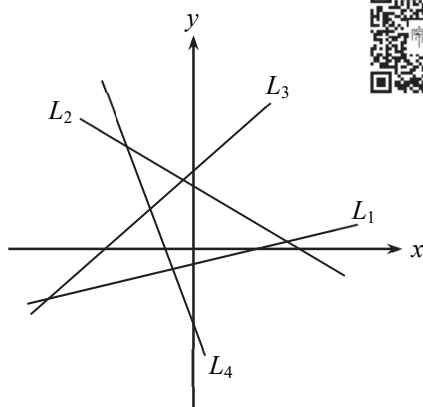
$m_{\overline{AB}} \cdot m_{\overline{BC}} = -1 \Rightarrow$



例 3. (能力指標：斜率比較大小)

比較 L_1, L_2, L_3, L_4 斜率的大小？

解：



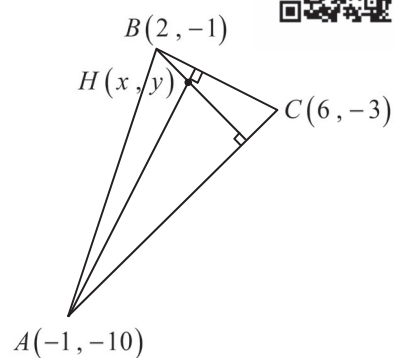
例 4. (能力指標：垂心與外心)

$A(-1, -10), B(2, -1), C(6, -3)$ ，求 $\triangle ABC$

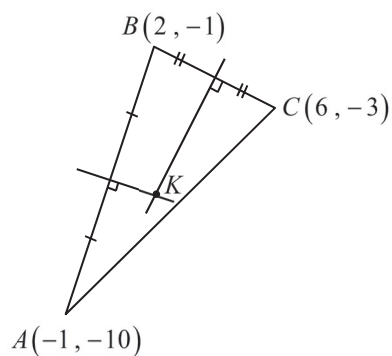
(1) 垂心的坐標？ (2) 外心的坐標？

解： (1) 垂心 $H(x, y)$

$$\begin{cases} m_{\overline{AH}} \cdot m_{\overline{BC}} = -1 \\ m_{\overline{BH}} \cdot m_{\overline{AC}} = -1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \end{cases}$$



(2) 令外心 $K(x, y)$



例 5. (能力指標：平行與垂直)

梯形 $ABCD$ 中， $\overline{AD} \parallel \overline{BC}$ ， $\overline{AD} \perp \overline{CD}$ ， $A(-1, 3)$ ， $B(-4, 1)$ ， $C(2, -2)$ ，求 D 的坐標？

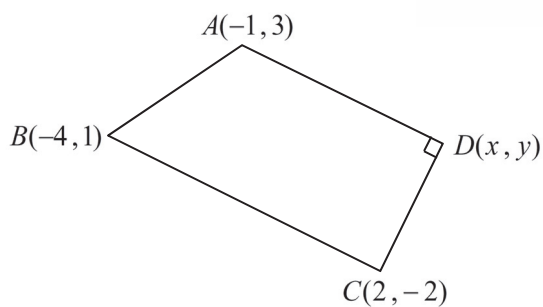


解： 1° 令 $D(x, y)$

$$\because \overline{AD} \parallel \overline{BC}$$

$$\therefore m_{\overline{AD}} = m_{\overline{BC}} \Rightarrow$$

$$2^\circ \overline{AD} \perp \overline{CD}$$





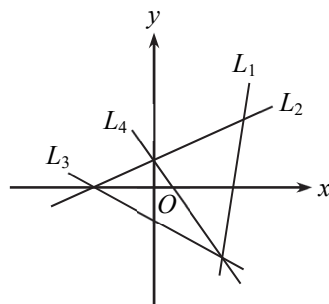
回家作業



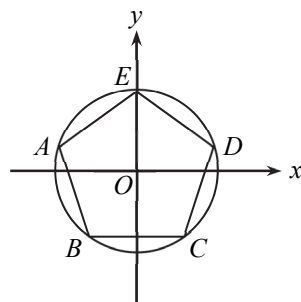
1. 若三點 $(1, -1)$, $(3, 3)$ 與 $(4, k)$ 位在一直線上, 則 $k =$ _____。



2. 如右圖, 設四條直線 L_1, L_2, L_3, L_4 的斜率分別為 m_1, m_2, m_3, m_4 , 試比較此四數的大小。



3. 設正五邊形 $ABCDE$ 中心在原點, 頂點 E 在正 y 軸上, 如右圖。若直線 AB, BC, CD, DE, EA 之斜率分別為 m_1, m_2, m_3, m_4, m_5 , 試比較此五數之大小。



簡答

1. 5 2. $m_1 > m_2 > m_3 > m_4$ 3. $m_3 > m_5 > m_2 > m_4 > m_1$



回家作業



4. 設 $A(2, 1)$, $B(3, 5)$, $C(6, 4)$, $D(5, a)$

(1) 若 $\overline{AB} \parallel \overline{CD}$ ，則 a 值是多少？ (2) 若 $\overline{AC} \perp \overline{BD}$ ，則 a 值是多少？

5. 設 $A(4, 1)$, $B(-2, 3)$, $C(a, a-1)$ ，如果 $\triangle ABC$ 為直角三角形，試求 a 值。

[提示] 依 $\angle A = 90^\circ$, $\angle B = 90^\circ$, $\angle C = 90^\circ$ 分別去求。

6. $A(3, 4)$, $B(-2, 1)$ ，點 P 在 x 軸上且 $\overline{AP} \perp \overline{BP}$ ，求 P 點坐標。



4. (1) $a = 0$ (2) $a = \frac{7}{3}$ 5. $a = -5, 0, 5$ 或 4 6. $(2, 0)$ 或 $(-1, 0)$



回家作業



7. (91 學測補考試題)

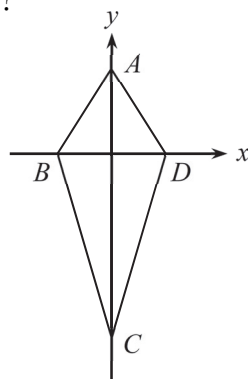
平面上有一個直角三角形，其三邊的斜率為實數 m_1, m_2, m_3 ，並假設 $m_1 > m_2 > m_3$ 。則下列選項哪些必定為真？

- (A) $m_1 m_2 = -1$ (B) $m_1 m_3 = -1$ (C) $m_1 > 0$ (D) $m_2 \leq 0$ (E) $m_3 < 0$

8. (94 學測試題)

如圖所示，坐標平面上一鸞形 $ABCD$ ，其中 A, C 在 y 軸上， B, D 在 x 軸上，且 $\overline{AB} = \overline{AD} = 2$ ， $\overline{BC} = \overline{CD} = 4$ ， $\overline{AC} = 5$ 。令 m_{AB} 、 m_{BC} 、 m_{CD} 、 m_{DA} 分別表直線 AB 、 BC 、 CD 、 DA 之斜率。試問以下哪些敘述成立？

- (A) 此四數值中以 m_{AB} 為最大
(B) 此四數值中以 m_{BC} 為最小
(C) $m_{BC} = -m_{CD}$
(D) $m_{AB} \times m_{BC} = -1$
(E) $m_{CD} + m_{DA} > 0$



7. (C)(E) 8. (B)(C)(E)

主題 4 直線方程式



【觀念一】二元一次方程式：型如： $ax+by+c=0$ ($a, b, c \in \mathbb{R}$, $a^2+b^2 \neq 0$)

其圖形為 _____

(1) 若 $a \neq 0$, $b = 0$, 則 $x = -\frac{c}{a}$ 為 _____ 線

(方程式不出現 y 項, 圖形與 y 軸平行或重合)

(2) 若 $a = 0$, $b \neq 0$, 則 $y = -\frac{c}{b}$ 為 _____ 線

(方程式不出現 x 項, 圖形與 x 軸平行或重合)

(3) 若 $a \neq 0$, $b \neq 0$, 則 $ax+by+c=0$ 的圖形與二軸均有交點

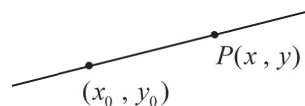
【觀念二】點斜式 (已知 L 經過一點及 m 求直線)

(1) 經過點 (x_0, y_0) 且斜率為 m 的直線方程式為 _____

(2) 經過點 (x_0, y_0) 且斜率不存在的直線方程式為 _____

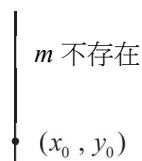
《說明》(1) 令直線每一個動點 $P(x, y)$

$$\therefore m = \frac{y - y_0}{x - x_0} \Rightarrow y - y_0 = m(x - x_0)$$



(2) m 不存在為鉛直線又過 (x_0, y_0)

$$\therefore x = x_0$$



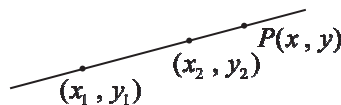
【觀念三】二點式 (已知 L 經過二點求直線)

L 過二點 $(x_1, y_1), (x_2, y_2)$ 的直線方程式為 _____

《說明》令直線每一個動點 $P(x, y)$

$$\therefore m = \frac{y - y_1}{x - x_1} = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}$$

$$\therefore y - y_1 = \left(\frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} \right) (x - x_1)$$



【觀念四】截距

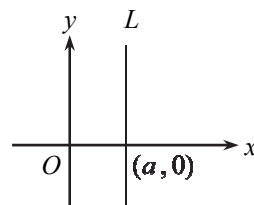
- (1) x 軸截距：若 L 與 x 軸相交時，其交點的 _____ 稱之
- (2) y 軸截距：若 L 與 y 軸相交時，其交點的 _____ 稱之
- (3) 零截距：若 L 過原點 O 時，其 x, y 軸截距同時存在，且皆為 0

【觀念五】截距式 (已知二軸截距求直線)

- (1) 已知 x 軸截距 a ，無 y 軸截距，直線方程式為 _____
- (2) 已知 y 軸截距 b ，無 x 軸截距，直線方程式為 _____
- (3) 已知 x 軸截距 a ， y 軸截距 b ，直線方程式為 _____

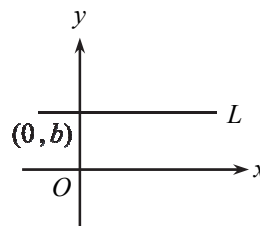
《說明》(1) x 軸截距 a ，表過點 $(a, 0)$

且為鉛直線 $\therefore x = a \Rightarrow \frac{x}{a} = 1$



(2) y 軸截距 b ，表過點 $(0, b)$

且為水平線 $\therefore y = b \Rightarrow \frac{y}{b} = 1$



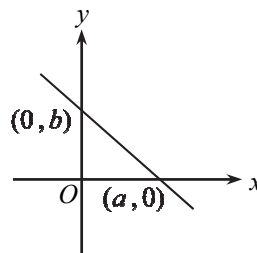
(3) x 軸截距 a ，表過點(,)

y 軸截距 b ，表過點(,)

$m =$

利用點斜式： $y - 0 = \frac{-b}{a}(x - a)$

$$\Rightarrow ay + bx = ab \Rightarrow \frac{x}{a} + \frac{y}{b} = 1$$



【觀念六】斜截式：(已知斜率與 y 軸截距求直線)

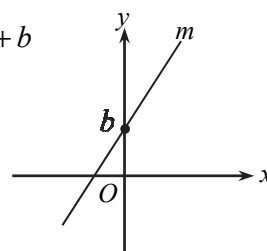
L 斜率為 m ， y 軸截距為 b ，直線方程式為 _____

《說明》(1) y 軸截距 b 表過 $(0, b)$

(2) 利用點斜式： $y - b = m(x - 0) \Rightarrow y = mx + b$

(3) 其實斜截式即是一次函數 (線性函數)

$$y = f(x) = \underbrace{ax + b}_{mx + b}$$



【觀念七】 $ax + by + c = 0$ ，由係數直接看出 $m =$

《說明》 $ax + by + c = 0$ 過 $(-\frac{c}{a}, 0)$ ， $(0, -\frac{c}{b})$

$$m = \frac{0 - (-\frac{c}{b})}{-\frac{c}{a} - 0} = -\frac{a}{b}$$

【觀念八】 由斜率可反推直線前二項格式

例： $2x + 3y + 1 = 0 \Rightarrow m =$

反推 $m = -\frac{2}{3} = \frac{2(x)}{-3(y)}$ ，可知 L 方程式為

立即練習 (1) $m = \frac{1}{7} \Rightarrow$

(2) $m = -\frac{5}{2} = \frac{5(\quad)}{-2(\quad)} \Rightarrow$

(3) $m = 3 = \frac{3(\quad)}{1(\quad)} \Rightarrow$

【觀念九】 平行假設法：與 $ax + by + c = 0$ 平行之直線可設：_____

垂直假設法：與 $ax + by + c = 0$ 垂直之直線可設：_____

例 1. (能力指標：直線方程式)

由下列各題所給予的條件求直線方程式：

(1) 過 $(3, 2)$ 且 $m = 3 \Rightarrow$ 點斜式 $\Rightarrow$

(2) 過 $(3, 2), (1, -1) \Rightarrow$ 二點式 $\Rightarrow m = \quad \Rightarrow$

(3) x 軸截距 3， y 軸截距 -2 $\Rightarrow$ 截距式 $\Rightarrow$

(4) $m = 3$ ， y 軸截距 2 $\Rightarrow$ 斜截式 $\Rightarrow$

(5) $m = 2$ ， x 軸截距 3 $\Rightarrow m = 2, (3, 0) \Rightarrow$ 點斜式 $\Rightarrow$



例 2. (能力指標：直線平行假設法)

L 過 $(3, 1)$ 且與 $2x + y + 1 = 0$ 平行，求直線 L 的方程式。

解：



例 3. (能力指標：直線垂直假設法)

求過點 $(-2, -5)$ 且與直線 $x - 2y - 7 = 0$ 垂直之直線方程式。

解：

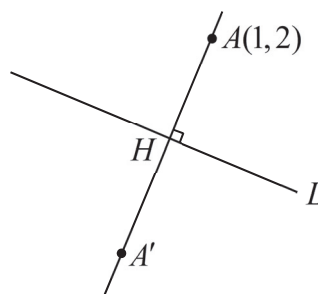


例 4. (能力指標：垂足、對稱點、距離)

$A(1, 2)$, $L: x + 3y + 3 = 0$ ，求 A 對 L 之

(1) 垂足 (2) 對稱點 (3) 距離

解：





回家作業



1. 求下列各直線方程式：

(1) 過點 $(3, -2)$ ，斜率為 5

(2) 過點 $(1, -4)$ 與點 $(2, 3)$

(3) x 截距為 5 ， y 截距為 6

(4) x 截距為 -2 ，斜率為 $\frac{1}{3}$

(5) 過點 $(3, 4)$ 而平行於 $x + y = 1$

(6) 過點 $(3, 4)$ 而垂直於 $2x + y = 1$



2. 三角形的三高共點，此點稱為該三角形的垂心，若一三角形的三頂點為

$A(1, -6)$, $B(2, 2)$, $C(-5, -1)$ ，試求三高之直線方程式及 $\triangle ABC$ 之垂心坐標。

3. 已知平行四邊形的兩邊分別在直線 $2x + 3y = 7$ ， $x - 3y = -4$ 上，一頂點為 $(5, 5)$ ，

試求其他三個頂點的位置。

簡 答

1. (1) $5x - y - 17 = 0$ (2) $7x - y - 11 = 0$ (3) $\frac{x}{5} + \frac{y}{6} = 1$ (4) $y = \frac{1}{3}(x + 2)$

(5) $x + y - 7 = 0$ (6) $x - 2y + 5 = 0$ 2. $7x + 3y + 11 = 0$, $6x - 5y - 2 = 0$,

$x + 8y + 13 = 0$, $(-\frac{49}{53}, -\frac{80}{53})$ 3. $(7, \frac{11}{3})$, $(1, \frac{5}{3})$, $(-1, 3)$



回家作業



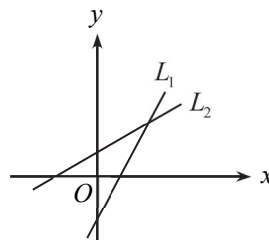
4. (83 推甄試題)

平面上四點 $A(-1, 2)$, $B(4, 2)$, $C(2, -1)$ 和 $O(0, 0)$ ，過 B 點作直線 OC 的平行線交直線 OA 於 D 點，則 D 點的坐標為 _____。

5. (92 學測試題)

如圖，兩直線 L_1 , L_2 之方程式分別為 $L_1: x + ay + b = 0$, $L_2: x + cy + d = 0$ ；請問下列哪些選項是正確的？

- (A) $a > 0$ (B) $b > 0$ (C) $c > 0$
(D) $d > 0$ (E) $a > c$



簡答

4. $(-\frac{8}{3}, \frac{16}{3})$ 5. (D)(E)



回家作業



6. (94 數乙試題)

小明玩戰爭網路遊戲，在螢幕上有一坐標平面，飛機 P 以等速直線前進，在坐標 $(-12, 4)$ 的位置被發現，經過 1 秒後到達坐標 $(-10, 4)$ ，再經 1 秒後，小明從原點選一方向發射一飛彈 R ，假設 R 也以直線前進且速率跟 P 相同，而且 R 剛好擊中 P 。試求 R 擊中 P 時的坐標 (a, b) 為 _____。

7. (96 數乙試題)

某別墅有一個四塊正方形的玻璃拼成的田字形窗戶，窗外路燈的光線 (假設路燈是一點光源) 透過窗戶在地板上形成一個變形的田字形光影。在地板上建置一個直角坐標系，發現田字形光影外框的四個頂點的坐標分別為 $(-4, 40)$ ， $(16, 0)$ ， $(16, 40)$ 和 $(28, 16)$ 。求田字形窗戶的中心投影在地板上的坐標。



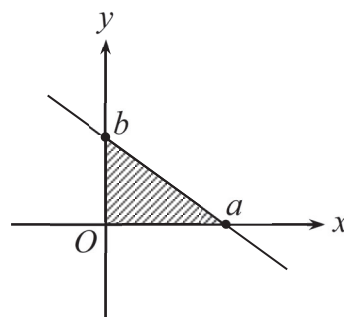
6. $(-3, 4)$ 7. $(16, 25)$

主題 5 截距式的應用



【觀念】直線與二軸所圍三角形面積 =
周長 =

《結論》凡是有關直線與二軸所圍三角形問題
一律以 _____ 式處理



例 1. (能力指標：截距相等)

試求過 $(4, 5)$ 且在二軸截距絕對值相等之直線方程式。

解： 1° 截距同號，令 $L: \frac{x}{a} + \frac{y}{a} = 1$

2° 截距異號，令 $L: \frac{x}{a} + \frac{y}{-a} = 1$

3° 零截距：L 過 O 點即過 $(4, 5)$, $(0, 0)$



例 2. (能力指標：截距與面積)

L 過 $(6, -4)$ 且與坐標軸在第一象限所圍成三角形面積為 6，求 L 的方程式。



解： 1° 令 $L: \frac{x}{a} + \frac{y}{b} = 1$ ($a > 0, b > 0$)

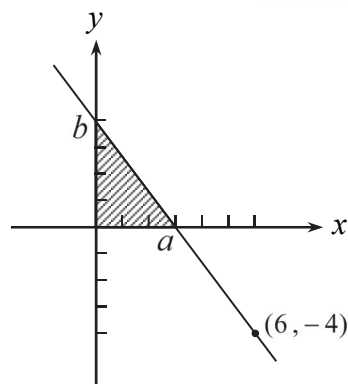
$$\begin{cases} \frac{ab}{2} = 6 \\ \frac{6}{a} - \frac{4}{b} = 1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} ab = 12 \\ 3b - 2a = 6 \end{cases}$$

$$\Rightarrow 3ab - 2a^2 = 6a \Rightarrow a^2 + 3a - 18 = 0$$

$$\Rightarrow (a-3)(a+6) = 0 \Rightarrow a = 3 \quad (\text{取 } a > 0)$$

$$\Rightarrow b = 4$$

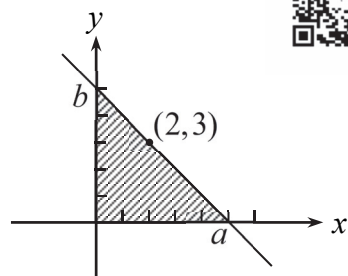
$$2^\circ \quad L: \frac{x}{3} + \frac{y}{4} = 1 \Rightarrow 4x + 3y = 12$$

**例 3. (能力指標：與二軸所圍面積最小值)**

直線 L 過 $(2, 3)$ ，在第一象限所圍三角形面積最小值為何？並求此時 L 的方程式。



解：



註： (1) 若 L 過 $(-2, 3)$ ，則令直線為 $\frac{x}{-a} + \frac{y}{b} = 1$ ($a > 0, b > 0$)

(2) 若 L 過 $(-2, -3)$ ，則令直線為 $\frac{x}{-a} + \frac{y}{-b} = 1$ ($a > 0, b > 0$)

(3) 若 L 過 $(2, -3)$ ，則令直線為 $\frac{x}{a} + \frac{y}{-b} = 1$ ($a > 0, b > 0$)

(4) **口訣** 截距 = 2 坐標

例 4. (能力指標：二軸截距為整數)

L 過 $(2, 3)$ 且二軸截距為整數，求 L 共幾條？ (自行參考)



解： 1° 令 $L: \frac{x}{a} + \frac{y}{b} = 1$ 過 $(2, 3) \therefore \frac{2}{a} + \frac{3}{b} = 1$

$$\Rightarrow ab - 3a - 2b = 0 \Rightarrow (a-2)(b-3) = 6$$

$a-2$	1	2	3	6	-1	-2	-3	-6
$b-3$	6	3	2	1	-6	-3	-2	-1

共 8 組

2° 其中 $\frac{a-2}{b-3} = \frac{-2}{-3} \Rightarrow \begin{cases} a=0 \\ b=0 \end{cases}$ 視為 L 過 O 點，亦算一條

$\therefore$ 本題答案為 8 條

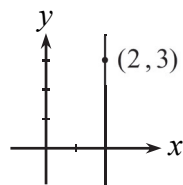
例 5. (能力指標：截距為整數)

L 過 $(2, 3)$ 且截距為整數，求 L 共幾條？ (自行參考)



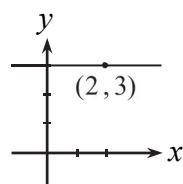
解： 1° 只有 x 軸截距

$$\text{令 } \frac{x}{a} = 1 \Rightarrow \frac{2}{a} = 1 \Rightarrow a = 2 \therefore x = 2$$



2° 只有 y 軸截距

$$\text{令 } \frac{y}{b} = 1 \Rightarrow \frac{3}{b} = 1 \Rightarrow b = 3 \therefore y = 3$$



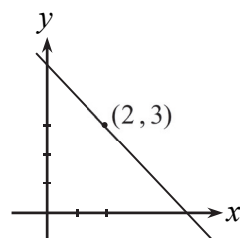
3° 存在二軸截距

$$\text{令 } \frac{x}{a} + \frac{y}{b} = 1 \text{ 過 } (2, 3) \therefore \frac{2}{a} + \frac{3}{b} = 1$$

$$\Rightarrow ab - 3a - 2b = 0 \Rightarrow (a-2)(b-3) = 6$$

$a-2$	1	2	3	6	-1	-2	-3	-6
$b-3$	6	3	2	1	-6	-3	-2	-1

共 8 條



本題共 10 條



回家作業



1. 設直線 L 的斜率為 $-\frac{4}{3}$ ，且和兩坐標軸所圍成的三角形的面積為 6，
試求 L 的方程式。



2. 直線 L 過點 $(2, 5)$ 且 x 截距與 y 截距的絕對值相等，求 L 的方程式。
3. 設直線 L 經過點 $(-2, 2)$ ，且與兩軸所成的三角形面積為 1，求 L 的方程式。
4. 討論直線 $ax + by + c = 0$ ($a^2 + b^2 \neq 0$) 的 x 截距與 y 截距。

簡 答

1. $4x + 3y - 12 = 0$ 或 $4x + 3y + 12 = 0$ 2. $x + y - 7 = 0, x - y + 3 = 0$ 或 $5x - 2y = 0$
3. $\frac{x}{2} + \frac{y}{1} = 1$ 或 $\frac{x}{-1} + \frac{y}{-2} = 1$ 4. 見詳解

主題 6 二線關係

BIIG



【觀念一】 $L_1: a_1x + b_1y + c_1 = 0$, $L_2: a_2x + b_2y + c_2 = 0$

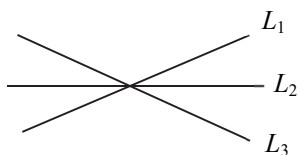
關係	二線平行	二線重合	二線相交一點
圖形			
條件			

【觀念二】 $L_1: a_1x + b_1y + c_1 = 0$, $L_2: a_2x + b_2y + c_2 = 0$ ，若 $L_1 \perp L_2$ ，則

_____。

《說明》 $L_1 \perp L_2 \Rightarrow m_1 m_2 = -1 \Rightarrow (-\frac{a_1}{b_1})(-\frac{a_2}{b_2}) = -1 \Rightarrow a_1 a_2 + b_1 b_2 = 0$

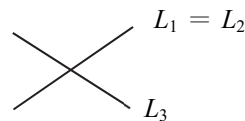
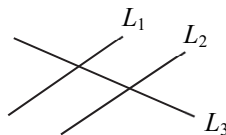
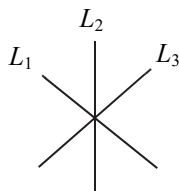
【觀念三】三線相交於一點 $\Rightarrow$ 由 L_1, L_2 求交點，再將交點 _____



【觀念四】三線無法圍成三角形：

- (1) 三線共點 (2) 至少二線平行 (3) 至少二線重合

《說明》 (1) (2) (3)



例 1. (能力指標：二直線關係)

$$L_1: ax - 6y = 5a - 3, L_2: 2x + (a - 7)y = 29 - 7a$$

(1) $L_1 // L_2$ ，求 a 。

(2) $L_1 = L_2$ ，求 a 。

(3) $L_1 \perp L_2$ ，求 a 。

(4) L_1, L_2 相交於一點，求 a 。

解： (1) $L_1 // L_2 \Rightarrow$

(2) $L_1 = L_2 \Rightarrow$

(3) $L_1 \perp L_2 \Rightarrow$

(4) L_1, L_2 相交於一點 $\Rightarrow$



例 2. (能力指標：三線共點)

$$x + 2y - 3 = 0, 2x - y + 2 = 0, x + 7y + k = 0 \text{ 三線共點，求 } k?$$

解： 先解出 $\begin{cases} x + 2y - 3 = 0 \\ 2x - y + 2 = 0 \end{cases}$ 交點為 $(-\frac{1}{5}, \frac{8}{5})$

$$\text{代入第三條直線：} -\frac{1}{5} + 7(\frac{8}{5}) + k = 0$$

$$\therefore k = -11$$



例 3. (能力指標：三線圍成直角三角形)

$L_1: 2x - y + 1 = 0$, $L_2: x + y - 2 = 0$, $L_3: ax - 2y + 2 = 0$ 圍成一直角三角形，求 a 值？



解： 1° 可能 $L_1 \perp L_3 \Rightarrow$

2° 可能 $L_2 \perp L_3 \Rightarrow$

3° 將 1° 2° 結果檢驗是否會三線共點

$$\begin{cases} 2x - y = -1 \\ x + y = 2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = \frac{1}{3} \\ y = \frac{5}{3} \end{cases}$$

$$\text{代入 } L_3: a\left(\frac{1}{3}\right) - \frac{10}{3} + 2 = 0$$

$$\therefore a = 4$$

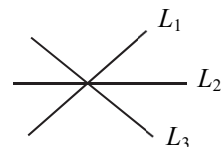
例 4. (能力指標：不能圍成三角形)

找出使三條直線 $L_1: 4x + y = 3$, $L_2: x + y = 0$, $L_3: 2x + ky = 4$

不能圍成三角形之可能的 k 值？

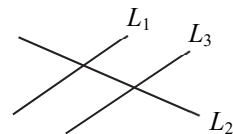


解： 1° 三線交於一點



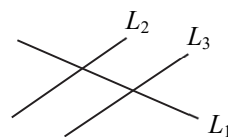
2° L_1, L_3 可能平行或重合

$\Rightarrow$



3° L_2, L_3 可能平行或重合

$\Rightarrow$





回家作業



1. 設 α 為一實數，兩直線 L_1 與 L_2 的方程式分別為 $2x + (2\alpha + 1)y = 7$ 及 $(3\alpha + 4)x + (3\alpha + 5)y = 2$ ，試求 α 之值使得
- (1) $L_1 // L_2$ (2) $L_1 \perp L_2$ 。



2. 在坐標平面上描出下列兩條直線，並且求出它們的交點

$$L_1: 2x - y = 3, \quad L_2: x + y = 6$$

如果 $L_3: x + ay = 4$ 通過 L_1 和 L_2 的交點，試求出 a 值。

3. 設 $L_1: x + ay = 2$, $L_2: (a+1)x + 2y = -2$ ，試分別求合乎下列條件的 a 值：
- (1) $L_1 // L_2$ (不含重合) (2) $L_1 \perp L_2$ 。



1. (1) $\alpha = \frac{2}{3}$ 或 $-\frac{3}{2}$ (2) $\alpha = -1$ 或 $-\frac{13}{6}$ 2. 略， $a = \frac{1}{3}$ 3. (1) $a = 1$ (2) $a = -\frac{1}{3}$



回家作業



4. 決定 k 值，使下列三條直線不能圍成三角形：

$$L_1: 4x + y = 4, L_2: kx + y = 0, L_3: 2x - 3ky = 4。$$

5. 設三條直線 $x + y - 1 = 0$, $2x - ky - 3 = 0$ 與 $(k + 1)x - y + 5 = 0$ 相交於一點，則

$$k = \underline{\hspace{2cm}}。$$



4. $k = -1, \frac{2}{3}, 4, -\frac{1}{6}$

5. $k = -7$

主題 5 兩線關係

BIIG



1. 平面上的兩線關係

(1) 兩線關係：

平面上的兩線關係僅有：平行、重合和恰交於一點。

(2) 係數關係：

將方程組 $\begin{cases} a_1x + b_1y = c_1 \\ a_2x + b_2y = c_2 \end{cases}$ 中的 $a_1x + b_1y = c_1$ 、 $a_2x + b_2y = c_2$ 分別代表 xy 平面上的

兩條直線 L_1 、 L_2 。

二線關係			
解個數	1	無限多	0
方程組類型	相容方程組	相依方程組	矛盾方程組
斜率			
係數關係			

(3) 平行與垂直：

設兩直線 $L_1: a_1x + b_1y = c_1$ ， $L_2: a_2x + b_2y = c_2$ ，

① 若直線 L_1 ， L_2 平行或重合，則 或 。

② 若直線 L_1 ， L_2 垂直，則 或 。

【說明 1】

$$L_1 \perp L_2 \Rightarrow m_1 m_2 = -1 \Rightarrow \left(-\frac{a_1}{b_1}\right)\left(-\frac{a_2}{b_2}\right) = -1 \Rightarrow a_1 a_2 + b_1 b_2 = 0$$

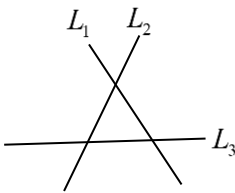
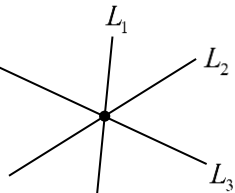
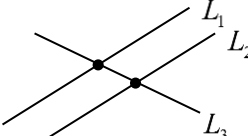
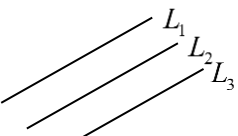
【說明 2】

2. 平面上的三線關係

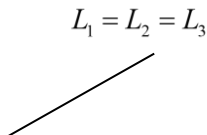
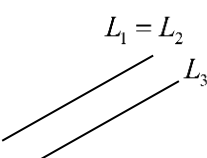
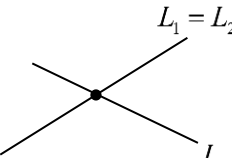
(1) 三線關係：

若給定平面上三條直線 L_1, L_2, L_3 ，則其關係有下列幾種情形：

① 若考慮直線皆相異，則只有以下四種：

			
分成_____個區域	分成_____個區域	分成_____個區域	分成 4 個區域

② 若考慮直線可相同，則再多以下三種：

		
分成 2 個區域	分成 3 個區域	分成 4 個區域

主題

7

直線平移與旋轉

JHE/



【觀念一】點平移

$$(1) A(1, 3) \xrightarrow[(3, 2)]{\text{往右 3 單位, 往上 2 單位}} A' (\quad , \quad)$$

$$(2) B(-1, 5) \xrightarrow[(-2, 3)]{\text{往左 2 單位, 往上 3 單位}} B' (\quad , \quad)$$

$$(3) C(m, n) \xrightarrow[(4, -2)]{\text{往右 4 單位, 往下 2 單位}} C' (\quad , \quad)$$

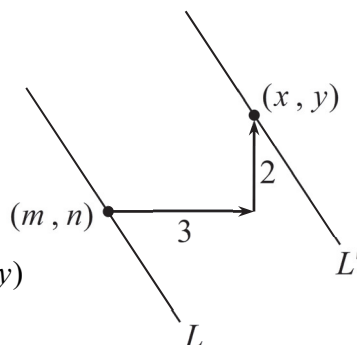
$$(4) D(2, -3) \xrightarrow[(-a, -b)]{\text{往左 } a \text{ 單位, 往下 } b \text{ 單位}} D' (\quad , \quad)$$

$$(5) \text{結論: } p(x, y) \xrightarrow{\text{平移}(h, k)} p'(x+h, y+k)$$

〈口訣〉點坐標平移多少加多少

【觀念二】直線平移

- (1) 直線 L 方程式為 $ax + by + c = 0$,
往右平移 3 單位, 往上平移 2 單位,
得直線 L' (如圖)



- (2) L 上任一點 (m, n) , 平移後為點 (x, y)

$$\begin{cases} m+3=x \\ n+2=y \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} m=x-3 \\ n=y-2 \end{cases}$$

- (3) (m, n) 滿足 L 方程式代入得

$$am + bn + c = 0 \Rightarrow a(x-3) + b(y-2) + c = 0$$

$$(4) ax + by + c = 0 \xrightarrow[(3, 2)]{\text{往右 3 單位, 往上 2 單位}} a(x-3) + b(y-2) + c = 0$$

$$(5) \text{結論: } ax + by + c = 0 \xrightarrow{\text{平移}(h, k)} a(x-h) + b(y-k) + c = 0$$

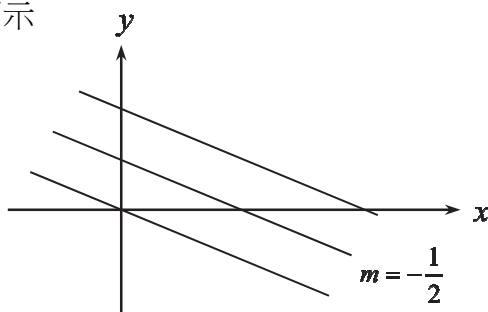
〈口訣〉方程式平移多少減多少

【觀念三】直線平行移動

(1) $L: x+2y+k=0$ 是 $m = \underline{\hspace{2cm}}$ (固定) 的直線

(2) L 隨著 k 改變而平移

(3) 圖示

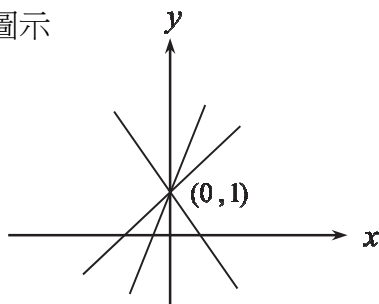


【觀念四】直線旋轉

《型一》(1) $L: ax - y + 1 = 0$ 是 $m = \underline{\hspace{2cm}}$ (變動) 的直線

(2) L 隨著 a 改變而旋轉，恆過 $(0, 1)$

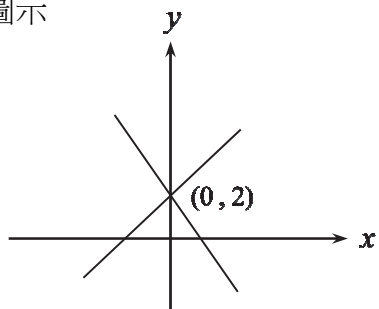
(3) 圖示



《型二》(1) $L: y = mx + 2$ ，本型式為斜截式，斜率 $= m$ (變動)， y 軸截距 2

(2) L 隨著 m 改變而旋轉，恆過 $(0, 2)$

(3) 圖示



例 1. (能力指標：平移)

若一直線 L 沿著 x 軸負向平移 3 單位，再沿 y 軸正向平移一單位後，直線 L 又回到原來的位置，則 L 的斜率為何？

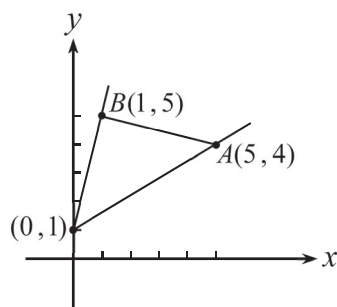
解：



例 2. (能力指標：直線與線段相交)

$A(5, 4)$, $B(1, 5)$ ，若 $\overline{AB}$ 與直線 $L: y = mx + 1$ 相交，求 m 的範圍。

解： $1^\circ y = mx + 1 \Rightarrow$ 斜率為 m 且經 $(0, 1)$ (直線可旋轉)

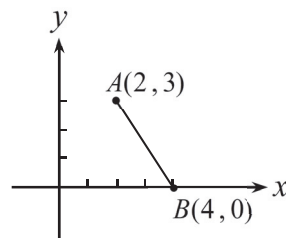


例 3. (能力指標：直線與線段相交)

$A(2, 3)$, $B(4, 0)$, 直線 $L: x - 2y + k = 0$, 若 $\overline{AB}$ 與 L 相交, 求 k 的範圍。



解： $1^\circ x - 2y + k = 0 \Rightarrow m = \frac{1}{2}$ (直線可平移)

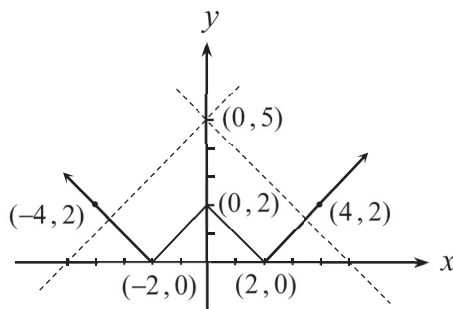


例 4. (能力指標：直線與圖形相交)

右圖為函數 $y = f(x)$ 的圖形, f 與 $y = mx + 5$ 恰有一交點, 求 m 的範圍。



解： $1^\circ y = mx + 5 \Rightarrow$ 斜率 m 且過 $(0, 5)$ (直線可旋轉)

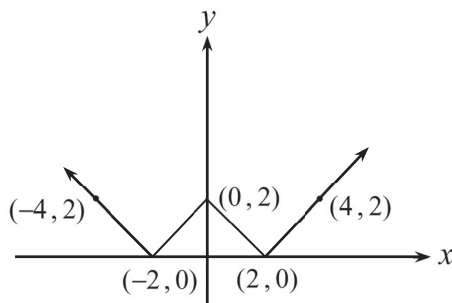


例 5. (能力指標：直線與圖形相交)

右圖為函數 $y = f(x)$ 的圖形， f 與 $x + 3y + a = 0$ 有四個相異交點，求 a 的範圍。



解： 1° $x + 3y + a = 0 \Rightarrow m = -\frac{1}{3}$ (直線可平移)





回家作業



1. $A(-1, -2), B(3, -4), C(1, 1)$ ，直線 $L: kx - y - 5k + 2 = 0$ ， k 為實數。
試求若直線 L 與 $\triangle ABC$ 交於相異兩點，則 k 的最大可能範圍為
_____。



1. $\frac{1}{4} < k < 3$

主題 8 距離、垂足、對稱

TBTT



【觀念一】點到直線距離

(1) $P(x_0, y_0)$ ，直線 $L: ax + by + c = 0$

(2) P 到直線 L 的距離為 $d(P, L)$

$$(3) d(P, L) = \frac{|ax_0 + by_0 + c|}{\sqrt{a^2 + b^2}}$$

《說明》1° L 斜率 $m = -\frac{a}{b}$

2° 令 $\overline{AS} = |a|$, $\overline{TA} = |b|$

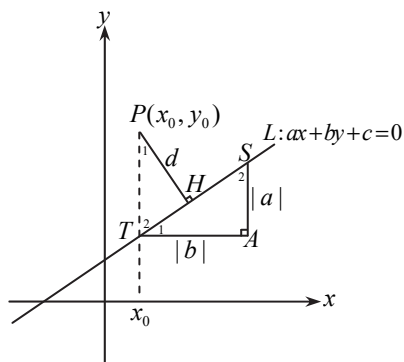
$$\Rightarrow \overline{TS} = \sqrt{a^2 + b^2}$$

3° $x = x_0$ 代入 $L: ax_0 + by + c = 0$

$$\text{得 } T \text{ 點 } y \text{ 坐標} = \frac{-(ax_0 + c)}{b}$$

$$4^\circ \overline{PT} = \left| y_0 + \frac{ax_0 + c}{b} \right| = \frac{|ax_0 + by_0 + c|}{|b|}$$

$$5^\circ \frac{d}{|b|} = \frac{\frac{|ax_0 + by_0 + c|}{\sqrt{a^2 + b^2}}}{|b|} \Rightarrow d = \frac{|ax_0 + by_0 + c|}{\sqrt{a^2 + b^2}}$$

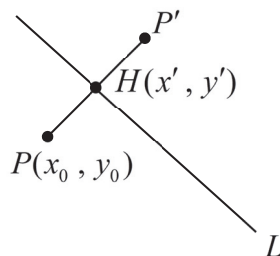


【觀念二】點對直線垂足

(1) $P(x_0, y_0)$ ，直線 $L: ax + by + c = 0$

(2) 垂足 $H(x', y')$

$$(3) \begin{cases} x' = x_0 - \frac{a(ax_0 + by_0 + c)}{a^2 + b^2} \\ y' = y_0 - \frac{b(ax_0 + by_0 + c)}{a^2 + b^2} \end{cases}$$



《說明》 1° $L: ax + by + c = 0 \Rightarrow m = -\frac{a}{b}$

$$2^\circ \frac{y' - y_0}{x' - x_0} = \frac{b}{a} \Rightarrow \begin{cases} x' = x_0 + at \\ y' = y_0 + bt \end{cases}$$

3° H 代入 L 得 $a(x_0 + at) + b(y_0 + bt) + c = 0$

$$\Rightarrow t = -\frac{ax_0 + by_0 + c}{a^2 + b^2}$$

$$4^\circ \text{ 垂足 } \begin{cases} x' = x_0 - \frac{a(ax_0 + by_0 + c)}{a^2 + b^2} \\ y' = y_0 - \frac{b(ax_0 + by_0 + c)}{a^2 + b^2} \end{cases}$$

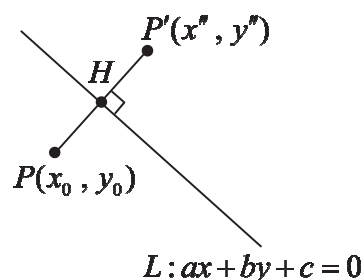
【觀念三】點到直線對稱點

(1) $P(x_0, y_0)$ ，直線 $L: ax + by + c = 0$

(2) 垂足 $H(x_0 - \frac{a(ax_0 + by_0 + c)}{a^2 + b^2}, y_0 - \frac{b(ax_0 + by_0 + c)}{a^2 + b^2})$

(3) 垂足 H 為 $\overline{PP'}$ 的中點

$$P': \begin{cases} x'' = x_0 - \frac{2a(ax_0 + by_0 + c)}{a^2 + b^2} \\ y'' = y_0 - \frac{2b(ax_0 + by_0 + c)}{a^2 + b^2} \end{cases}$$



【觀念四】對稱點速算法(直線斜率 ± 1 使用)

(1) $L_1: x + y + 2 = 0, L_2: x - y - 3 = 0$

(2) $P(h, k)$ 對稱 $L_1: \begin{cases} x = -y - 2 = -k - 2 \\ y = -x - 2 = -h - 2 \end{cases}$

(3) $P(h, k)$ 對稱 $L_2: \begin{cases} x = y + 3 = k + 3 \\ y = x - 3 = h - 3 \end{cases}$

例 1. (能力指標：對稱的應用)

已知 $A(6, 1)$, $L_1: x + y + 1 = 0$, $L_2: x - 2y + 1 = 0$

- (1) A 對稱 L_1 , 對稱點(,)
- (2) A 對稱 L_2 , 對稱點(,)
- (3) P 在直線 L_2 上 , Q 在 x 軸上 , 則 ΔAPQ 周長最小值 ?

解：



例 2. (能力指標：對稱的應用)

ΔABC 中 $\angle A$ 之內角平分線為 $x = 3$, $\angle B$ 之內角平分線為 $x - 2y + 1 = 0$, C 點坐標為 $(6, 1)$, 求

- (1) AB 邊所在直線方程式 ?
- (2) A 與 B 坐標為何 ?

解：





回家作業



1. 若直線 $3x + 4y = 8$ 垂直且平分線段 $\overline{AB}$ ，又 A 點坐標為 $(1, 1)$ ，則線段 $\overline{AB}$ 的長度為_____。



2. 點 $A(-4, 3)$ 關於直線 $L: 3x - 2y + 5 = 0$ 的對稱點 P' 的坐標為_____。



1. $\frac{2}{5}$ 2. $(2, -1)$

(2) 兩平行線的距離公式：

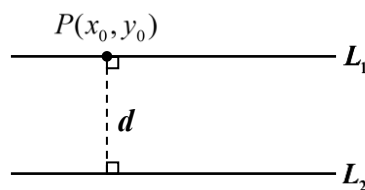
平面上兩平行直線 $L_1: ax+by+c_1=0$ 和 $L_2: ax+by+c_2=0$ 的距離為

$$d(L_1, L_2) = \frac{|c_1 - c_2|}{\sqrt{a^2 + b^2}}。$$

【說明】

1° 在 L_1 上取一點 $P(x_0, y_0)$ ，滿足 $ax_0 + by_0 + c_1 = 0 \Rightarrow ax_0 + by_0 = -c_1$

$$\begin{aligned} 2^\circ \quad d(L_1, L_2) &= d(P, L_2) = \frac{|ax_0 + by_0 + c_2|}{\sqrt{a^2 + b^2}} \\ &= \frac{|(ax_0 + by_0) + c_2|}{\sqrt{a^2 + b^2}} = \frac{|(-c_1) + c_2|}{\sqrt{a^2 + b^2}} \\ &= \frac{|c_1 - c_2|}{\sqrt{a^2 + b^2}} \end{aligned}$$



【說例】

平面上 $L_1: x+2y+6=0$ 和 $L_2: x+2y-4=0$ 的距離為 $d(L_1, L_2) =$ _____。

3. 平面上兩線的交角平分線 [自行參考]

(1) 交角平分線：

$L_1: a_1x+b_1y+c_1=0$ 與 $L_2: a_2x+b_2y+c_2=0$ 為平面上兩非平行或重合之直線。

L_1 與 L_2 之交角平分線為
$$\frac{a_1x+b_1y+c_1}{\sqrt{a_1^2+b_1^2}} = \pm \frac{a_2x+b_2y+c_2}{\sqrt{a_2^2+b_2^2}}。$$

【證明】

交角平分線上任一點 $P(x, y)$ 至 $L_1: a_1x+b_1y+c_1=0$ 之距離 $d(P, L_1)$ ，與 $P(x, y)$ 至 $L_2: a_2x+b_2y+c_2=0$ 之距離 $d(P, L_2)$ 相等。

(2) 兩平行線的距離公式：

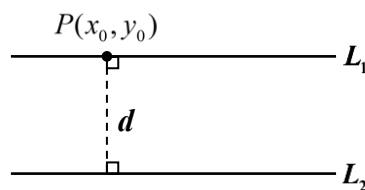
平面上兩平行直線 $L_1: ax+by+c_1=0$ 和 $L_2: ax+by+c_2=0$ 的距離為

$$d(L_1, L_2) = \frac{|c_1 - c_2|}{\sqrt{a^2 + b^2}}。$$

【說明】

1° 在 L_1 上取一點 $P(x_0, y_0)$ ，滿足 $ax_0 + by_0 + c_1 = 0 \Rightarrow ax_0 + by_0 = -c_1$

$$\begin{aligned} 2^\circ \quad d(L_1, L_2) &= d(P, L_2) = \frac{|ax_0 + by_0 + c_2|}{\sqrt{a^2 + b^2}} \\ &= \frac{|(ax_0 + by_0) + c_2|}{\sqrt{a^2 + b^2}} = \frac{|(-c_1) + c_2|}{\sqrt{a^2 + b^2}} \\ &= \frac{|c_1 - c_2|}{\sqrt{a^2 + b^2}} \end{aligned}$$



【說例】

平面上 $L_1: x+2y+6=0$ 和 $L_2: x+2y-4=0$ 的距離為 $d(L_1, L_2) =$ _____。

3. 平面上兩線的交角平分線 [自行參考]

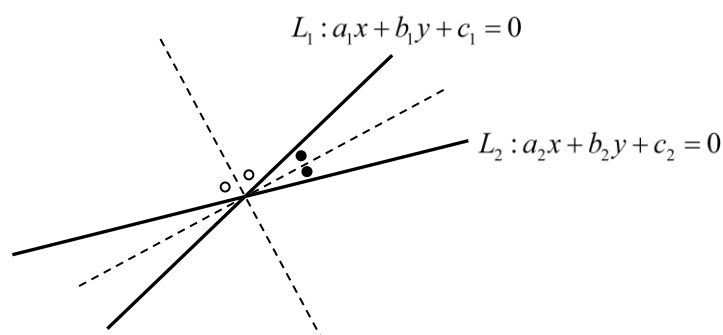
(1) 交角平分線：

$L_1: a_1x+b_1y+c_1=0$ 與 $L_2: a_2x+b_2y+c_2=0$ 為平面上兩非平行或重合之直線。

L_1 與 L_2 之交角平分線為
$$\frac{a_1x+b_1y+c_1}{\sqrt{a_1^2+b_1^2}} = \pm \frac{a_2x+b_2y+c_2}{\sqrt{a_2^2+b_2^2}}。$$

【證明】

交角平分線上任一點 $P(x, y)$ 至 $L_1: a_1x+b_1y+c_1=0$ 之距離 $d(P, L_1)$ ，與 $P(x, y)$ 至 $L_2: a_2x+b_2y+c_2=0$ 之距離 $d(P, L_2)$ 相等。



$$\begin{aligned} \text{即 } d(P, L_1) = d(P, L_2) &\Rightarrow \frac{|a_1x + b_1y + c_1|}{\sqrt{a_1^2 + b_1^2}} = \frac{|a_2x + b_2y + c_2|}{\sqrt{a_2^2 + b_2^2}} \\ &\Rightarrow \frac{a_1x + b_1y + c_1}{\sqrt{a_1^2 + b_1^2}} = \pm \frac{a_2x + b_2y + c_2}{\sqrt{a_2^2 + b_2^2}} \end{aligned}$$

(2) 如何判斷銳角與鈍角平分線：

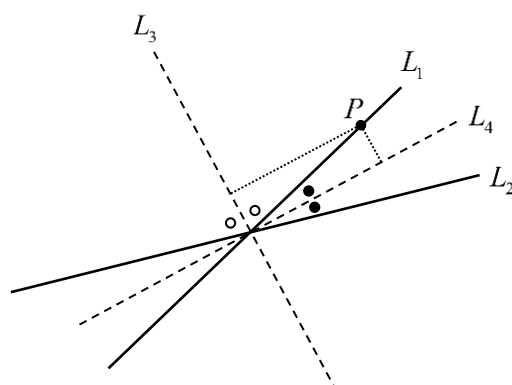
⇒ **法一 直接觀察圖形（銳角與鈍角明顯時）**

直接在圖形中判斷所求角平分線。

⇒ **法二 由距離判斷（銳角與鈍角不明顯時）**

若 L_3 與 L_4 為 L_1 、 L_2 之交角平分線，在 L_1 或 L_2 上任取一點 P （非 L_1 及 L_2 交點）。

若 $d(P, L_3) > d(P, L_4)$ ，則 L_3 為鈍角平分線， L_4 為銳角平分線。



主題 9 極值分析



《 《 < < < 《 《 《 《 《 < < < < 《 《 《 < <

例 1. (能力指標：距離平方和最小值)

P 在 $y = 2x + 1$ 上， $A(-1, 3)$ ， $B(4, 2)$ ， $C(0, -2)$ ，

求 $\overline{PA}^2 + \overline{PB}^2 + \overline{PC}^2$ 的最小值及此時的 P 。

解：1° P 在 $y = 2x + 1$ 上，令 $P(t, 2t + 1)$

$$2^\circ \overline{PA}^2 + \overline{PB}^2 + \overline{PC}^2 =$$

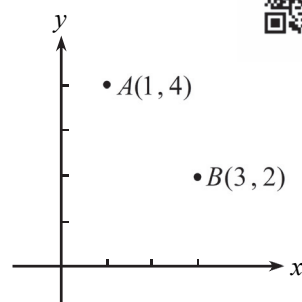


例 2. (能力指標：三角形周長最小值)

$A(1, 4)$ ， $B(3, 2)$ ， $C(x, 0)$ ，則 $x =$ _____ 時，

$\triangle ABC$ 有周長最小值 _____。

解：1° $C(x, 0)$ 表示 C 在 x 軸上移動



例 3. (能力指標：距離和最小值)

$f(x) = \sqrt{x^2 - 2x + 17} + \sqrt{x^2 - 6x + 13}$ ，當 $x =$ _____ 時
有最小值。



解： 1° 原式 $\Rightarrow f(x) = \sqrt{(x-1)^2 + 16} + \sqrt{(x-3)^2 + 4}$

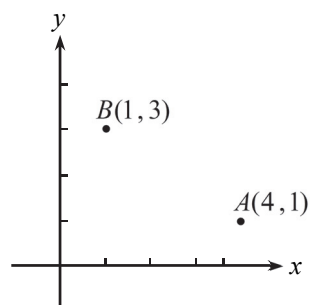
2° 令 $P(x, 0)$, $A(1, 4)$, $B(3, 2)$ ，原式 $= \overline{PA} + \overline{PB}$

例 4. (能力指標：四邊形周長最小值)

$A(4, 1)$, $B(1, 3)$, $P(x, 0)$, $Q(0, y)$ ，今欲使四邊形 $APQB$
之周長最小，則 $x =$ _____， $y =$ _____。



解：



例 5. (能力指標：距離和最小值)



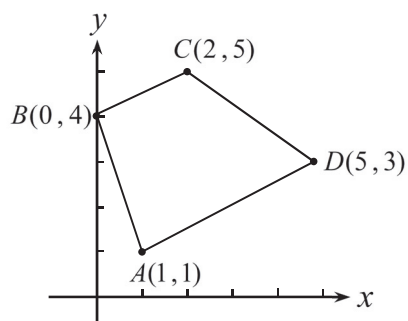
$$f(x, y) = \sqrt{(x-1)^2 + (y-1)^2} + \sqrt{x^2 + (y-4)^2} + \sqrt{(x-2)^2 + (y-5)^2} \\ + \sqrt{(x-5)^2 + (y-3)^2},$$

求最小值：_____ 及 $(x, y) = ?$

解： 1° 令 $P(x, y)$, $A(1, 1)$, $B(0, 4)$, $C(2, 5)$, $D(5, 3)$

$$\text{原式} = \overline{PA} + \overline{PB} + \overline{PC} + \overline{PD}$$

2°





回家作業

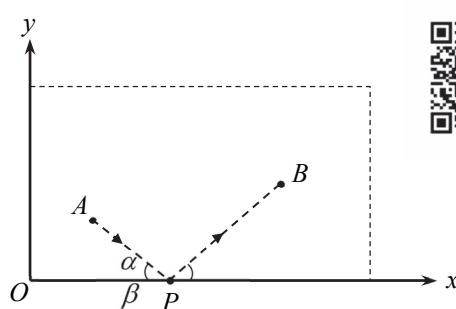


1. 阿三哥玩撞球，以球檯兩鄰邊為坐標軸，如右圖，球從 $A(2, 3)$ 點打出去，碰上檯邊 P 點，再折向撞擊 B 球， B 球的位置是 $B(10, 5)$ ，試求：

(1) P 點位置。（用坐標表示）

[提示：入射角 α 等於反射角 β]

(2) 該球所行的距離 $\overline{AP} + \overline{PB} = ?$



簡答

1. (1) $P(5, 0)$ (2) $8\sqrt{2}$

(3) 直線方程式有多項係數是未知數：

直線方程式 $L: kx + 3k + 2 - y = 0$ 經整理後可得 _____，可

看出 L 是恆過 $(-3, 2)$ 的直線且斜率為 k ，並隨著 k 改變而繞著 $(-3, 2)$ 旋轉。

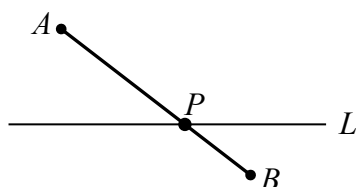
3. 距離極值

(1) $\overline{PA} + \overline{PB}$ 最小值：

給定兩定點 A, B 及直線 L ，若 P 在 L 上，以下討論何時有 $\overline{PA} + \overline{PB}$ 最小值。

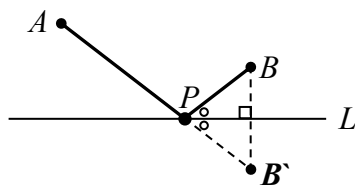
① 若 A, B 在 L 異側：

當 P 為 $\overline{AB}$ 與 L 的交點時，即是 $\overline{PA} + \overline{PB}$ 有最小值時，且 $\min(\overline{PA} + \overline{PB}) = \overline{AB}$ 。



② 若 A, B 在 L 同側：

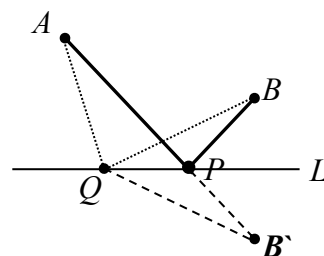
作 B 關於 L 的對稱點 B' (或作 A 之對稱點)，當 P 為 $\overline{AB'}$ 與 L 的交點時，即是 $\overline{PA} + \overline{PB}$ 有最小值時，且 $\min(\overline{PA} + \overline{PB}) = \overline{AB'}$ 。



【說明】

若 Q 為 L 上異於 P 的任一點，則

$$\overline{QA} + \overline{QB} = \underbrace{\overline{QA} + \overline{QB'}}_{\Delta QAB' \text{ 任二邊之和大於第三邊}} > \overline{AB'} = \overline{PA} + \overline{PB} = \overline{PA} + \overline{PB}。$$



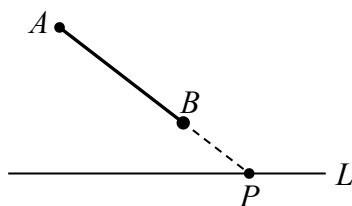
(2) $|\overline{PA} - \overline{PB}|$ 最大值：[自行參考]

給定兩定點 A, B 及直線 L ，若 P 在 L 上，以下討論何時有 $|\overline{PA} - \overline{PB}|$ 最大值。

① 若 A, B 在 L 同側：

當 P 為直線 AB 與 L 的交點時，即 $|\overline{PA} - \overline{PB}|$ 有最大值時，且

$$\max |\overline{PA} - \overline{PB}| = \overline{AB}。$$

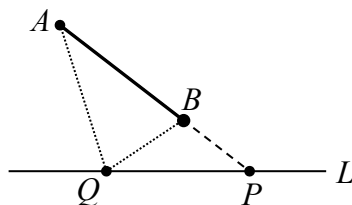


【說明】

若 Q 為 L 上異於 P 的任一點，則

$$|\overline{QA} - \overline{QB}| < \overline{AB} = |\overline{PA} - \overline{PB}|。$$

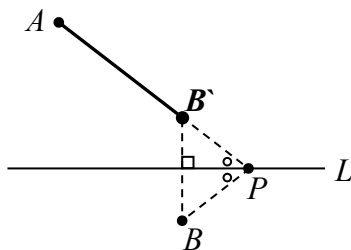
ΔQAB 任二邊之差小於第三邊



② 若 A, B 在 L 異側：

作 B 關於 L 的對稱點 B' (或作 A 之對稱點)，當 P 為直線 AB' 與 L 的交點時，

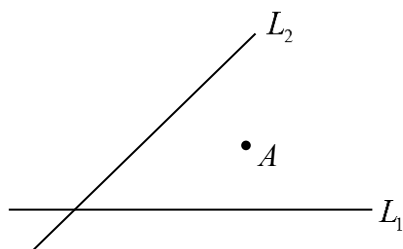
即 $|\overline{PA} - \overline{PB}|$ 有最大值時，且 $\max |\overline{PA} - \overline{PB}| = \overline{AB'}$ 。



(3) $\overline{AP} + \overline{AQ} + \overline{PQ}$ 最小值：

給定定點 A 及兩直線 L_1, L_2 ，若 P, Q 分別在 L_1, L_2 上，以下討論何時有 $\triangle APQ$ 周長最小值：

作 A 關於 L_1 、 L_2 的對稱點 A_1 、 A_2 ，連接 $\overline{A_1A_2}$ ，當 P 、 Q 分別為 $\overline{A_1A_2}$ 與 L_1 、 L_2 的交點時，即 $\triangle APQ$ 周長有最小值，且 $\triangle APQ$ 周長最小值 $= \overline{A_1A_2}$ 。

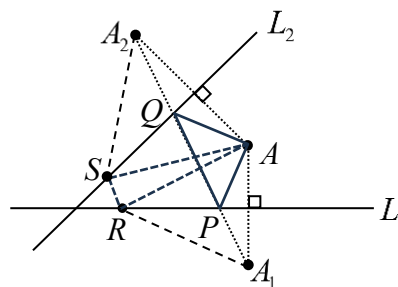


【說明】

若 S 、 R 分別為 L_1 、 L_2 異於 P 、 Q 的任兩點，則

$$\begin{aligned}\triangle APQ \text{ 周長} &= \overline{AP} + \overline{PQ} + \overline{QA} \\ &= \overline{A_1P} + \overline{PQ} + \overline{QA_2} = \overline{A_1A_2}\end{aligned}$$

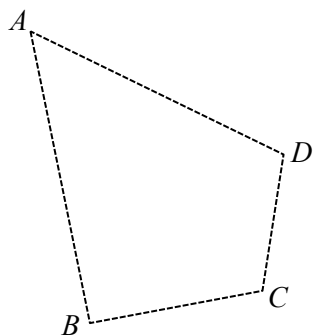
$$\begin{aligned}\triangle ARS \text{ 周長} &= \overline{AR} + \overline{RS} + \overline{SA} \\ &= \overline{A_1R} + \overline{RS} + \overline{SA_2} > \overline{A_1A_2}\end{aligned}$$



(4) 到四邊形頂點的距離和的最小值：

給定平面上的四邊形 $ABCD$ 且 P 為平面上的動點。討論何時有 $\overline{PA} + \overline{PB} + \overline{PC} + \overline{PD}$ 最小值：

當 P 為 $\overline{AC}$ 與 $\overline{BD}$ 的交點時，即是 $\overline{PA} + \overline{PB} + \overline{PC} + \overline{PD}$ 有最小值時，且 $\min(\overline{PA} + \overline{PB} + \overline{PC} + \overline{PD}) = \overline{AC} + \overline{BD}$ 。





主題 10 直線系



【觀念一】 $L_1: x+y-2=0$, $L_2: 2x+y-3=0$, L_1, L_2 的交點為 $(1, 1)$

$$(1) (x+y-2)+k(2x+y-3)=0$$

$\Rightarrow (1, 1)$ 代入滿足方程式，表本直線過 $(1, 1)$

$$(2) s(x+y-2)+(2x+y-3)=0$$

$\Rightarrow (1, 1)$ 代入滿足方程式，表本直線過 $(1, 1)$

$$(3) s(x+y-2)+k(2x+y-3)=0$$

$\Rightarrow (1, 1)$ 代入滿足方程式，表本直線過 $(1, 1)$

(k, s 不皆為 0)

【觀念二】 凡是通過 L_1, L_2 交點的直線可設為

$$\textcircled{1} L_1 + kL_2 = 0 \quad \textcircled{2} sL_1 + L_2 = 0 \quad \textcircled{3} sL_1 + kL_2 = 0$$

【觀念三】 通過 L_1, L_2 交點的直線，一般為了方便，假設為 _____

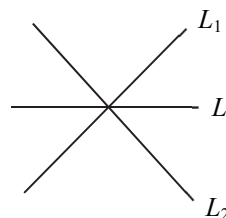
(1) 若 $k=0$ ，則直線表示

(2) 若 $k \neq 0$ ，則直線表示

(3) 若 k 不存在，則直線表示

《說明》 $\because k = -\frac{L_1}{L_2} \quad \because k$ 不存在，表示 $L_2 = 0$

即滿足 L_2 方程式，即表示 L_2



1. (能力指標：過二線交點假設法)

L 過 $2x+y-5=0$ 與 $x+2y-4=0$ 之交點且與 $x-2y+2=0$ 垂直，求 L 。



解： **法 1** $\begin{cases} 2x+y-5=0 \\ x+2y-4=0 \end{cases}$ 交點 $(2, 1)$ ，且 $m = -2$

$$y-1 = -2(x-2) \Rightarrow 2x+y-5=0$$

法 2 設 L 為 $(2x+y-5)+k(x+2y-4)=0$

$$\Rightarrow (2+k)x+(1+2k)y-5-4k=0 \text{ 與 } x-2y+2=0 \text{ 垂直}$$

$$\Rightarrow$$

2. (能力指標：直線恆過定點)

求下列各直線恆過哪一點？



(1) $y = mx + 2m + 3$, $m \in \mathbb{R}$ ，恆過定點：_____

(2) $(k+2m)x + (2k-m)y + (m-k) = 0$, $m, k \in \mathbb{R}$ ，恆過定點：_____

(3) $a+b=3$ ，求 $3ax-2by+1=0$ 恆過定點：_____

解：(1) $(\quad) + m(\quad) = 0 \Rightarrow \left\{ \right.$

(2) $k(\quad) + m(\quad) = 0 \Rightarrow \left\{ \right.$

(3) $3ax-2by+1=0 \Rightarrow 3ax-2(3-a)y+1=0$

$$\Rightarrow (\quad) + a(\quad) = 0$$

3. (能力指標：直線恆過定點)

不論 k 為任何實數，直線 $L_k: x + y - 11 + k(x - y + 5) = 0$

恆過一定點 P 。



(1) 此定點 P 的坐標為 _____

(2) 如果直線 L_k 與 y 軸平行，則 $k =$ _____

(3) 如果三直線： L_k 、 x 軸及 $y = x$ 不能圍成一三角形，則 k 值可能為

_____。

解：

數位 延伸閱讀回家作業



1. 給了兩條直線 $L_1: 3x - y - 1 = 0$, $L_2: 2x + y - 4 = 0$

(1) 求 L_1 與 L_2 的交點 P 之坐標？

(2) 對任意實數 k 而言，方程式 $(3x - y - 1) + k(2x + y - 4) = 0$ 之圖形 Γ 是什麼？ L_1 與 L_2 的交點 P 是否恆在圖形 Γ 上？



簡 答

1. (1) $P(1, 2)$ (2) 見詳解



二元一次不等式

主題

11

二元一次不等式

DRJZ



【觀念一】 $a, b, c \in R, a^2 + b^2 \neq 0$ (a, b 不同時為 0)

(1) $ax + by + c = 0$ 稱二元一次方程式

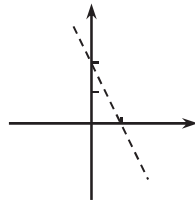
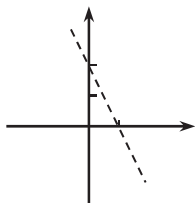
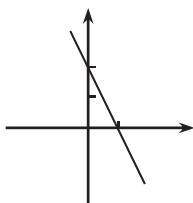
(2) $ax + by + c > 0, ax + by + c \geq 0, ax + by + c < 0, ax + by + c \leq 0$
稱二元一次不等式

【觀念二】 二元一次不等式幾何圖解

(1) $2x + y - 2 = 0$

(2) $2x + y - 2 > 0$

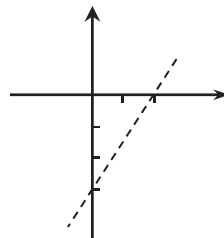
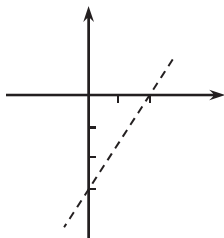
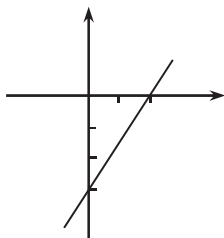
(3) $2x + y - 2 < 0$



(4) $3x - 2y - 6 = 0$

(5) $3x - 2y - 6 > 0$

(6) $3x - 2y - 6 < 0$



結論

(1)



(2)



(3) 以上法則使用必須在不等式 $ax + by + c \begin{matrix} > \\ < \end{matrix} 0$ 且 _____

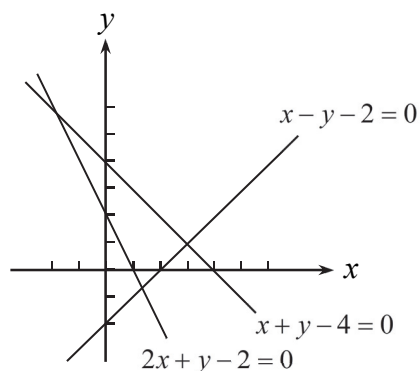
【觀念三】 (x, y) 坐標皆為整數的點稱為： _____

例 1. (能力指標：聯立不等式組)



$$\text{不等式} \begin{cases} x-y \leq 2 \\ x+y \leq 4 \\ 2x+y \geq 2 \end{cases} \quad \text{作圖}$$

解：原式 $\Rightarrow \begin{cases} x-y-2 \leq 0 \\ x+y-4 \leq 0 \\ 2x+y-2 \geq 0 \end{cases}$

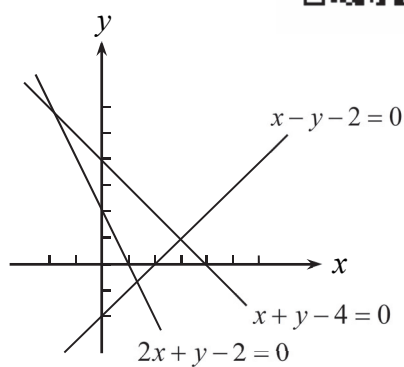


例 2. (能力指標：聯立不等式組)



不等式： $2x+3y+1 \leq x+4y+3 \leq 3y+7 \leq 2x+4y+5$ 作圖

解： $\begin{cases} 2x+3y+1 \leq x+4y+3 \\ x+4y+3 \leq 3y+7 \\ 3y+7 \leq 2x+4y+5 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x-y-2 \leq 0 \\ x+y-4 \leq 0 \\ 2x+y-2 \geq 0 \end{cases}$

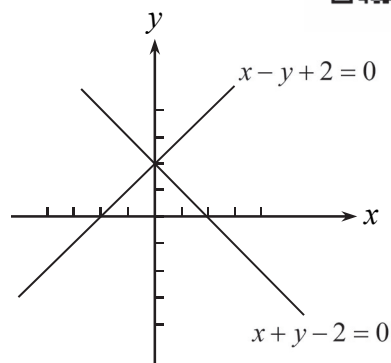


例 3. (能力指標：連乘積不等式)

不等式 $(x+y-2)(x-y+2) \leq 0$ 作圖

解： 1° 先作等號圖形

2° 再取適合範圍



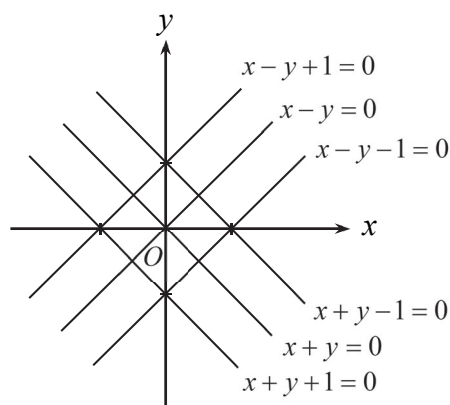
例 4. (能力指標：連乘積不等式)

圖解不等式

$$(x+y)(x+y-1)(x+y+1)(x-y)(x-y-1)(x-y+1) \geq 0$$

解： 1° 先作等號圖形

2° 再取適合範圍



例 5. (能力指標：正方形與菱形)

(1) $|x|+|y|\leq 3$ ，試畫出不等式的圖形。

(2) $\frac{|x|}{5}+\frac{|y|}{3}\leq 1$ ，試畫出不等式的圖形。

解：



例 6. (能力指標：連乘積不等式)

$(|x|+|y|-1)(|x|+|y|-2)(|x|+|y|-3)\leq 0$ ，試畫出不等式的圖形。

解：



例 7. (能力指標：變數置換)

QBDB



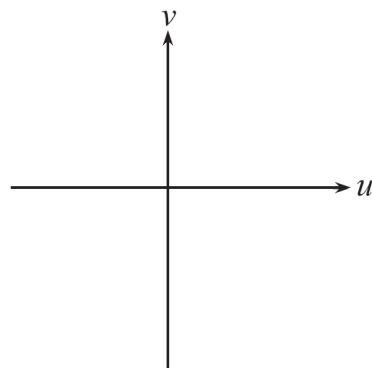
已知 $\begin{cases} x = \frac{1}{3}u + \frac{1}{3}v \\ y = \frac{1}{3}u - \frac{2}{3}v \end{cases}$ 且 $\begin{cases} 0 \leq u \leq 2 \\ 1 \leq v \leq 3 \end{cases}$

(1) 在 uv 平面上作 (u, v) 圖形

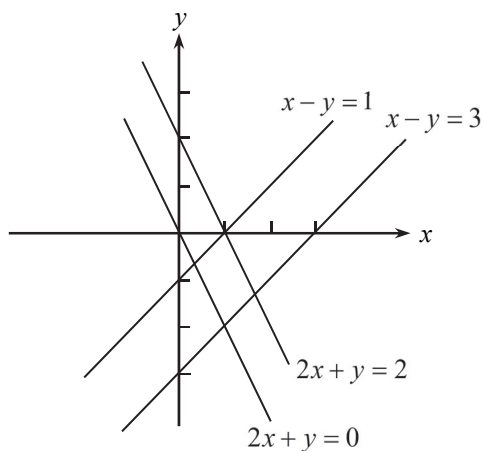
(2) 在 xy 平面上作 (x, y) 圖形

(3) 求 (x, y) 面積

解：(1) $\begin{cases} 0 \leq u \leq 2 \\ 1 \leq v \leq 3 \end{cases}$



$$(2) \begin{cases} x = \frac{1}{3}u + \frac{1}{3}v \\ y = \frac{1}{3}u - \frac{2}{3}v \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} u = 2x + y \\ v = x - y \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 0 \leq 2x + y \leq 2 \\ 1 \leq x - y \leq 3 \end{cases}$$



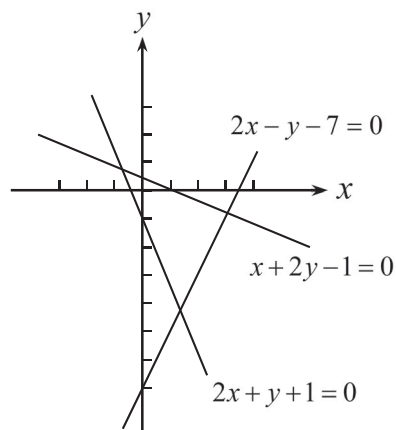
(3)

例 8. (能力指標：三線求內心)

$L_1: 2x + y + 1 = 0$, $L_2: x + 2y - 1 = 0$, $L_3: 2x - y - 7 = 0$, 求三線圍成三角形的內心坐標？



解： 1° 令內心 (h, k)



例 9. (能力指標：同側、異側)

$A(1, k)$, $B(k, -1)$, 在 $L: x + 2y + 1 = 0$ 之異側，求 k 範圍？



解： $A(1, k)$, $B(k, -1)$ 在 L 異側

$\Rightarrow$

例 10. (能力指標：聯立不等式組)

$A(1, 2), B(4, 5), C(5, 1)$

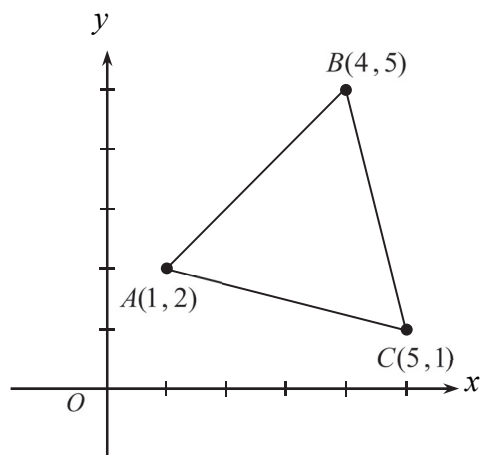
- (1) 試以聯立不等式組表示 $\triangle ABC$ 內部 (含邊界)。
- (2) $P(k, 3k-2)$ 是 $\triangle ABC$ 內部 (含邊界) 一點，求 k 範圍？
- (3) 求 $\triangle ABC$ 內部 (含邊界) 的格子點數。

解：(1) $\overrightarrow{AB}: m = \quad \Rightarrow$

$\overrightarrow{BC}: m = \quad \Rightarrow$

$\overrightarrow{CA}: m = \quad \Rightarrow$

聯立不等式組 $\left\{ \right.$





回家作業



1. 試在坐標平面上標示下列聯立不等式組的圖形，並標示出頂點：

$$(1) \begin{cases} x - y \leq 1 \\ 3x + 2y \leq 4 \\ x \geq 0, y \geq 0 \end{cases}$$

$$(2) \begin{cases} x + y \leq 10 \\ 2x + y \geq 10 \\ x - y \leq 2 \end{cases}$$

$$(3) \begin{cases} 2x + y \geq 2 \\ x \leq 2 \\ y \geq 1 \end{cases}$$



2. 坐標平面上，聯立不等式組 $\begin{cases} x \geq 0 \\ y \geq 0 \\ x + y \leq 4 \\ 3x + 2y \geq 6 \end{cases}$ 所圍成圖形的面積為 _____。

本題無數位影音服務，
請同學詳實練習並善用輔導資源

簡答

1. 見詳解 2. 5



回家作業



3. 坐標平面上，聯立不等式組
$$\begin{cases} x \geq 3 \\ y \geq 0 \\ x - 2y \leq 6 \\ 3x + 4y < 28 \end{cases}$$
 所圍成圖形區域中有 _____ 個

格子點。

本題無數位影音服務，
請同學詳實練習並善用輔導資源

4. 已知 $A(2, 3)$, $B(2, -3)$ ，若 $\overline{AB}$ 與 $L: x + ky + 4 = 0$ 相交，選出可能的 k 值：
- (1) -3 (2) -1 (3) 1 (4) 2 (5) 3

本題無數位影音服務，
請同學詳實練習並善用輔導資源



3. 18 4. (1)(4)(5)



回家作業



5. 平面上一直線 $L: 2x + y = 5$ 將平面分成兩側，已知一點 $P(0, -3)$ ，則下列哪些點與 P 點在直線 L 同側？

(1) $(0, 0)$ (2) $(3, 0)$ (3) $(0, 4)$ (4) $(-2, -1)$ (5) $(4, -1)$

本題無數位影音服務，
請同學詳實練習並善用輔導資源



5. (1)(3)(4)



回家作業



6. (105 年學測試題)

設 a 為一實數，已知在第一象限滿足聯立不等式 $\begin{cases} x-3y \leq a \\ x+2y \leq 14 \end{cases}$ 的所有點所形成之

區域面積為 $\frac{213}{5}$ 平方單位，則 $a = \underline{\hspace{2cm}}$ 。



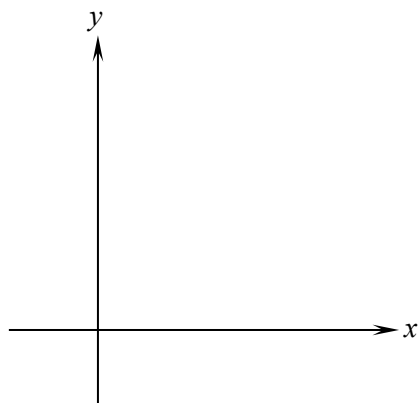
6. 6

例 9

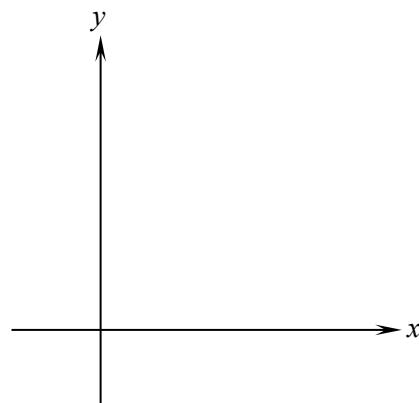
- (1) 在 xy 平面上繪出不等式 $\sqrt{x}\sqrt{y}(x+y-1) < 0$ 所表示的區域圖形。
- (2) 在 xy 平面上不等式 $xy(x+y-1) < 0$ 與不等式 $\sqrt{x}\sqrt{y}(x+y-1) < 0$ 所表示的區域圖形有何不同？

解

(1)



(2)





圓與直線的關係

主題 12 圓標準式



【觀念一】1. 圓定義：在平面上，與一定點的距離相等的所有點所形成的圖形稱為_____。

2. 其中此定點稱為此圓的_____。

3. 圓心與圓上任一點距離稱為_____。

【觀念二】圓標準式

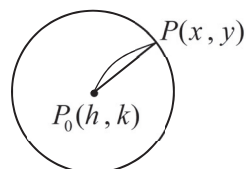
1. 圓心 $P_0(h, k)$ ，半徑 r ，動點 $P(x, y)$

2. 利用 $\overline{PP_0} = r$

$$\text{得 } \sqrt{(x-h)^2 + (y-k)^2} = r$$

$\Rightarrow$

3. 此型式稱為圓_____，又稱_____



例 1. (能力指標：心徑圓)

圓心 $(3, 2)$ 半徑 4，求圓方程式？

解：圓方程式



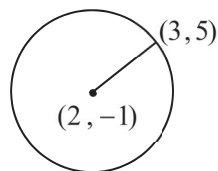
例 2. (能力指標：心徑圓)

圓心 $(2, -1)$ 且通過點 $(3, 5)$ ，求圓方程式？

解：(1) 先求 $r =$

(2) 圓心 $(2, -1)$ ， $r =$

圓方程式為

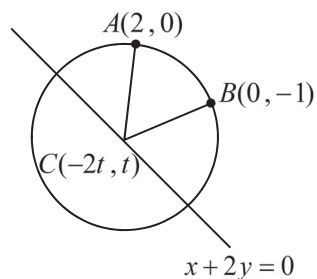


例 3. (能力指標：圓心在 L 上)

圓通過 $A(2, 0)$ ， $B(0, -1)$ 且圓心在 $x + 2y = 0$ 上，求圓方程式？

解：令圓心為 $C(\quad, \quad)$

$$\text{利用 } \overline{AC}^2 = \overline{BC}^2 \Rightarrow (2+2t)^2 + t^2 = (2t)^2 + (t+1)^2 \\ \Rightarrow$$

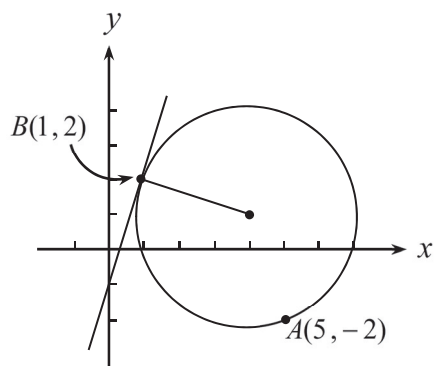


例 4. (能力指標：切點、切線求圓)

圓過點 $A(5, -2)$ 且與直線 $L: 3x - y - 1 = 0$ 相切於點 $B(1, 2)$ ，
求圓方程式？



解：

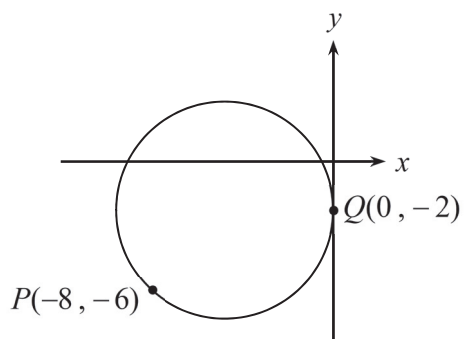


例 5. (能力指標：Y 軸相切)

求通過點 $P(-8, -6)$ 且與 y 軸相切於點 $Q(0, -2)$ 之圓的方程式？



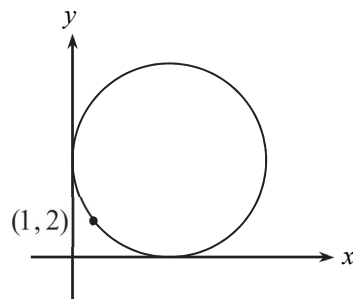
解：



例 6. (能力指標：X、Y 軸相切)

求過點 $(1, 2)$ 且與 x 軸、 y 軸均相切之圓方程式？

解：

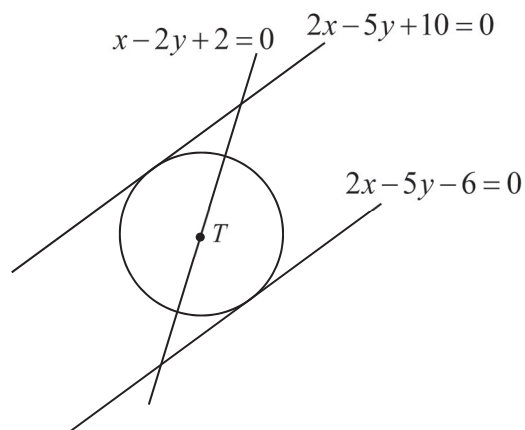


例 7. (能力指標：二線相切)

圓與直線 $L_1: 2x - 5y - 6 = 0$ 及直線 $L_2: 2x - 5y + 10 = 0$ 都相切且

圓心在直線 $x - 2y + 2 = 0$ 上，求圓方程式？

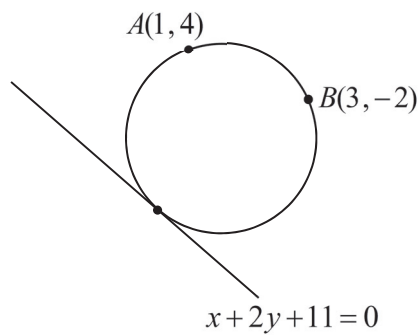
解：



例 8. (能力指標：切線、過兩點)

求過二點 $A(1, 4)$, $B(3, -2)$ 且與直線 $L: x + 2y + 11 = 0$ 相切之圓的方程式？

解：





回家作業



1. 解圓心在 $(1, -2)$ 且通過點 $(5, -5)$ 的圓之方程式。



2. 試求通過兩直線 $x+4y-1=0$ 與 $2x+3y+3=0$ 的交點，且圓心為 $(1, -1)$ 的圓方程式。

3. 有一圓通過點 $P(1, -4)$ 且與 y 軸相切，若此圓的半徑為 5 ，試求該圓的方程式。

簡答

1. $(x-1)^2 + (y+2)^2 = 25$ 2. $(x-1)^2 + (y+1)^2 = 20$

3. $(x-5)^2 + (y+1)^2 = 25$ 或 $(x-5)^2 + (y+7)^2 = 25$



回家作業



4. 設圓 C 的圓心在 $L_1: x+2y+3=0$ 與 $L_2: 3x+5y-7=0$ 兩直線的交點上，且 C 通過原點，試求 C 的方程式。

5. 試求通過 $(0, -3)$ 與 $(4, 0)$ 兩點且圓心在直線 $x+2y=0$ 上之圓方程式。

6. 設圓 C 與直線 $L: 4x+3y+17=0$ 相切於 $P(-2, -3)$ ，且 C 的半徑是 5，試求圓 C 的方程式。



3. $(x-29)^2 + (y+16)^2 = 1097$ 4. $(x-\frac{7}{5})^2 + (y+\frac{7}{10})^2 = \frac{29}{4}$

5. $(x+6)^2 + (y+6)^2 = 25$ 或 $(x-2)^2 + y^2 = 25$



回家作業



7. 試求半徑為 5，圓心在 x 軸上，且與直線 $x=3$ 相切的圓方程式。
8. 已知 $A(1,1)$, $B(-1,1)$ 兩點，試求通過 A , B 兩點且圓心到 $\overline{AB}$ 的距離等於 $\sqrt{3}$ 的圓方程式。
9. 試求圓心在直線 $2x+y=0$ 上且與直線 $x+y-1=0$ 相切於點 $A(2,-1)$ 之圓的方程式。

簡答

7. $(x-8)^2 + y^2 = 25$ 或 $(x+2)^2 + y^2 = 25$
8. $x^2 + (y-1-\sqrt{3})^2 = 4$ 或 $x^2 + (y-1+\sqrt{3})^2 = 4$ 9. $(x-1)^2 + (y+2)^2 = 2$



回家作業



10. 求過 $A(1,1)$, $B(2,2)$ 兩點且與 x 軸相切的圓方程式。

11. 試求與圓 $C: x^2 + y^2 - 6y - 16 = 0$ 及 x 軸都相切，且半徑為 5 的圓方程式。

簡答

10. $x^2 + y^2 + 4x - 10y + 4 = 0$ 或 $x^2 + y^2 - 4x - 2y + 4 = 0$

11. $(x+6)^2 + (y+5)^2 = 25$ 或 $(x-6)^2 + (y+5)^2 = 25$ 或 $(x+4\sqrt{6})^2 + (y-5)^2 = 25$ 或 $(x-4\sqrt{6})^2 + (y-5)^2 = 25$

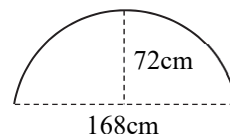


回家作業



12. (91 學測試題)

工匠在窗外邊想做一個圓弧型的花台，此花台在窗口的中央往外伸出 72 公分，窗口的寬度是 168 公分。則此圓弧的圓半徑為 _____ 公分。



13. (103 學測試題)

在坐標平面上，以 $(1, 1)$, $(-1, 1)$, $(-1, -1)$ 及 $(1, -1)$ 等四個頂為頂點的正方形，與圓 $x^2 + y^2 + 2x + 2y + 1 = 0$ 有幾個交點？

- (1) 1 個 (2) 2 個 (3) 3 個 (4) 4 個 (5) 0 個



12. 85 13. (2)



回家作業



14. (103 數甲試題)

在坐標平面上，圓 $x^2 + y^2 + 2x - 2y + 1 = 0$ 與 $y = |2x + 1|$ 的圖形有幾個交點？

- (1) 1 個 (2) 2 個 (3) 3 個 (4) 4 個 (5) 0 個



14. (4)

例 7

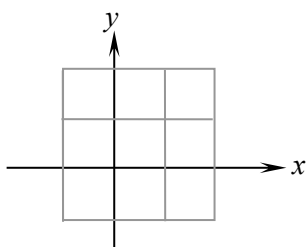
在坐標平面上，下列五組條件中，哪幾組恰可決定一個圓？

- (1) 過三點 $(1, -3)$, $(2, 6)$, $(4, 24)$ (2) 以 $(1, 1)$, $(3, 4)$ 為直徑端點
 (3) 過四點 $(1, 0)$, $(0, 0)$, $(0, 1)$, $(1, 1)$ (4) 圓心為 $(1, 2)$ 且與兩軸相切
 (5) 與直線 $x + y = 1$ 及兩軸相切。

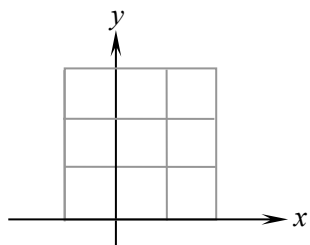
解 (1)

(2)

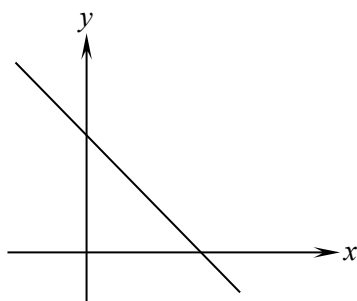
(3)



(4)



(5)



故選_____

主題 13 圓一般式與判別式



【觀念一】圓一般式指： $x^2 + y^2 + dx + ey + f = 0$

$$\text{經配方得：} \left(x + \frac{d}{2}\right)^2 + \left(y + \frac{e}{2}\right)^2 = \frac{d^2 + e^2 - 4f}{4}$$

【觀念二】令判別式 $\Delta = d^2 + e^2 - 4f$

(1) $\Delta > 0$, $P(x, y)$ 圖形表：_____，圓心(_____, _____)

$$r =$$

(2) $\Delta = 0$, $P(x, y)$ 圖形表：_____，點(_____, _____)

(3) $\Delta < 0$, $P(x, y)$ 圖形表：_____

【觀念三】 $ax^2 + bxy + cy^2 + dx + ey + f = 0$ 表圓條件

(1) _____

(2) _____

(3) 原式： $x^2 + y^2 + \frac{d}{a}x + \frac{e}{a}y + \frac{f}{a} = 0$

$$\Delta > 0 \Rightarrow \left(\frac{d}{a}\right)^2 + \left(\frac{e}{a}\right)^2 - 4\left(\frac{f}{a}\right) > 0 \Rightarrow$$

例 1. (能力指標：判別式應用)

$m \in \mathbb{R}$, $x^2 + y^2 + 2(m-1)x - 2my + 3m^2 - 2 = 0$ 表一圓

求 (1) m 範圍 (2) 此圓最大面積？

(3) 所有圓心所在之直線方程式？

解： (1) 表圓 $\Rightarrow \Delta > 0 \Rightarrow 4(m-1)^2 + 4m^2 - 4(3m^2 - 2) > 0$
 $\Rightarrow m^2 + 2m - 3 < 0 \Rightarrow -3 < m < 1$



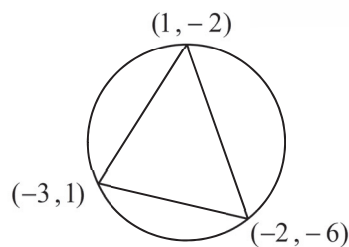
例 2. (能力指標：不共線的三點決定一圓)

求過 $(1, -2)$, $(-3, 1)$, $(-2, -6)$ 的圓。

解： 1° 令圓 $x^2 + y^2 + dx + ey + f = 0$

$$\begin{cases} (1, -2) \\ (-3, 1) \\ (-2, -6) \end{cases} \xrightarrow{\text{代入}} \begin{cases} d - 2e + f = -5 \\ -3d + e + f = -10 \\ -2d - 6e + f = -40 \end{cases}$$

$d = \underline{\hspace{2cm}}, e = \underline{\hspace{2cm}}, f = \underline{\hspace{2cm}}$



例 3. (能力指標：判斷四點共圓)

判斷 $A(1, -2)$, $B(-3, 1)$, $C(-2, -6)$ 與 $D(-1, 3)$ 四點是否共圓？

解： 1° 過 A, B, C 三點可求出 $\triangle ABC$ 外接圓方程式為

$$x^2 + y^2 + 5x + 5y = 0 \text{ (仿前)}$$

2° 再將 $D(-1, 3)$ 代入得

**例 4. (能力指標：三角形外接圓)**

$L_1: x - y - 9 = 0$, $L_2: x + 2y = 0$, $L_3: 3x - y - 7 = 0$ 圍成一 $\triangle$,
求 $\triangle$ 外接圓方程式。

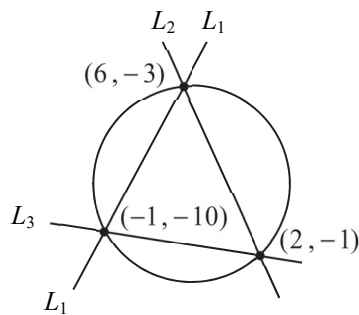
解： 1° 解出三組交點，用三點決定一圓即可

2° 令圓為 $x^2 + y^2 + dx + ey + f = 0$

$$\begin{cases} (6, -3) \\ (-1, -10) \\ (2, -1) \end{cases} \xrightarrow{\text{代入}} \begin{cases} 6d - 3e + f = -45 \\ d + 10e - f = 101 \\ 2d - e + f = -5 \end{cases}$$

$$\Rightarrow d = -4, e = 12, f = 15$$

$$\therefore \text{圓方程式為 } x^2 + y^2 - 4x + 12y + 15 = 0$$

**例 5. (能力指標：同心圓)**

有一圓通過點 $A(1, 1)$ 且與已知圓 $x^2 + y^2 - 4x - 2y = 0$ 有相同
圓心，求圓方程式。

解： 1° 令圓為 $x^2 + y^2 - 4x - 2y + k = 0$

2° 過 $(1, 1)$ 代入得





回家作業



1. 試解通過 $O(0, 0)$, $A(3, 0)$, $B(0, 4)$ 三點的圓之方程式。



2. 試就實數 k 之值，討論方程式 $x^2 + y^2 - 2x + ky + (k + 3) = 0$ 的圖形。

3. 三直線 $x - y - 4 = 0$, $3x - y - 10 = 0$ 與 $2x + y - 20 = 0$ 圍成一個三角形，試求此三角形的外接圓方程式。



1. $x^2 + y^2 - 3x - 4y = 0$ 2. 見詳解 3. $x^2 + y^2 - 6x - 8y = 0$



回家作業



4. 試判斷 $A(0, 1)$, $B(0, 6)$, $C(3, 0)$ 與 $D(-1, 3)$ 四點是否共圓？

5. 設 a 為非零實數，若二元二次方程式 $a^2x^2 + (a+2)y^2 + 2ax + 2a = 0$ 表示圓，試求 a 之值，並求此圓的圓心及半徑。



4. 是 5. $a = -1$ ，圓心 $(1, 0)$ ，半徑為 $\sqrt{3}$

例 6 | 三角形的內切圓

試求三直線 $L_1: 2x - y = -4$, $L_2: 2x + y = 12$, $L_3: x - 2y = 4$ 所圍成三角形之內切圓方程式。

解 1° 內切圓圓心 (內心) 即為內角平分線交點

2° 求 L_1, L_2 之角平分線：

$$\frac{|2x - y + 4|}{\sqrt{5}} = \frac{|2x + y - 12|}{\sqrt{5}}$$

$$\Rightarrow 2x - y + 4 = \pm(2x + y - 12) \Rightarrow x = 2 \text{ 或 } y = 8$$

取三角形內角平分線 $x = 2$

3° 求 L_1, L_3 之角平分線：

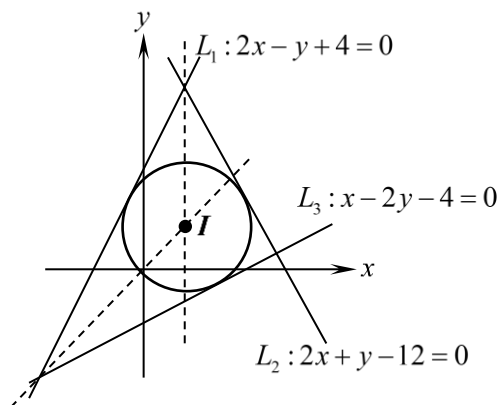
$$\frac{|2x - y + 4|}{\sqrt{5}} = \frac{|x - 2y - 4|}{\sqrt{5}}$$

$$\Rightarrow 2x - y + 4 = \pm(x - 2y - 4) \Rightarrow x - y = 0 \text{ 或 } x + y + 8 = 0$$

取三角形內角平分線 $x - y = 0$

4° 內切圓圓心為 $\begin{cases} x = 2 \\ x - y = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = 2 \\ y = 2 \end{cases}$ ，又半徑為 $d((2, 2), L_1) = \frac{|4 - 2 + 4|}{\sqrt{5}} = \frac{6}{\sqrt{5}}$

故圓的方程式為 $(x - 2)^2 + (y - 2)^2 = \frac{36}{5}$



主題 14 圓直徑式

YPCCK



【觀念】 $A(x_1, y_1)$, $B(x_2, y_2)$ ，以 $\overline{AB}$ 為直徑圓方程式

$$\Rightarrow (x-x_1)(x-x_2) + (y-y_1)(y-y_2) = 0$$

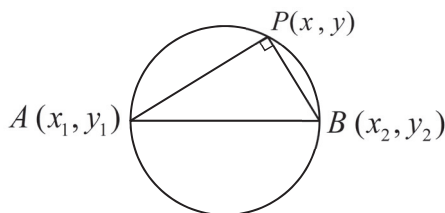
《說明》1° 設圓上動點 $P(x, y)$

$$2^\circ \because \overline{PA} \perp \overline{PB} \Rightarrow m_{\overline{PA}} \times m_{\overline{PB}} = -1$$

$$\Rightarrow \left(\frac{y-y_1}{x-x_1}\right) \times \left(\frac{y-y_2}{x-x_2}\right) = -1$$

$$\Rightarrow (x-x_1)(x-x_2) = -(y-y_1)(y-y_2)$$

$\therefore$ 圓方程式為 _____

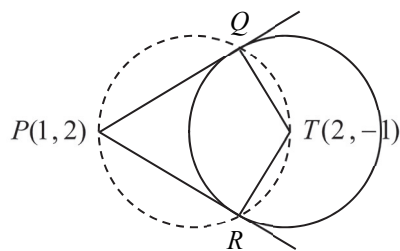


例 1. (能力指標：切點弦直線)

過 $P(1, 2)$ 對圓 $x^2 + y^2 - 4x + 2y - 4 = 0$ 作二切線，若切點為 Q, R ，則

(1) $\triangle PQR$ 之外接圓方程式為何？ (2) $\overleftrightarrow{QR}$ 方程式？

解：

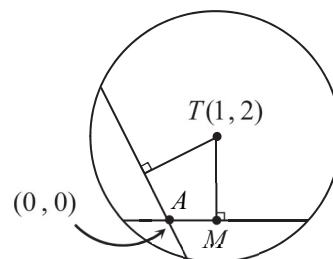


例 2. (能力指標：弦中點軌跡)

設 $A(0, 0)$ 為圓 $(x-1)^2 + (y-2)^2 = 9$ 內一點，求過 A 所有
弦中點軌跡方程式。



解： 1° 令 $M(x, y)$ ， $A(0, 0)$ ，圓心 $T(1, 2)$





回家作業



1. 試解一直徑的兩端點為 $A(1, 4)$, $B(7, -6)$ 的圓之方程式。

LIWS



2. $L_1: 2x + 3y = 12$ 與 $L_2: x - 2y + 1 = 0$ 之交點 A ，自 $P(1, 0)$ 到二直線之垂線分別交於 B, C ，求過 P, A, B, C 之圓方程式？



1. $x^2 + y^2 - 8x + 2y - 17 = 0$ 2. $x^2 + y^2 - 4x - 2y + 3 = 0$

陳立數學~87~絕對智慧
尊重著作權所有・盜翻印法律追究



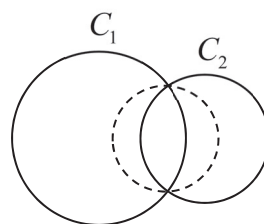
主題 15 圓系



【觀念一】通過 C_1, C_2 交點之圓方程式假設法

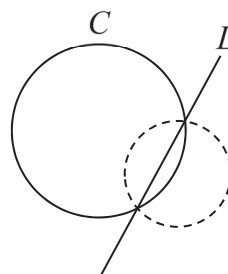
假設法 1

假設法 2



【觀念二】通過 C 與 L 交點之圓方程式假設法

$\Rightarrow$



【觀念三】圓經二點，圓假設法

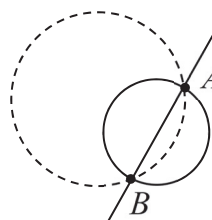
$\Rightarrow$

《說明》 $A(5, 7), B(2, 3)$

(1) $\overleftrightarrow{AB}: m = \frac{4}{3} \Rightarrow$

(2) $\overline{AB}$ 直徑圓 $\Rightarrow$

(3) 圓可設 $\Rightarrow$

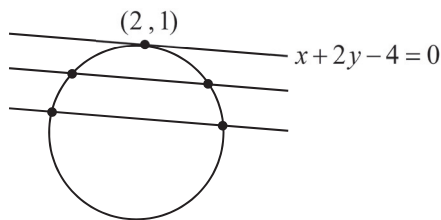


【觀念四】切點、切線圓假設法 $\Rightarrow$

《說明》(1) 切點圓： $(x-2)^2 + (y-1)^2 = 0$

(2) 切線： $x+2y-4=0$

(3) 圓假設法 $\Rightarrow$



1. (能力指標：圓系)

通過 $x^2 + y^2 - 4x - 6y + 4 = 0$ 與 $x - y - 2 = 0$ 之交點且半徑為 3，
求圓方程式？



解：1° 令圓為： $(x^2 + y^2 - 4x - 6y + 4) + k(x - y - 2) = 0$

$$\Rightarrow x^2 + y^2 + (k-4)x - (k+6)y + (4-2k) = 0$$

$$2^\circ \quad r = \frac{\sqrt{\Delta}}{2} \Rightarrow 3 = \frac{\sqrt{(k-4)^2 + (k+6)^2 - 4(4-2k)}}{2}$$

$$\Rightarrow k^2 + 6k = 0 \Rightarrow k = 0 \text{ 或 } k = -6$$

3° 取 $k = 0$ 代入 圓為： $x^2 + y^2 - 4x - 6y + 4 = 0$

4° 取 $k = -6$ 代入 圓為： $x^2 + y^2 - 10x + 16 = 0$

2. (能力指標：圓系)

通過 $x^2 + y^2 - 4x + 2y = 0$ 與 $x^2 + y^2 - 2y - 4 = 0$ 之交點且圓心在 $2x + 4y = 1$ 上，求圓方程式？



解： 1° 令圓為： $(x^2 + y^2 - 4x + 2y) + k(x^2 + y^2 - 2y - 4) = 0$ ，計算較為複雜

2° 另一種設法：先求兩圓交點連線： $x - y - 1 = 0$

令圓為 $(x^2 + y^2 - 4x + 2y) + k(x - y - 1) = 0$

$$\Rightarrow x^2 + y^2 + (k - 4)x + (2 - k)y - k = 0$$

3° 圓心 $(\frac{4-k}{2}, \frac{k-2}{2})$ 代入 $2x + 4y = 1$

$$\therefore 2(\frac{4-k}{2}) + 4(\frac{k-2}{2}) = 1 \Rightarrow k = 1$$

$\therefore$ 圓方程式為 $x^2 + y^2 - 3x + y - 1 = 0$

3. (能力指標：圓系)

求通過 $x^2 + y^2 + 2x - 4y + 1 = 0$ 與直線 $2x - y + 4 = 0$ 之交點且切 y 軸之圓方程式？



解： 1° 令圓為 $(x^2 + y^2 + 2x - 4y + 1) + k(2x - y + 4) = 0$

$$\Rightarrow x^2 + y^2 + (2 + 2k)x - (4 + k)y + (1 + 4k) = 0$$

2° 令 $x = 0$ ，代入得 $y^2 - (4 + k)y + (1 + 4k) = 0$

3° $\because$ 相切 $\therefore$ 等根 $\Delta = 0$

$$\therefore (4 + k)^2 - 4(1 + 4k) = 0 \Rightarrow k = 6 \text{ 或 } k = 2$$

4° 取 $k = 6$ 代入： $x^2 + y^2 + 14x - 10y + 25 = 0$

5° 取 $k = 2$ 代入： $x^2 + y^2 + 6x - 6y + 9 = 0$

數位 延伸閱讀回家作業



1. 試求通過點 $(2, 3)$ ，並經過直線 $x + 2y + 3 = 0$ 和圓 $x^2 + y^2 - 2x + 4y + 1 = 0$ 的交點的圓方程式。



2. 試求通過兩圓 $x^2 + y^2 - x - y - 2 = 0$ 及 $x^2 + y^2 + 4x - 4y - 8 = 0$ 的交點與點 $(3, 1)$ 的圓方程式。

3. 試求通過圓 $x^2 + y^2 - 4x + 2y + 1 = 0$ 與直線 $x - 2y - 4 = 0$ 的交點，且與 x 軸相切的圓方程式。

簡 答

1. $x^2 + y^2 - 4x - 5 = 0$ 2. $3x^2 + 3y^2 - 13x + 3y + 6 = 0$

3. $x^2 + y^2 - 6x + 6y + 9 = 0$ 或 $x^2 + y^2 - 10x + 14y + 25 = 0$

主題 16 圓軌跡



《 《 < < < 《 《 《 《 《 < < < < < 《 《 《 < <

型一 阿波羅尼斯圓軌跡

IXCW



$$\overline{PA} = k \overline{PB}$$

(1) $k=1$, P 表 _____

(2) $k \neq 1, k > 0$, P 表 _____

(1) $A(1,1)$, $B(3,2)$, $\overline{PA}:\overline{PB}=2:1$, 求 P 軌跡方程式?

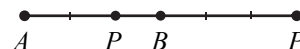
解： 令 $P(x, y)$, $\overline{PA}=2\overline{PB}$

$$\therefore \sqrt{(x-1)^2 + (y-1)^2} = 2\sqrt{(x-3)^2 + (y-2)^2}$$

$\Rightarrow$

(2) 給予 A, B 二點如圖，若 $\overline{PA}:\overline{PB}=2:1$ ，請將 P 軌跡作圖。

解：



型二 Q 是圓 $(x-1)^2 + (y+2)^2 = 9$ 的動點，且 Q 為 OP 中點， O 是原點，

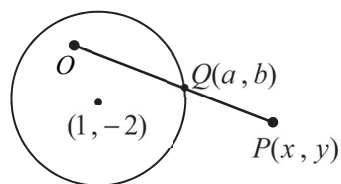


求動點 P 軌跡？

解： 1° 令 $P(x, y)$, $Q(a, b)$

$$\Rightarrow \begin{cases} a = \frac{0+x}{2} = \frac{x}{2} \\ b = \frac{0+y}{2} = \frac{y}{2} \end{cases}$$

$$2^\circ \because (a-1)^2 + (b+2)^2 = 9 \Rightarrow$$



型三 $A(-5, 0)$, $B(5, 0)$, $C(3, 6)$ ，求 $\overline{PA}^2 + \overline{PB}^2 + \overline{PC}^2 = 155$ 一切點 P 之軌跡方程式。



解： 令 $P(x, y)$

$$\therefore (x+5)^2 + y^2 + (x-5)^2 + y^2 + (x-3)^2 + (y-6)^2 = 155$$

$$\Rightarrow 3x^2 + 3y^2 - 6x - 12y - 60 = 0$$

$$\Rightarrow x^2 + y^2 - 2x - 4y - 20 = 0$$

$$\Rightarrow (x-1)^2 + (y-2)^2 = 25$$

型四 P 為 $x^2 + y^2 = 1$ 上的動點， $A(4, 4)$ ， $B(2, 6)$ ，求 $\triangle ABP$ 之

重心軌跡方程式？

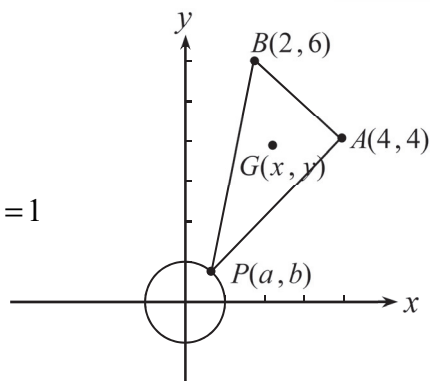
解：1° 令重心 $G(x, y)$ ， $P(a, b)$

$$G: \begin{cases} x = \frac{a+4+2}{3} \\ y = \frac{b+4+6}{3} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a = 3x - 6 \\ b = 3y - 10 \end{cases}$$

2° P 為 $x^2 + y^2 = 1$ 上的動點 $\therefore a^2 + b^2 = 1$

$$\Rightarrow (3x - 6)^2 + (3y - 10)^2 = 1$$

$$\Rightarrow (x - 2)^2 + (y - \frac{10}{3})^2 = \frac{1}{9}$$





回家作業



1. 設 $A(0, 0)$, $B(6, 0)$, 求滿足 $\overline{PA} = 2\overline{PB}$ 之 P 點軌跡方程式, 並作出它的圖形。



2. 從圓 $x^2 + y^2 = 25$ 上一點 $A(3, 4)$ 作圓的弦 $\overline{AP}$, 當 P 點在此圓上連續變動時, 求動弦 $\overline{AP}$ 之中點軌跡的方程式。

3. 試解到兩定點 $A(1, 1)$, $B(4, 5)$ 的距離比為 $2:3$ 的點集合之方程式。

簡答

1. 見詳解 2. $(x - \frac{3}{2})^2 + (y - 2)^2 = (\frac{5}{2})^2$ 3. $x^2 + y^2 + \frac{14}{5}x + \frac{22}{5}y - \frac{146}{5} = 0$



回家作業



4. 設 Q 是圓 $C: x^2 + y^2 - 4x + 6y - 12 = 0$ 上的動點， A 是定點 $(0, 1)$ ，若點 P 是 $\overline{AQ}$ 的中點，求動點 P 所成圖形的方程式。



4. $(x-1)^2 + (y+1)^2 = \frac{25}{4}$

例 2

台中一中

在坐標平面上， A 的坐標為 $(8, 0)$ ， B 的坐標為 $(0, 6)$ ， P 為圓 $\Gamma: x^2 + y^2 = 16$ 上的動點，求 $3\overline{PA} + 2\overline{PB}$ 的最小值。

解**▣ [台中一中]**

已知 $B(0, 4)$, $C(9, 1)$ ，若 P 為圓 $x^2 + y^2 = 4$ 上的動點；則 $\overline{PB} + 2\overline{PC}$ 的最小值為_____。

答：18

主題 17 點與圓的關係

IYPX



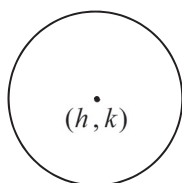
【觀念一】點與圓位置的判斷

$$(1) f(x, y) = x^2 + y^2 + dx + ey + f = (x - h)^2 + (y - k)^2 - r^2$$

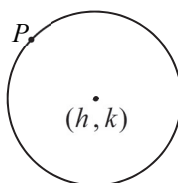
$$(2) f(m, n) = (m - h)^2 + (n - k)^2 - r^2$$

(3) 圖示

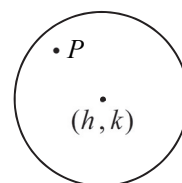
P .



$$f(m, n) > 0$$



$$f(m, n) = 0$$



$$f(m, n) < 0$$

【觀念二】切線段長

(1) $P(x_0, y_0)$ 在圓外，圓： $x^2 + y^2 + dx + ey + f = 0$

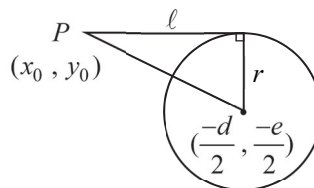
(2) P 至圓之切線段長

$$\ell = \sqrt{\quad\quad\quad} \quad (\text{當公式記憶})$$

$$\text{證：} \ell = \sqrt{\left(x_0 + \frac{d}{2}\right)^2 + \left(y_0 + \frac{e}{2}\right)^2 - r^2}$$

$$= \sqrt{x_0^2 + y_0^2 + dx_0 + ey_0 + \frac{d^2}{4} + \frac{e^2}{4} - \left(\frac{d^2 + e^2 - 4f}{4}\right)}$$

$$= \sqrt{x_0^2 + y_0^2 + dx_0 + ey_0 + f}$$



例 1. (能力指標：點與圓)

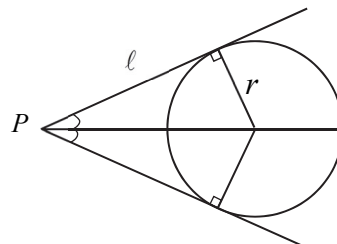
$P(1,1)$ ，圓： $x^2 + y^2 + 2x + 4y + 1 = 0$

(1) 判斷 P 在圓內或圓外或圓上？

(2) 求 P 到圓切線段長？

解： (1) $P(1,1)$ 代入圓 $1^2 + 1^2 + 2 + 4 + 1 = 9 > 0$ ， P 在圓外

(2) 切線段長 =



例 2. (能力指標：圓內部與外部)

$A(1, 2)$, $B(4, 5)$ 二點分別在圓 $C: x^2 + y^2 - 4x + 2ky + 5k = 0$ 之內部與外部，求 k 之範圍？



解：
$$\begin{cases} A \text{ 在 } C \text{ 內部} \\ B \text{ 在 } C \text{ 外部} \Rightarrow \\ C \text{ 表實圓} \end{cases}$$

例 3. (能力指標：點與圓最近最遠距離)

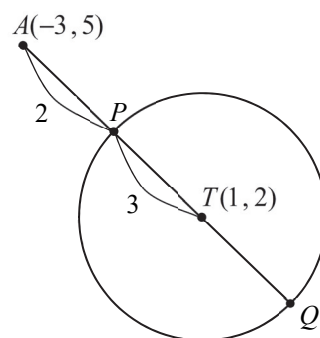
圓 $C: (x-1)^2 + (y-2)^2 = 9$, $A(-3, 5)$

(1) 求 A 到圓上點最近距離及最近點坐標。

(2) 求 A 到圓上點最遠距離及最遠點坐標。



解：



例 4. (能力指標：點與圓距離)

坐標平面上的圓 $C: (x-7)^2 + (y-8)^2 = 9$ 上有 _____ 個點

與原點的距離正好是整數值。

解：



例 5. (能力指標：距離最大、最小值)

$x, y \in \mathbb{R}$, $x^2 + y^2 - 2x - 4y - 4 = 0$, 求 $x^2 + y^2 + 6x - 10y$ 之最大、最小值？



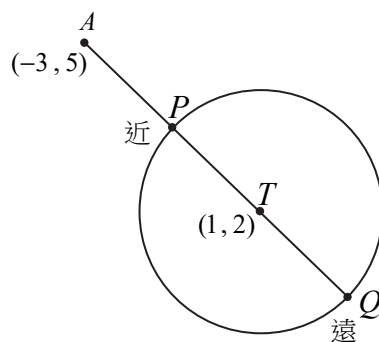
解：1° $x^2 + y^2 - 2x - 4y - 4 = 0 \Rightarrow (x-1)^2 + (y-2)^2 = 9$

2° 目標： $x^2 + y^2 + 6x - 10y = (x+3)^2 + (y-5)^2 - 34$

3° 令 $P(x, y)$, $A(-3, 5)$

最大值 $= \overline{AQ}^2 - 34 =$

最小值 $= \overline{AP}^2 - 34 =$





回家作業



1. 設 x, y 為實數，且滿足 $x^2 + y^2 + 2x - 4y - 4 = 0$ ，試求 $x^2 + y^2$ 的最大值與最小值。



2. 試判定下列各組點與圓的關係：(圓上、圓內或圓外)

- (1) $P(1, 4), C: x^2 + y^2 + x + y = 0$
- (2) $P(5, 1), C: (x-1)^2 + (y-2)^2 = 17$
- (3) $P(-1, 1), C: x^2 + y^2 = 25$

3. 若自點 $P(5, 7)$ 引圓 $C: x^2 + y^2 + 2x + 2y - 3 = 0$ 的切線，試求 P 到切點的距離。



1. 最大值為 $14 + 6\sqrt{5}$ ，最小值為 $14 - 6\sqrt{5}$ 2. (1)圓外 (2)圓上 (3)圓內 3. $\sqrt{95}$



回家作業



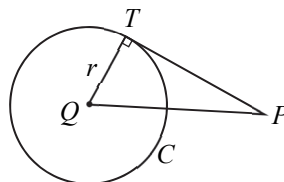
4. 設 P 是圓 $C: (x-1)^2 + (y-2)^2 = 9$ 上的動點，求 P 點到定點 $A(-3, 5)$ 距離的最小值，並求距離最小時的 P 點坐標。

5. 設方程式 $x^2 + y^2 + 2x - 4y + k = 0$ 的圖形是一個圓，且點 $(3, 1)$ 在圓外，求實數 k 的範圍。

6. 設 $C: (x-3)^2 + (y+2)^2 = 3^2$ ， $P(-1, 3)$

(1) 試證： P 點在圓 C 的外部。

(2) 參照右圖，求 P 點到圓 C 所引之切線長 $\overline{PT}$ 。



4. $P(-\frac{7}{5}, \frac{19}{5})$, $\min = 2$ 5. $-12 < k < 5$ 6. (1) 略 (2) $4\sqrt{2}$

主題 14 圓幕與根軸

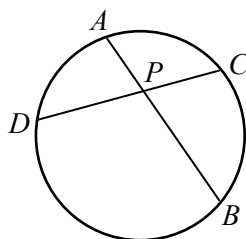
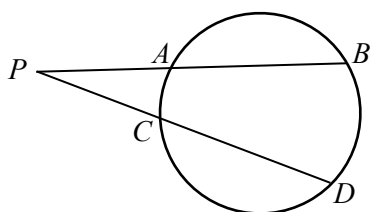


1. 圓幕定理

(1) 圓幕定理：

① 外幕：

若點 P 在圓外，由 P 對圓作一割線，交圓於 A, B 相異兩點，又由 P 對圓作另一割線，交圓於 C, D 相異兩點，則 。(如左下圖)



② 內幕：

若點 P 在圓內，過 P 的一弦兩端點為 A, B ，又過 P 的另一弦兩端點為 C, D ，則 。(如右上圖)

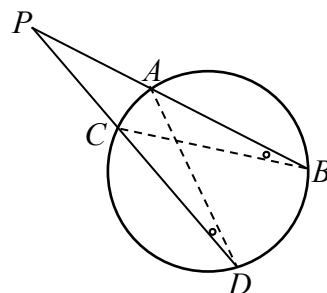
【證明】

$$1^\circ \quad \because \angle PDA = \angle PBC \quad [AC \text{ 劣弧的圓周角}]$$

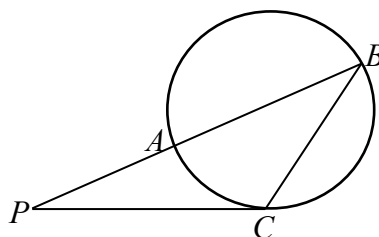
$$\therefore \triangle PDA \sim \triangle PBC$$

$$2^\circ \quad \overline{PD} : \overline{PA} = \overline{PB} : \overline{PC}$$

$$\Rightarrow \overline{PA} \times \overline{PB} = \overline{PC} \times \overline{PD}$$



(2) 切割線定理：



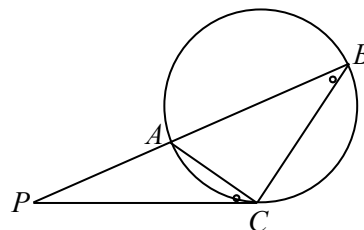
【證明】

1° $\because \angle PCA = \angle PBC$ [AC劣弧的圓周角]

$\therefore \triangle PCA \sim \triangle PBC$

2° $\overline{PC} : \overline{PA} = \overline{PB} : \overline{PC}$

$\Rightarrow \overline{PC}^2 = \overline{PA} \times \overline{PB}$

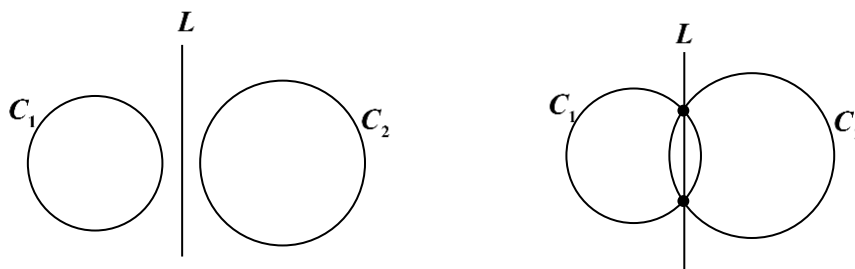


2. 等幂線

(1) 等幂線的定義：

到兩不同心圓 $C_1: x^2 + y^2 + d_1x + e_1y + f_1 = 0$ 與 $C_2: x^2 + y^2 + d_2x + e_2y + f_2 = 0$ 的

切線段等長之所有點軌跡所在之直線稱為 ，或等幂線 (等幂軸)。



(2) 根軸求法：

根軸所在的直線方程式為

$$\boxed{L: (x^2 + y^2 + d_1x + e_1y + f_1) - (x^2 + y^2 + d_2x + e_2y + f_2) = 0} \quad \text{[兩圓方程式相減]}$$

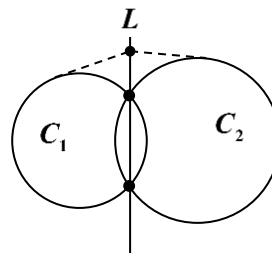
或 $\boxed{L: (d_1 - d_2)x + (e_1 - e_2)y + (f_1 - f_2) = 0}$ 。

【說明】

$P(x, y)$ 到圓 C_1 和圓 C_2 的切線段等長

$$\text{故 } \sqrt{x^2 + y^2 + d_1x + e_1y + f_1} = \sqrt{x^2 + y^2 + d_2x + e_2y + f_2}$$

$$\Rightarrow \boxed{L: (d_1 - d_2)x + (e_1 - e_2)y + (f_1 - f_2) = 0}$$



主題 18 圓與直線的關係

TPXE



【觀念一】圓方程式 $f(x, y) = 0$ ，直線方程式 $ax + by + c = 0$

將兩方程式解聯立可得 $Ax^2 + Bx + C = 0$ (或 $Ay^2 + By + C = 0$)

(1) 圓與直線相離

$$Ax^2 + Bx + C = 0 \text{ 無實數解} \Rightarrow D < 0$$



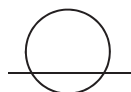
(2) 圓與直線相切

$$Ax^2 + Bx + C = 0 \text{ 二重根} \Rightarrow D = 0$$



(3) 圓與直線相割

$$Ax^2 + Bx + C = 0 \text{ 二相異實根} \Rightarrow D > 0$$



(4) 圓與直線相交 $\Rightarrow D \geq 0$

【觀念二】圓與直線關係

(1) 圓與 L 相離

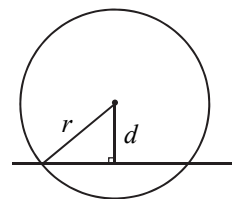
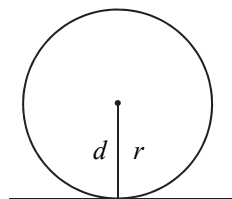
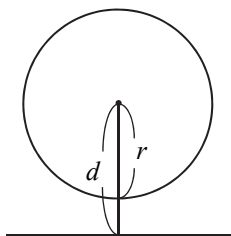
條件 _____

(2) 圓與 L 相切

條件 _____

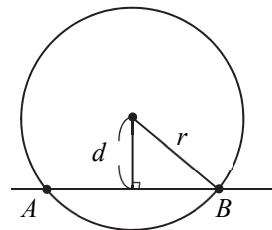
(3) 圓與 L 相割

條件 _____



(4) 圓與 L 相交，條件 $\Rightarrow$

【觀念三】弦長求法 $\overline{AB} =$



例 1. (能力指標：圓與直線)

$L: x - y + k = 0$, $C: x^2 + y^2 = 4$, 求下列情形 k 值範圍？

(1) 相割 (2) 相切 (3) 相離 (4) 相交

解：(1) 相割 $\Rightarrow d < r \Rightarrow$

(2) 相切 $\Rightarrow d = r \Rightarrow$

(3) 相離 $\Rightarrow d > r \Rightarrow$

(4) 相交 $\Rightarrow d \leq r \Rightarrow$



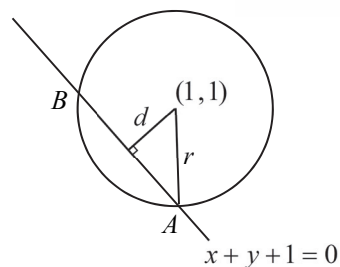
例 2. (能力指標：弦長)

$L: x+y+1=0$, $C: (x-1)^2+(y-1)^2=16$, 求 L 截 C 之弦長?

解： 1° $d =$

$$r = 4$$

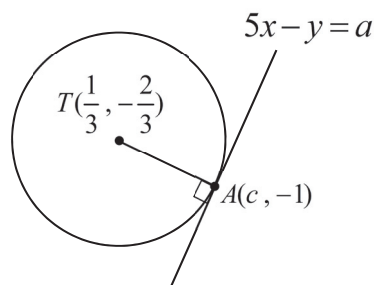
$$2^\circ \overline{AB} = 2\sqrt{r^2 - d^2} =$$



例 3. (能力指標：切線與切點)

$5x - y = a$ 與 $3x^2 + 3y^2 - 2x + 4y + b = 0$ 相切，切點為 $A(c, -1)$ ，求 a, b, c ?

解： 1° 圓： $x^2 + y^2 - \frac{2}{3}x + \frac{4}{3}y + \frac{b}{3} = 0 \Rightarrow$ 圓心 $T(\frac{1}{3}, -\frac{2}{3})$



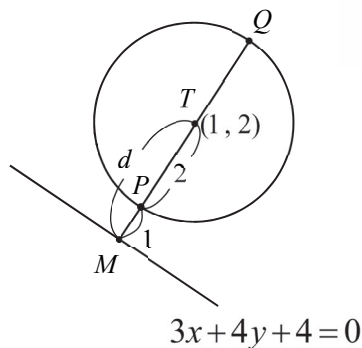
例 4. (能力指標：圓與直線距離)

$$L: 3x + 4y + 4 = 0, \text{ 圓 } C: (x-1)^2 + (y-2)^2 = 4$$

(1) 求圓 C 到 L 最近距離及最近之點？

(2) 求圓 C 到 L 最遠距離及最遠之點？

解：



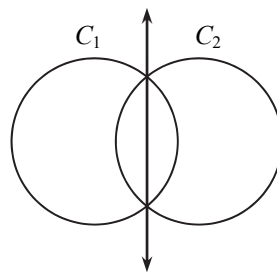
例 5. (能力指標：二圓交點連線)

$$C_1: x^2 + y^2 - 4y + 2 = 0, C_2: x^2 + y^2 + 2x - 12 = 0,$$

求二圓交點連線？

解：
$$\begin{cases} x^2 + y^2 - 4y + 2 = 0 \\ x^2 + y^2 + 2x - 12 = 0 \end{cases}$$

$\Rightarrow$





回家作業



1. 討論直線 $L: y-1=k(x+2)$ 和圓 $C: (x-2)^2 + (y-1)^2 = 4$ 相交 (含相切)、相離的條件。



2. 求直線 $L: x+y=2$ 被圓 $C: x^2 + y^2 - 4x + 6y + 8 = 0$ 所截得的弦長。

3. 設 P 是直線 $L: x+y=10$ 上的任意點， Q 是圓 $C: x^2 + y^2 = 25$ 上的任意點，試求線段 $\overline{PQ}$ 長的最小值。



1. 略 2. $\sqrt{2}$ 3. 最小值 $= 5\sqrt{2} - 5$



回家作業



4. 試判定下列各組直線與圓的關係 (相交，相切或不相交)

(1) $L: 3x + y - 9 = 0$, $C: (x-1)^2 + (y+2)^2 = 9$

(2) $L: 3x + 4y = 25$, $C: x^2 + y^2 = 25$

(3) $L: x + y = 5$, $C: (x-1)^2 + (y-2)^2 = 10$

5. 設一直線通過 $x^2 + y^2 - 4y + 2 = 0$ 與 $x^2 + y^2 + 2x - 12 = 0$ 兩圓的交點，試求交點的坐標與此直線的方程式。

6. 設 $P(x, y)$ 是圓 $x^2 + y^2 - 2y - 8 = 0$ 上的點，求 $2x - y + 4$ 的最小值與最大值。



4. (1)相交 (2)相切 (3)相交 5. 交點： $(\frac{1}{5}, \frac{17}{5})$ ； $(1, 3)$ ，直線： $x + 2y - 7 = 0$

6. 最大值 $3 + 3\sqrt{5}$ ，最小值 $3 - 3\sqrt{5}$



回家作業



7. 求直線 $2x - y + 1 = 0$ 與圓 $x^2 + y^2 - 2x - 1 = 0$ 的交點坐標。

8. 試就實數 k 的值討論直線 $x - 2y + k = 0$ 與圓 $x^2 + y^2 = 1$ 的相交關係。

9. 若一直線 $L: x + my - m = 0$ 交圓 $C: x^2 + y^2 - x = 0$ 於 A, B 兩點，且使 $\overline{AB} = 1$ ，試求 m 的值。

簡答

7. $(0, 1)$ 與 $(\frac{-2}{5}, \frac{1}{5})$ 8. 見詳解 9. $m = \frac{1}{2}$



回家作業



10. 設圓 $C: x^2 + y^2 - 2x + 4y - 11 = 0$ 的一條弦的中點坐標為 $(3, -5)$ ，試求此弦所在的直線方程式及弦長。

簡答

10. $2x - 3y - 21 = 0$ ，弦長 $2\sqrt{3}$



回家作業



11. (97 學測試題)

設 $\Gamma: x^2 + y^2 - 10x + 9 = 0$ 為坐標平面上的圓。試問下列哪些選項是正確的？

- (1) Γ 的圓心坐標為 $(5, 0)$
- (2) Γ 上的點與直線 $L: 3x + 4y - 15 = 0$ 的最遠距離等於 4
- (3) 直線 $L_1: 3x + 4y + 15 = 0$ 與 Γ 相切
- (4) Γ 上恰有兩個點與直線 $L_2: 3x + 4y = 0$ 的距離等於 2
- (5) Γ 上恰有四個點與直線 $L_3: 3x + 4y - 5 = 0$ 的距離等於 2

12. (102 學測試題)

坐標平面上，一圓與直線 $x - y = 1$ 以及直線 $x - y = 5$ 所截的弦長皆為 14。則此圓的面積為 _____。



11. (1)(2)(4) 12. 51π



回家作業



13. (102 數甲試題)

設 m 為實數。若圓 $x^2 + y^2 + 4x - 7y + 10 = 0$ 與直線 $y = m(x + 3)$ 在坐標平面上的兩個交點位於不同的象限，而滿足此條件的 m 之最大範圍為 $a < m < b$ ，則 $a = \underline{\hspace{2cm}}$ 、 $b = \underline{\hspace{2cm}}$ 。(化成最簡分數)

14. (104 數甲試題)

坐標平面上有一以原點 O 為圓心的圓 C ，交直線 $x - y + 1 = 0$ 於 Q, R 兩點。已知圓 C 上有一點 P 使得 $\triangle PQR$ 為一正三角形。請選出正確的選項。

- (1) O 點與 P 點皆在 $\overline{QR}$ 的中垂線上
- (2) P 點在第三象限
- (3) $\overline{QR}$ 的中點坐標為 $(-\frac{1}{3}, \frac{2}{3})$
- (4) 圓 C 的方程式為 $x^2 + y^2 = 2$
- (5) 直線 $x - y - 1 = 0$ 為圓 C 在 P 點的切線



13. $a = \frac{2}{3}, b = \frac{5}{3}$ 14. (1)(4)



回家作業



15. (105 學測試題)

坐標平面上兩圖形 Γ_1, Γ_2 的方程式分別為： $\Gamma_1 : (x+1)^2 + y^2 = 1$ 、 $\Gamma_2 : (x+y)^2 = 1$ 。

請問 Γ_1, Γ_2 共有幾個交點？

- (1) 1 個 (2) 2 個 (3) 3 個 (4) 4 個 (5) 0 個

16. (106 學測試題)

地面上甲、乙兩人從同一地點同時開始移動。甲以每秒 4 公尺向東等速移動，乙以每秒 3 公尺向北等速移動。在移動不久之後，他們互望的視線被一圓柱體建築物阻擋了 6 秒後才又相見。此圓柱體建築物底圓的直徑為 _____ 公尺。



15. (2) 16. 14.4



回家作業



17. (107 數甲試題)

坐標平面上，已知圓 C 通過點 $P(0, -5)$ ，其圓心在 $x = 2$ 上。若圓 C 截 x 軸所成之弦長為 6，則其半徑為 _____。(化成最簡根式)



17. $\sqrt{13}$

主題 19 圓的切線

GUUH



【觀念一】圓上一點求切線

(1) 圓 $C: x^2 + y^2 + dx + ey + f = 0$

圓心 $T(-\frac{d}{2}, -\frac{e}{2})$

(2) 切線上動點 $P(x, y)$, $P_0(x_0, y_0)$

$T(-\frac{d}{2}, -\frac{e}{2})$

$\therefore \overline{P_0P} \perp \overline{P_0T}$

$\therefore m_{\overline{P_0P}} \times m_{\overline{P_0T}} = -1$

$$\Rightarrow \left(\frac{y-y_0}{x-x_0} \right) \left(\frac{-\frac{e}{2}-y_0}{-\frac{d}{2}-x_0} \right) = -1$$

$$\Rightarrow (x_0 + \frac{d}{2})(x-x_0) + (y_0 + \frac{e}{2})(y-y_0) = 0$$

整理得 $x_0x + y_0y + d(\frac{x-x_0}{2}) + e(\frac{y-y_0}{2}) - (x_0^2 + y_0^2) = 0$

$$\Rightarrow x_0x + y_0y + d(\frac{x-x_0}{2}) + e(\frac{y-y_0}{2}) - (-dx_0 - ey_0 - f) = 0$$

$$\Rightarrow x_0x + y_0y + d(\frac{x_0+x}{2}) + e(\frac{y_0+y}{2}) + f = 0$$

(3) 將上式結果整理成切線法則

(1) $x^2 \rightarrow$

(3) $x \rightarrow$

(5) $f \rightarrow$

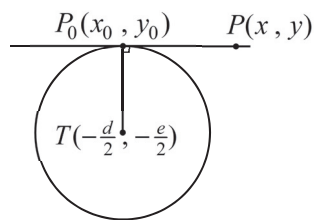
(2) $y^2 \rightarrow$

(4) $y \rightarrow$

(4) 圓標準式平分法則

1° 圓： $(x-h)^2 + (y-k)^2 = r^2$ ，切點： $P(x_0, y_0)$

2° 過 P 切線方程式為： $(x-h)(x_0-h) + (y-k)(y_0-k) = r^2$



【觀念二】已知切線斜率求切線

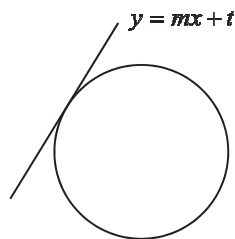
(1) 已知切線斜率 m ，切線可設 $y = mx + t$

(2) $L: mx - y + t = 0$ 與圓 C 相切

$\Rightarrow$



$\Rightarrow$ 即可求切線方程式



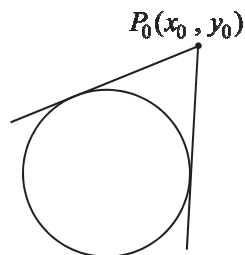
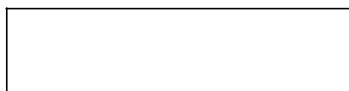
【觀念三】圓外一點求切線

(1) 設過 $P_0(x_0, y_0)$ 之直線

$$y - y_0 = m(x - x_0)$$

$$\Rightarrow mx - y + y_0 - mx_0 = 0$$

(2) L 與圓相切 $\Rightarrow$



【觀念四】已知斜率求切線

(1) $x^2 + y^2 = r^2$ ，已知切線斜率 m

公式 切線方程式為_____

《說明》令切線 $y = mx + t \Rightarrow mx - y + t = 0$

$$\Rightarrow \begin{cases} x^2 + y^2 = r^2 \\ y = mx + t \end{cases}$$

$$\Rightarrow x^2 + (mx + t)^2 = r^2$$

$$\Rightarrow (1 + m^2)x^2 + 2mtx + (t^2 - r^2) = 0$$

$$\because \text{相切} \quad \therefore D = 0$$

$$\Rightarrow (2mt)^2 - 4(1 + m^2)(t^2 - r^2) = 0$$

$$\Rightarrow t^2 = r^2(1 + m^2) \quad \therefore t = \pm r\sqrt{1 + m^2}$$

$$\therefore \text{切線方程式為 } y = mx \pm r\sqrt{1 + m^2}$$

(2)	$x^2 + y^2 = r^2$	
	$(x-h)^2 + (y-k)^2 = r^2$	

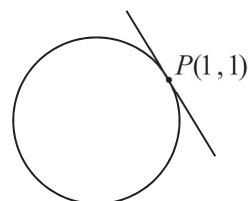
例 1. (能力指標：圓上點求切線)

已知 $P(1,1)$ 且圓： $x^2 + y^2 - 2x + 3y - 3 = 0$ ，

求經 P 之切線。

解： 1° $P(1,1)$ 代入圓方程式： $1+1-2+3-3=0 \quad \therefore P$ 在圓上

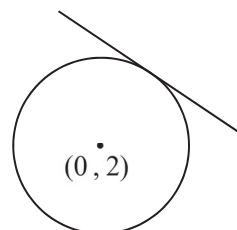
2° 過 P 切線方程式：



例 2. (能力指標：已知 m 求切線)

平行 $x+2y=3$ 與 $x^2 + (y-2)^2 = 5$ 相切之切線。

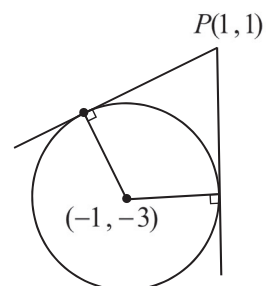
解：



例 3. (能力指標：圓外一點求切線)

經 $P(1,1)$ 且與 $(x+1)^2 + (y+3)^2 = 4$ 相切之切線方程式。

解：





回家作業



1. 求圓的切線方程式：

(1) 與 $x+y=1$ 垂直且與圓 $x^2+y^2+6x-2y+5=0$ 相切的直線。

(2) 與 $x+y=1$ 平行且與圓 $x^2+y^2+6x-2y+5=0$ 相切的直線。



2. 試求通過點 $P(4, -1)$ 且與圓 $C: (x-1)^2 + (y+5)^2 = 25$ 相切的直線方程式。

3. 試求通過點 $P(1, -5)$ 且與圓 $C: x^2 + y^2 + 4x - 2y - 4 = 0$ 相切的直線方程式。



1. (1) $x-y=-4\pm\sqrt{10}$ (2) $x+y=-2\pm\sqrt{10}$ 2. $3x+4y-8=0$

3. $3x+4y+17=0, x=1$



回家作業



4. 求圓 $x^2 + y^2 + 3x - y = 0$ 上以 $(-1, 2)$ 為切點的切線方程式。
5. 試求通過點 $(0, 0)$ 且與圓 $x^2 + y^2 - 6x - 2y + 9 = 0$ 相切的直線方程式，並求其切線段長。
6. 求過點 $(4, 4)$ 且與圓 $x^2 + y^2 - 2x + 4y - 4 = 0$ 相切的直線方程式，並求切點坐標。

簡答

4. $x + 3y - 5 = 0$ 5. 切線： $y = 0, 3x - 4y = 0$ ，切線段長 3
6. 切線： $3x - 4y + 4 = 0, x = 4$ ，切點： $(\frac{-4}{5}, \frac{2}{5}), (4, -2)$



回家作業



7. (96 數甲試題)

在坐標平面上，一圓通過點 $(-2, 7)$ ，且與直線 $4x + 3y - 14 = 0$ 相切

於點 $(-1, 6)$ ，若此圓的方程式為 $x^2 + y^2 + ax + by + c = 0$ ，則

$a =$ _____， $b =$ _____， $c =$ _____。



7. $a = 10$, $b = -6$, $c = 9$

數位 延伸閱讀



1. (能力指標：切點弦直線)

自圓外一點 $P(x_0, y_0)$ 作圓 $C: x^2 + y^2 + dx + ey + f = 0$

之二切線，設切點為 A, B ，試證 $\overleftrightarrow{AB}$ 的方程式為

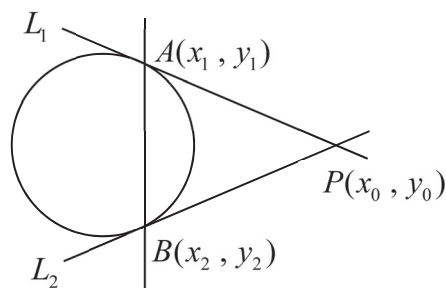
$$x_0x + y_0y + d \cdot \frac{x+x_0}{2} + e \cdot \frac{y+y_0}{2} + f = 0。$$

解：如圖，設 $A(x_1, y_1), B(x_2, y_2)$

令 L_1, L_2 為以 A, B 為切點之切線，則

$$L_1: x_1x + y_1y + d \cdot \frac{x+x_1}{2} + e \cdot \frac{y+y_1}{2} + f = 0$$

$$L_2: x_2x + y_2y + d \cdot \frac{x+x_2}{2} + e \cdot \frac{y+y_2}{2} + f = 0$$



$$P(x_0, y_0) \in L_1 \Rightarrow x_1x_0 + y_1y_0 + d \cdot \frac{x_0+x_1}{2} + e \cdot \frac{y_0+y_1}{2} + f = 0 \dots\dots\dots ①$$

$$P(x_0, y_0) \in L_2 \Rightarrow x_2x_0 + y_2y_0 + d \cdot \frac{x_0+x_2}{2} + e \cdot \frac{y_0+y_2}{2} + f = 0 \dots\dots\dots ②$$

$$\text{由①知 } A(x_1, y_1) \in L: xx_0 + yy_0 + d \cdot \frac{x_0+x}{2} + e \cdot \frac{y_0+y}{2} + f = 0$$

$$\text{由②知 } B(x_2, y_2) \in L: xx_0 + yy_0 + d \cdot \frac{x_0+x}{2} + e \cdot \frac{y_0+y}{2} + f = 0$$

$\therefore A, B \in L \Rightarrow \overleftrightarrow{AB}$ 和 L 表同一直線

$$\text{故 } \overleftrightarrow{AB}: x_0x + y_0y + d \cdot \frac{x+x_0}{2} + e \cdot \frac{y+y_0}{2} + f = 0$$



2. (能力指標：切點弦直線)

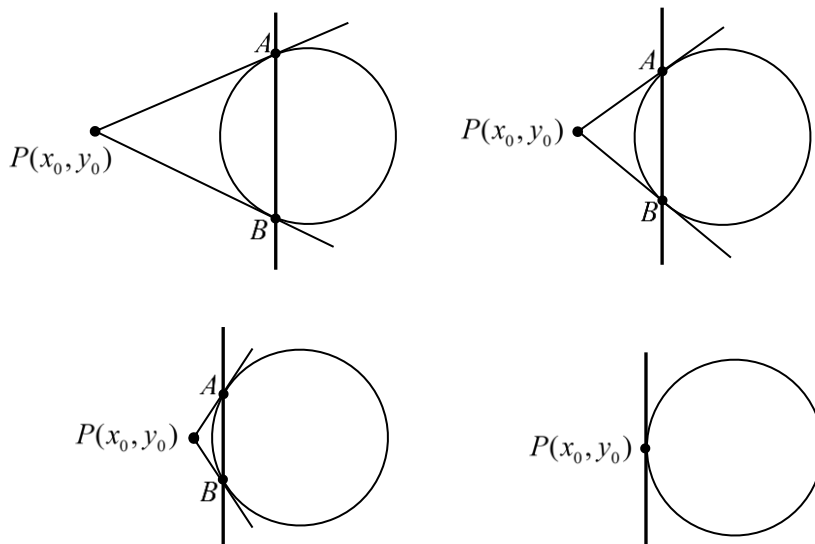
xy 平面上，直線 $3x - 5y + 9 = 0$ 與圓 $x^2 + y^2 + 4x - 6y + 1 = 0$ 交於 A, B 兩點，過 A, B 兩點各作圓的切線，求此二切線的交點坐標？

解：



【說明】切點弦與切線的極限觀點 [自行參考]

若圓外一點 $P(x_0, y_0)$ 逐漸往圓 $C: x^2 + y^2 + dx + ey + f = 0$ 逼近，則切點弦逐漸往圓外移動。當 P 貼近在圓 C 上時，此時切點弦公式所得之直線即為切 $P(x_0, y_0)$ 的切線。



2. 圓系假設法

(1) 過圓與直線交點的圓假設法：[非學測必備技巧 請自行參考]

通過圓 C 與直線 L 交點的圓可假設為 $C + kL = 0$ 。

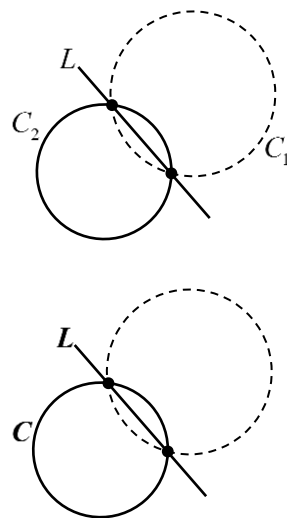
【說明】

想像有兩個圓 C_1, C_2 相交於兩點，且兩圓根軸為 L ，
即 $C_1 - C_2 = kL$ ，可推得 $C_1 = C_2 + kL$ 。

【說例】

過圓 $C: x^2 + y^2 = 4$ 與直線 $L: x + y = 1$ 交點的圓

可假設為 $(x^2 + y^2 - 4) + k(x + y - 1) = 0$ 。

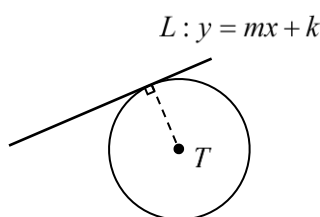


主題 16 圓的切線



1. 圓與切線的題型與處理

(1) 已知圓的切線 L 之斜率為 m :



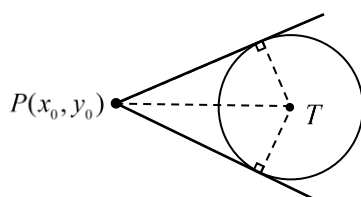
◎ 條件範例：已知圓 $C: (x-1)^2 + (y-2)^2 = 25$ 的切線斜率為 3。

◎ 解法步驟：Step 1 可設 $L: y = 3x + k$ ，即 $L: 3x - y + k = 0$ 。

Step 2 由於相切，再利用 $d = r$ ，即 $\frac{|3(1) - (2) + k|}{\sqrt{3^2 + (-1)^2}} = 5$ 求出 k 。

◎ 重要觀念：同一斜率的切線必有兩條。

(2) 已知切線過圓外一點 $P(x_0, y_0)$:



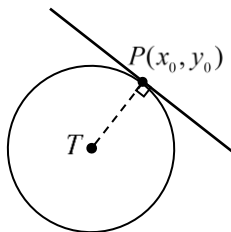
◎ 條件範例：已知圓 $C: (x-1)^2 + (y-2)^2 = 25$ 外有一點為 $P(-3, -4)$ 。

◎ 解法步驟：Step 1 可設 $L: y + 4 = m(x + 3)$ ，即 $L: mx - y + 3m - 4 = 0$ 。

Step 2 由於相切，再利用 $d = r$ ，即 $\frac{|m(1) - (2) + 3m - 4|}{\sqrt{m^2 + (-1)^2}} = 5$ 求出 m 。

◎ 重要觀念：由圓外一點作切線必有 2 條，故通常 m 有兩解；若 m 僅有一解，表示另一條切線必為鉛直線。

(3) 已知切線過圓上一點 $P(x_0, y_0)$:



◎ 條件範例：已知圓 $C: (x-1)^2 + (y-1)^2 = 25$ 上有一點為 $P(4,5)$ 。

◎ 解法步驟：【法一】切線假設法

Step 1 可設 $L: y-5 = m(x-4)$ ，即 $L: mx - y - 4m + 5 = 0$ 。

Step 2 由於相切，再利用 $d = r$ 求出 m 。

【法二】圓上一點切線公式 (一般式平分法則)

Step 1 將圓化為一般式 $C: x^2 + y^2 - 2x - 2y - 23 = 0$ 。

Step 2 切線為

【法三】圓上一點切線公式 (心徑式平分法則)

Step 1 心徑式 $C: (x-1)^2 + (y-1)^2 = 25$ 。

Step 2 切線為

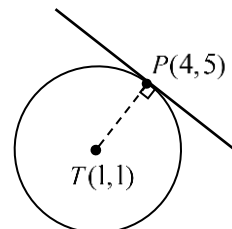
【法四】利用法線求切線

Step 1 法線斜率為_____，

故切線斜率為_____。

Step 2 又切線過 $P(4,5)$ ，

方程式為



主題 20 圓作圖



《 《 < < < 《 《 《 《 《 < < < < 《 《 < <

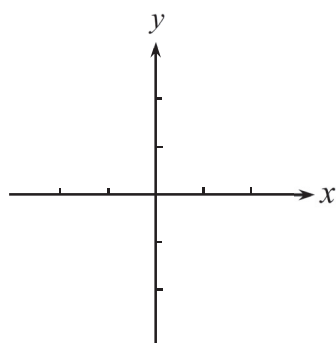
例 1. (能力指標：半圓作圖)

(1) $y = \sqrt{4 - x^2}$ 作圖

(2) $x = 1 - \sqrt{-y^2 + 4y + 5}$ 作圖

解： (1) $y = \sqrt{4 - x^2}$

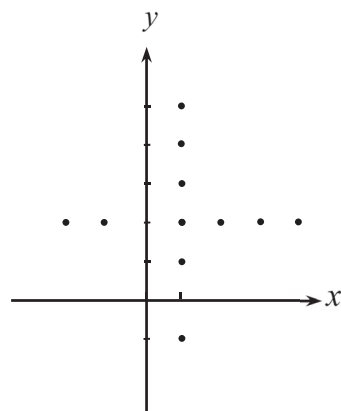
考慮 {



(2) $x - 1 = -\sqrt{-y^2 + 4y + 5}$

考慮 {
$$\begin{cases} x - 1 \leq 0 \\ -y^2 + 4y + 5 \geq 0 \\ (x - 1)^2 = -y^2 + 4y + 5 \end{cases}$$

$\Rightarrow$ {



例 2. (能力指標：不等式作圖)

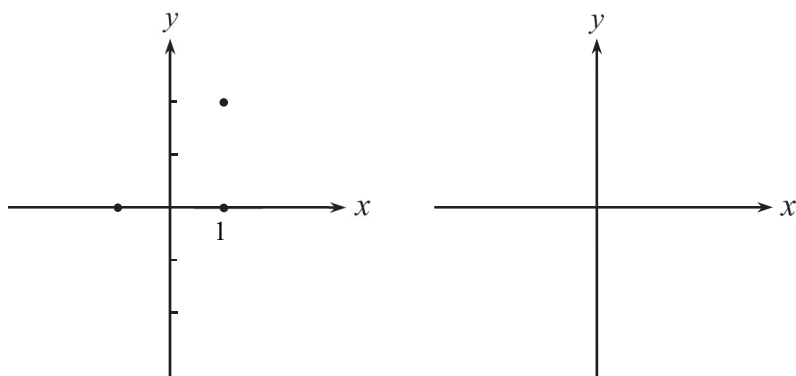
(1) $x^2 + y^2 - 2x - 3 \leq 0$

(2) 聯立不等式 $\begin{cases} x^2 + y^2 - 2x - 1 \geq 0 \\ x^2 + y^2 - 4x - 4y - 8 \leq 0 \end{cases}$ 作圖



解：(1) $x^2 + y^2 - 2x - 3 \leq 0 \Rightarrow (x-1)^2 + y^2 \leq 4$ (圓及其內部)

(2) $\begin{cases} (x-1)^2 + y^2 \geq 2 \\ (x-2)^2 + (y-2)^2 \leq 16 \end{cases}$

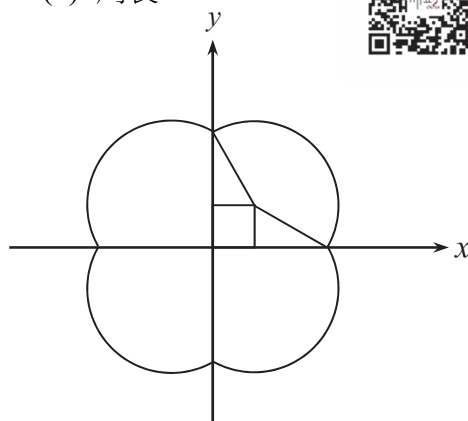


例 3. (能力指標：對稱作圖)

$(|x|-1)^2 + (|y|-1)^2 = 4$ ，求 (1) 面積 (2) 周長

解： 對稱 $x=0, y=0$

$$\text{先繪} \begin{cases} x \geq 0 \\ y \geq 0 \\ (x-1)^2 + (y-1)^2 = 4 \end{cases}$$



(1) 面積 = 4 (第一象限所圍面積)

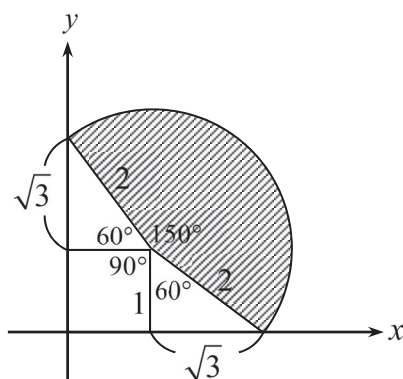
$$= 4 \left(\text{square} + 2 \cdot \text{triangle} + \text{sector} \right)$$

$$= 4 \left(1 + \sqrt{3} + 4\pi \cdot \frac{150^\circ}{360^\circ} \right)$$

$$= 4 \left(1 + \sqrt{3} + \frac{5}{3}\pi \right)$$

(2) 周長 = 4 (第一象限弧長)

$$= 4 \cdot 4\pi \cdot \frac{150^\circ}{360^\circ} = \frac{20}{3}\pi$$



例 4. (能力指標：連乘不等式)

作圖 $(x^2 + y^2 - 1)(x^2 + y^2 - 4)(x^2 + y^2 - 9) \leq 0$ ，並求所圍成區域面積。

解：



例 5. (能力指標：斜率規劃)

$y = \sqrt{4 - x^2}$ ，求 $\frac{y+2}{x-5}$ 的最大值與最小值。

解：



例 6. (能力指標：直線與圓相交)

已知圓 $C: (x-6)^2 + (y-4)^2 = 4$ 及點 $A(-4, 6)$ 。今自 A 發射出一束光線，到達 x 軸上的一點 P ，經 x 軸反射後會與圓 C 相交，求所有的可能的 P 點所在範圍之長度 = _____。





回家作業



1. 試作函數 $f(x) = \sqrt{1-x^2}$ 的圖形。



2. 試在坐標平面上，畫出下列圖形：

(1) 不等式 $x^2 + y^2 - 2x + 4y - 4 \leq 0$

(2) 聯立不等式
$$\begin{cases} x^2 + y^2 - 2x - 1 \geq 0 \\ x^2 + y^2 - 4x - 4y - 8 \leq 0 \end{cases}$$



1. 見詳解

2. 見詳解

主題

21

直線與圓綜合題型



例 1. (能力指標：直線系)

坐標平面上，對於任意實數 k ，直線

$$L: (2+3k)x + (1-2k)y + (6k-10) = 0$$

不可能經過下列各選項中的哪些點？

- (1) (1, 5) (2) (2, 6) (3) (3, 9)
(4) (-2, 0) (5) (6, 12)

解：

USHD



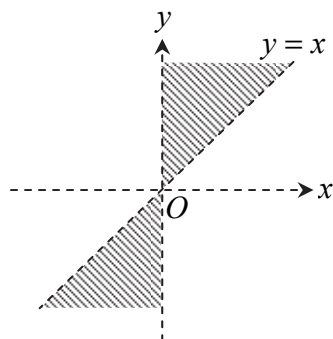
例 2. (能力指標：不等式)

在下列二元不等式中，何者之解集合的圖形與右圖相同？

- (1) $y > x$ (2) $\frac{y}{x} > 1$
(3) $\frac{x}{y} > 1$ (4) $y(x-y) > 0$
(5) $x(x-y) < 0$

解：

PQWC



例 3. (能力指標：不等式)

在直角坐標平面上，不等式 $(|x| + 2|y| - 1)(3|x| + |y| - 1) \leq 0$ 圖形的面積為 _____。

解：



例 4. (105 學測試題)

設 a 為一實數，已知在第一象限滿足聯立不等式 $\begin{cases} x - 3y \leq a \\ x + 2y \leq 14 \end{cases}$ 的

所有點所形成之區域面積為 $\frac{213}{5}$ 平方單位，則 $a =$ _____。

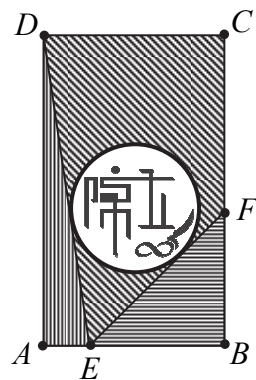
解：



例 5. (能力指標：坐標法)

小魚利用半徑 $\sqrt{2}$ 的圓形標誌來設計右圖的長方形徽章 $ABCD$ ，徽章的左右寬度為 4，即 $\overline{AB} = \overline{CD} = 4$ ，圓形標誌的圓心與左右兩側等距離，且與下方的 $\overline{AB}$ 距離為 3，已知 $\overline{AE} = 1$ 且 $\overline{DE}$ 與 $\overline{EF}$ 皆與圓相切，試求 $\overline{CF} = \underline{\hspace{2cm}}$ 。

解：



例 6. (103 數甲試題)

在坐標平面上，圓 $x^2 + y^2 + 2x - 2y + 1 = 0$ 與 $y = |2x + 1|$ 的圖形有幾個交點？

- (1) 1 個 (2) 2 個 (3) 3 個 (4) 4 個 (5) 0 個

解：

例 7. (106 學測試題)

設 Γ 為坐標平面上的圓，點 $(0, 0)$ 在 Γ 的外部且點 $(2, 6)$ 在 Γ 的內部。請選出正確的選項。



- (1) Γ 的圓心不可能在第二象限
- (2) Γ 的圓心可能在第三象限且此時 Γ 的半徑必定大於 10
- (3) Γ 的圓心可能在第一象限且此時 Γ 的半徑必定小於 10
- (4) Γ 的圓心可能在 x 軸上且此時圓心的 x 坐標必定小於 10
- (5) Γ 的圓心可能在第四象限且此時 Γ 的半徑必定大於 10

解：

例 8. (97 學測試題)

設 $\Gamma: x^2 + y^2 - 10x + 9 = 0$ 為坐標平面上的圓。試問下列哪些選項是正確的？



- (1) Γ 的圓心坐標為 $(5, 0)$
- (2) Γ 上的點與直線 $L: 3x + 4y - 15 = 0$ 的最遠距離等於 4
- (3) 直線 $L_1: 3x + 4y + 15 = 0$ 與 Γ 相切
- (4) Γ 上恰有兩個點與直線 $L_2: 3x + 4y = 0$ 的距離等於 2
- (5) Γ 上恰有四個點與直線 $L_3: 3x + 4y - 5 = 0$ 的距離等於 2

解：

例 9. (104 數甲試題)

MGJT



坐標平面上有一以原點 O 為圓心的圓 C ，交直線 $x - y + 1 = 0$ 於 Q, R 兩點。已知圓 C 上有一點 P 使得 $\triangle PQR$ 為一正三角形。

請選出正確的選項。

- (1) O 點與 P 點皆在 $\overline{QR}$ 的中垂線上 (2) P 點在第三象限
- (3) $\overline{QR}$ 的中點坐標為 $(-\frac{1}{3}, \frac{2}{3})$ (4) 圓 C 的方程式為 $x^2 + y^2 = 2$
- (5) 直線 $x - y - 1 = 0$ 為圓 C 在 P 點的切線

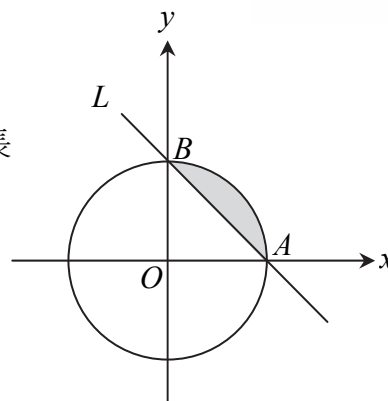
解：

例 10. (能力指標：直線與圓的關係)



已知圓 $C: x^2 + y^2 = 4$ 與直線 $L: x + y = 2$ 所圍的弓形，如下圖中的斜線區域(含邊界)， A, B 兩點為圓 C 與直線 L 的交點，則下列哪些選項正確？

- (1) 除 L 外，恰有一條直線與圓 C 所截的弦長等於 $\overline{AB}$ 長
- (2) 圓 C 上恰有一個點與 L 距離為 $2 - \sqrt{2}$
- (3) 不等式 $(x^2 + y^2 - 4)(x + y - 2) \leq 0$ 的解為圖中的弓形區域
- (4) 弓形區域的邊界上恰有 2 個點滿足 $\overline{PA} = 2\overline{PB}$
- (5) 弓形區域的邊界上恰有 3 個點到點 $(3, 4)$ 的距離為整數



解：

例 11. (能力指標：切線)

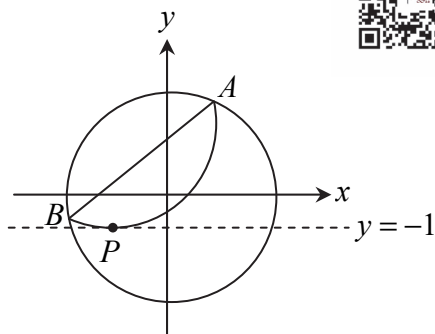
平面上有一光源 $P(7, 12)$ 向圓 $(x - 2)^2 + (y - 7)^2 = 1$ 照射，求其投影在 x 軸上所成圖形的長度 = _____。



解：

例 12. (能力指標：對稱)

如圖，將圓 $x^2 + y^2 = 9$ 上的劣弧 AB 沿著弦 $\overline{AB}$ 對摺，此對摺後的弧與 $y = -1$ 相切於點 $P(-2, -1)$ ，若弧 APB 所在的圓方程式為 $(x - h)^2 + (y - k)^2 = a$ ，則數對 $(h, k, a) =$ _____。



解：

例 13. (能力指標：半圓)

已知 x, y 滿足 $y-4 = \sqrt{4-(x-3)^2}$ ，若 $\frac{y-1}{x+1} = k$ ，

則 k 的範圍為 _____。

解：



例 14. (能力指標：斜率)

坐標平面上有 $A(2, 0)$ 、 $B(-4, 2)$ 兩定點且知 C 點為直線 $y = 3x + 3$ 上的一點。若 $\triangle ABC$ 為直角三角形，則可能的 C 點有幾個？

(A) 1 (B) 2 (C) 3 (D) 4 (E) 條件不足，無法判斷

解：



直線與圓綜合題型解析

1.【答】：(4)(5)

【解】：L 整理： $(2x + y - 10) + k(3x - 2y + 6) = 0$

(1) 錯誤 $(1, 5) \xrightarrow{\text{代入}} (-3) + k(-1) = 0 \Rightarrow k = -3$ 有解

(2) 錯誤 $(2, 6) \xrightarrow{\text{代入}} 0 + k(0) = 0 \Rightarrow k \in \mathbb{R}$ 有解

(3) 錯誤 $(3, 9) \xrightarrow{\text{代入}} 5 + k(-3) = 0 \Rightarrow k = -\frac{5}{3}$ 有解

(4) 正確 $(-2, 0) \xrightarrow{\text{代入}} (-14) + k(0) = 0 \Rightarrow k$ 無解

(5) 正確 $(6, 12) \xrightarrow{\text{代入}} 14 + k(0) = 0 \Rightarrow k$ 無解

故選 (4)(5)

2.【答】：(2)(5)

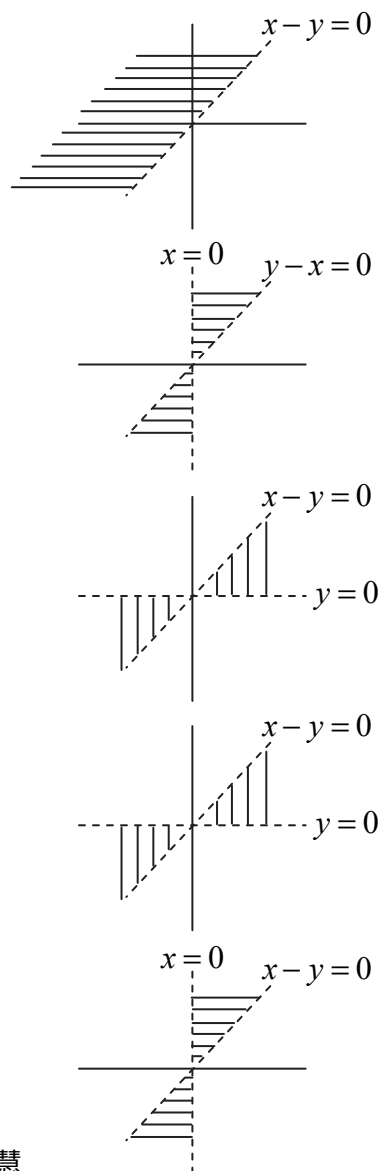
【解】：(1) 錯誤 $x - y < 0$

(2) 正確 $\frac{y-x}{x} > 0 \Rightarrow x(y-x) > 0$

(3) 錯誤 $\frac{x}{y} - 1 > 0 \Rightarrow \frac{x-y}{y} > 0$
 $\Rightarrow y(x-y) > 0$

(4) 錯誤 $y(x-y) > 0$

(5) 正確 $x(x-y) < 0$



3.【答】： $\frac{11}{15}$

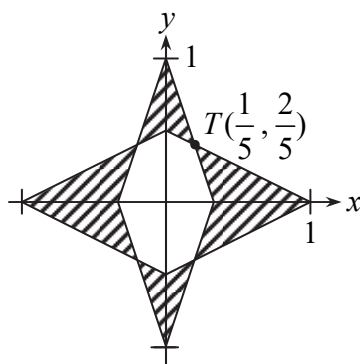
【解】：1° 先作等號圖形

$$|x|+2|y|=1 \text{ 或 } 3|x|+|y|=1$$

2° 再取滿足不等式的範圍(斜線部分)

$$3^\circ \begin{cases} x+2y=1 \\ 3x+y=1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x+2y=1 \\ 6x+2y=2 \end{cases}$$

$$\Rightarrow T: \begin{cases} x=\frac{1}{5} \\ y=\frac{2}{5} \end{cases}$$



$$\begin{aligned} 4^\circ \text{面積} &= 4[(1-\frac{1}{3}) \times \frac{2}{5} \times \frac{1}{2} + (1-\frac{1}{2}) \times \frac{1}{5}] \\ &= 4[\frac{2}{3} \times \frac{2}{5} \times \frac{1}{2} + \frac{1}{2} \times \frac{1}{5} \times \frac{1}{2}] \\ &= \frac{8}{15} + \frac{1}{5} = \frac{11}{15} \end{aligned}$$

4.【答】：6

【解】：1° $\begin{cases} x-3y=a \\ x+2y=14 \end{cases} \Rightarrow 5y=14-a \Rightarrow y=\frac{14-a}{5}$

$$\Rightarrow x=3y+a=\frac{42-3a}{5}+a=\frac{42+2a}{5}$$

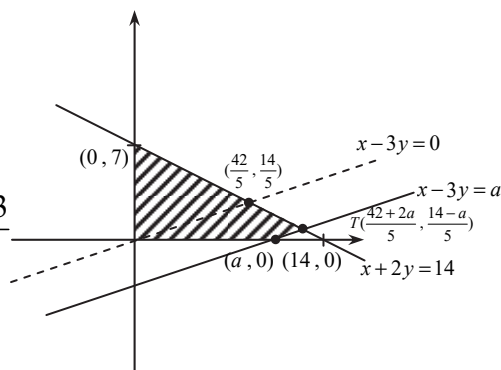
$$2^\circ \text{斜線面積} = \frac{14 \times 7}{2} - \frac{14-a}{2} \left(\frac{14-a}{5} \right) = \frac{213}{5}$$

$$\Rightarrow 49 - \frac{(14-a)^2}{10} = \frac{213}{5}$$

$$\Rightarrow 490 - (14-a)^2 = 426$$

$$\Rightarrow (14-a)^2 = 64 \Rightarrow 14-a=8 \text{ 或 } -8$$

$$\Rightarrow a=6 \text{ 或 } a=22 \text{ (不合)}$$



8.【答】：(1)(2)(4)

【解】：(1) 正確 圓： $(x-5)^2 + y^2 = 25 - 9 = 16$

圓心 $(5, 0)$

(2) 正確 最遠距 $= r = 4$

(3) 錯誤 $d = \frac{|15+15|}{\sqrt{9+16}} = \frac{30}{5} = 6$

不是切線

(4) 正確 $d = \frac{15}{\sqrt{9+16}} = \frac{15}{5} = 3$

圖上二點到 $3x+4y=0$ 距離為 2

(5) 錯誤 $d = \frac{|15-5|}{\sqrt{9+16}} = \frac{10}{5} = 2$

圖上有三點到 $3x+4y-5=0$ 距離為 2

9.【答】：(1)(4)

【解】：(1) 正確 $\overline{PQ} = \overline{PR} \Rightarrow P$ 在 $\overline{QR}$ 中垂線

$\overline{OQ} = \overline{OR} \Rightarrow O$ 在 $\overline{QR}$ 中垂線

(2) 錯誤 P 在第四象限

(3) 錯誤 $\overline{QR}$ 中點 $M(\frac{0-1}{2}, \frac{1+0}{2}) = (\frac{-1}{2}, \frac{1}{2})$

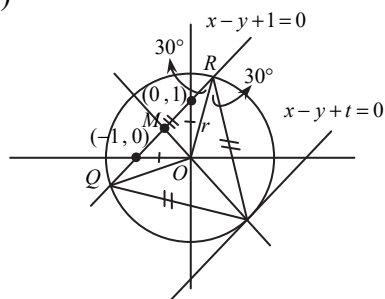
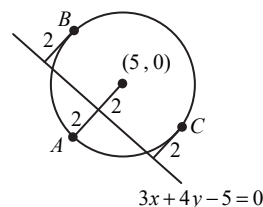
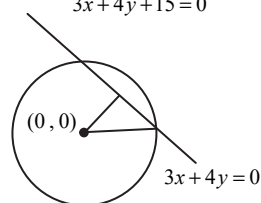
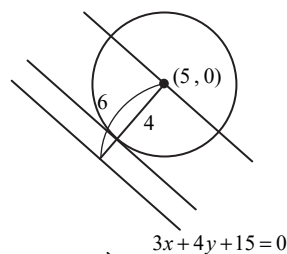
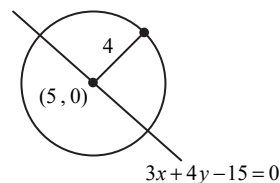
(4) 正確 $1^\circ r = 2\overline{OM} = 2\sqrt{\frac{1}{4} + \frac{1}{4}} = \sqrt{2}$

$$2^\circ x^2 + y^2 = 2$$

(5) 錯誤 令過切線 $x-y+t=0$

$$\Rightarrow r = \sqrt{2} = \frac{|t|}{\sqrt{1+1}} \Rightarrow |t| = 2 \Rightarrow t = -2 \text{ 或 } 2 \text{ (不合)}$$

$$\Rightarrow \text{過 } P \text{ 切線 } x-y-2=0$$



10.【答】：(4)(5)

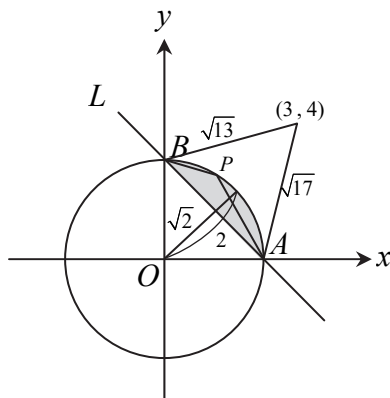
【解】：(1) 錯誤 無限多條

(2) 錯誤 有 2 點

(3) 錯誤 $(x^2 + y^2 - 4)(x + y - 2) \leq 0$

(4) 正確 $\overline{PA} = 2\overline{PB} \Rightarrow$ 邊界上有二個點 P

(5) 正確 到 $(3, 4)$ 距離為整數有 3 點



11.【答】：7

【解】：1° 令斜率 $\Rightarrow y - 12 = m(x - 17)$

$$\Rightarrow mx - y + 12 - 7m = 0$$

$$2^\circ \text{ 相切 } \therefore d = r \Rightarrow \frac{|2m - 7 + 12 - 7m|}{\sqrt{m^2 + 1}} = 1$$

$$\Rightarrow |5 - 5m| = \sqrt{m^2 + 1}$$

$$\Rightarrow 25 - 50m + 25m^2 = m^2 + 1$$

$$\Rightarrow 24m^2 - 50m + 24 = 0$$

$$\Rightarrow 12m^2 - 25m + 12 = 0$$

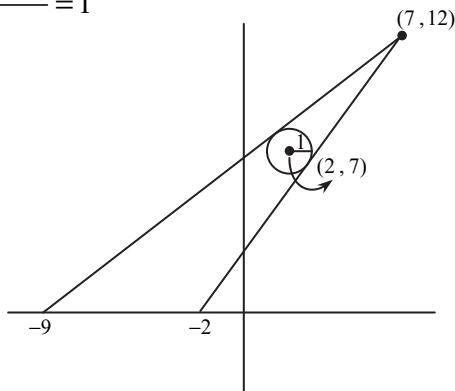
$$\Rightarrow (4m - 3)(3m - 4) = 0$$

$$\Rightarrow m = \frac{4}{3} \text{ 或 } m = \frac{3}{4}$$

$$3^\circ m = \frac{4}{3} \Rightarrow 4x - 3y + 8 = 0 \Rightarrow x = -2$$

$$m = \frac{3}{4} \Rightarrow 3x - 4y + 27 = 0 \Rightarrow x = -9$$

$$\text{長度} = |-2 - (-9)| = 7$$



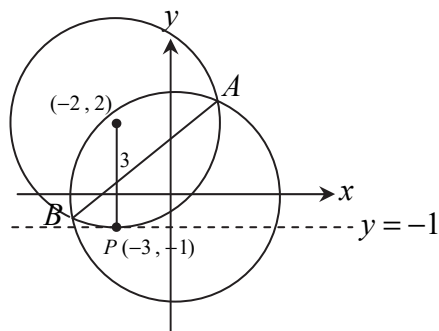
12.【答】：(-2, 2, 9)

【解】：1° 圓心 $(-2, 2)$ $r = 3$

$$\Rightarrow (x + 2)^2 + (y - 2)^2 = 9$$

$$\begin{matrix} -h & -k & a \end{matrix}$$

$$\Rightarrow (h, k, a) = (-2, 2, 9)$$



13.【答】： $\frac{1}{2} \leq k \leq \frac{6+\sqrt{21}}{6}$

【解】：1° $y-4 = \sqrt{4-(x-3)^2}$

$$\Rightarrow \begin{cases} y-4 \geq 0 \\ 4-(x-3)^2 \geq 0 \\ (x-3)^2 + (y-4)^2 = 4 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} y \geq 4 \\ 1 \leq x \leq 5 \\ (x-3)^2 + (y-4)^2 = 4 \end{cases}$$

2° $\frac{y-1}{x+1} = k \Rightarrow k$ 是 (x, y) $(-1, 1)$ 之斜率

3° 取 $(-1, 1)(5, 4) \Rightarrow k$ 最小值 $= \frac{4-1}{5+1} = \frac{1}{2}$

4° 切線 $y-1 = m(x+1) \Rightarrow mx - y + m + 1 = 0$

$\Rightarrow$ 相切 $\therefore d = r \Rightarrow \frac{|3m-4+m+1|}{\sqrt{m^2+1}} = 2$

$\Rightarrow (4m-3)^2 = 4m^2 + 4$

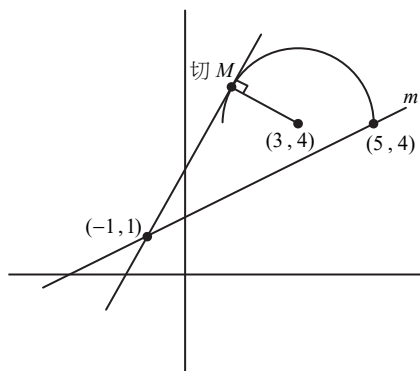
$\Rightarrow 16m^2 - 24m + 9 = 4m^2 + 4$

$\Rightarrow 12m^2 - 24m + 5 = 0$

$$\Rightarrow m = \frac{24 \pm \sqrt{24^2 - 240}}{24} = \frac{12 \pm \sqrt{84}}{12} = \frac{6 \pm \sqrt{21}}{6}$$

$\Rightarrow k$ 最大值 $\frac{6+\sqrt{21}}{6}$

$\Rightarrow \frac{1}{2} \leq k \leq \frac{6+\sqrt{21}}{6}$



14.【答】：(B)

【解】：1° 令 $C(t, 3t+3)$

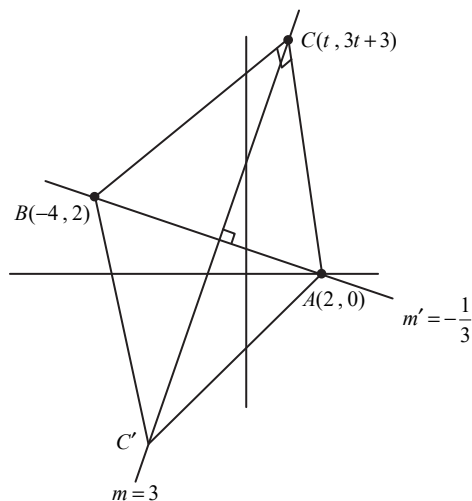
$\Rightarrow \frac{3t+1}{t+4} \times \frac{3t+3}{t-2} = -1$

$\Rightarrow 9t^2 + 12t + 3 = -t^2 - 2t + 8$

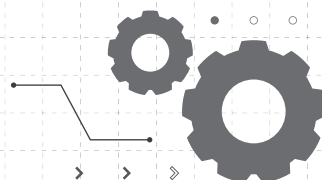
$\Rightarrow 10t^2 + 14t - 5 = 0$

$\Rightarrow t$ 有二解

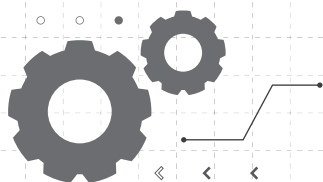
故選 (B)



心得欄



心得欄





(一) 人工智慧分類器的數學

人工智慧一項重要的能力，在於使電腦學習將數據自行分類、找到規則。例如，訓練人工智慧系統判別：一張動物的相片中，動物是貓還是狗。



判別系統必須先處理過大量的資訊，學習如何將貓、狗的特徵數據化，再找到這些數據的分類標準。

假設系統先取兩個特徵數據化 (Eigenvalues)，分別為 x 、 y ，並將這些數據繪於平面座標。座標上有兩點 A(4,3)、B(9,7)，A 代表一張相片狗的特徵、B 代表另一張相片貓的特徵。我們根據這兩點的單一數據，建造一個簡單的人工智慧模型。

(1) 請找出 A、B 兩點的中垂線方程式，作為分類兩點的「分類線」。

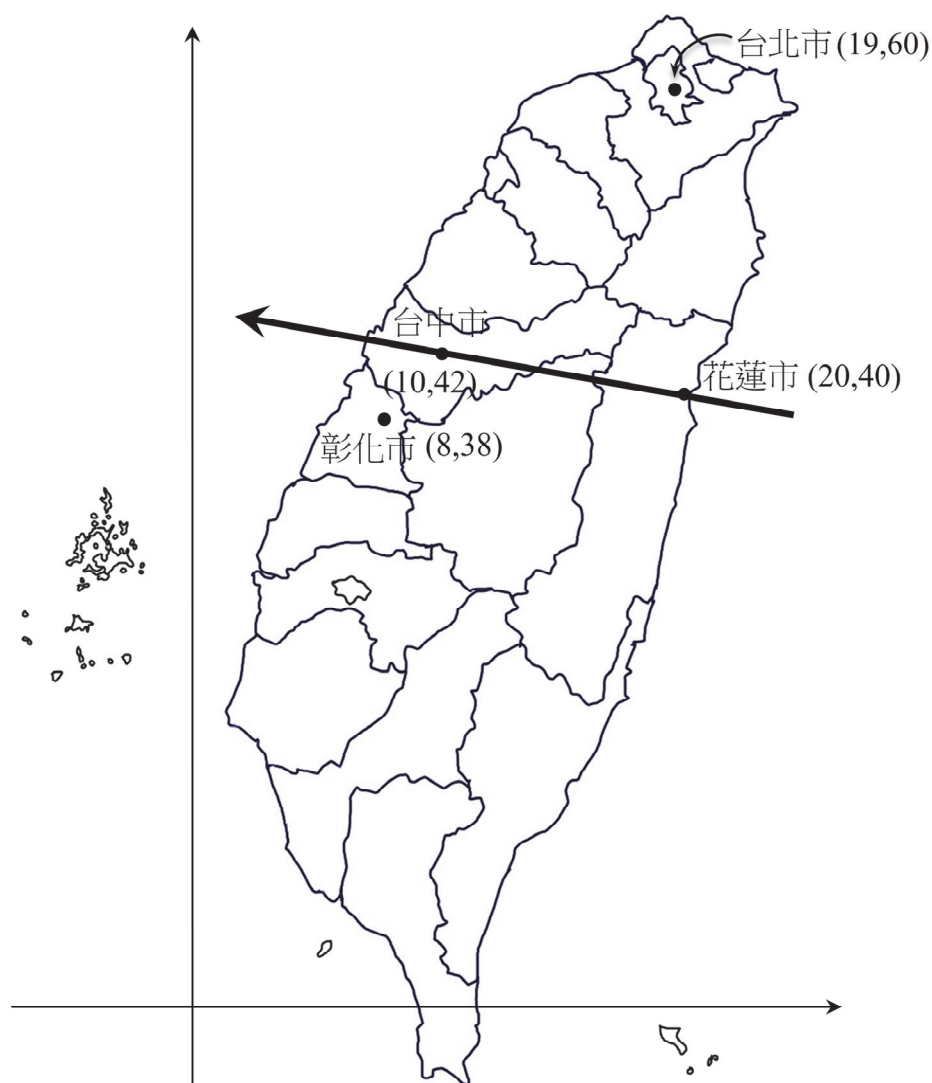
(2) 承(1)，根據此「分類線」，若有張相片的特徵為 C(9,2)，應將其歸類為貓，還是歸類為狗？

(3) 承(2)，若依照此分類，發現 C 點的歸類錯誤，我們將 C 點到「分類線」的距離加入一個「損失函數」 (Loss function) 中。損失函數用於衡量分類的出錯率。請問：C 點到「分類線」的距離是多少？

(二) 颱風的數學



我們稱一個颱風從東部地區登陸穿越了台灣的中央山脈之後，從西半部出海，為穿心颱風，根據氣象局這 6 年的資料，像 2014 年 7 月麥德姆(MATMO)，2015 年 8 月的蘇迪勒(SOUDELOR)，2016 年 9 月的梅姬(MEGI)，雖然強度為中度颱風，但是仍然造成很多的損失及傷害。如下圖，假設一颱風路徑為直線前進(黑線為颱風眼的路徑)，且通過花蓮市與台中市，以圖示的點做標準，且暴風半徑在圖上的大小為 10 單位，前進速度為 3 單位/小時，試問以下題目。



(1) 從颱風中心登陸花蓮市開始到台中市為止，試問要多少時間？

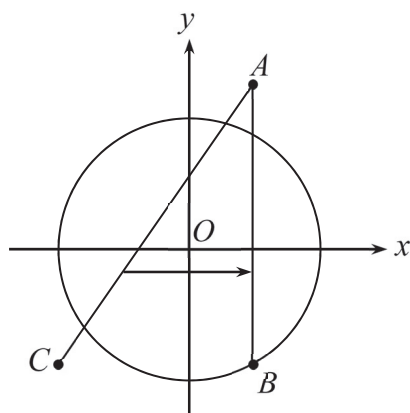
(四捨五入到小數第一位)

(2) 依題意，台北跟彰化跟颱風眼的最小距離是多少？(四捨五入到小數第一位)

(3) 由(2)，台北跟彰化會有進入暴風圈的可能嗎？

(三) 徽章的數學

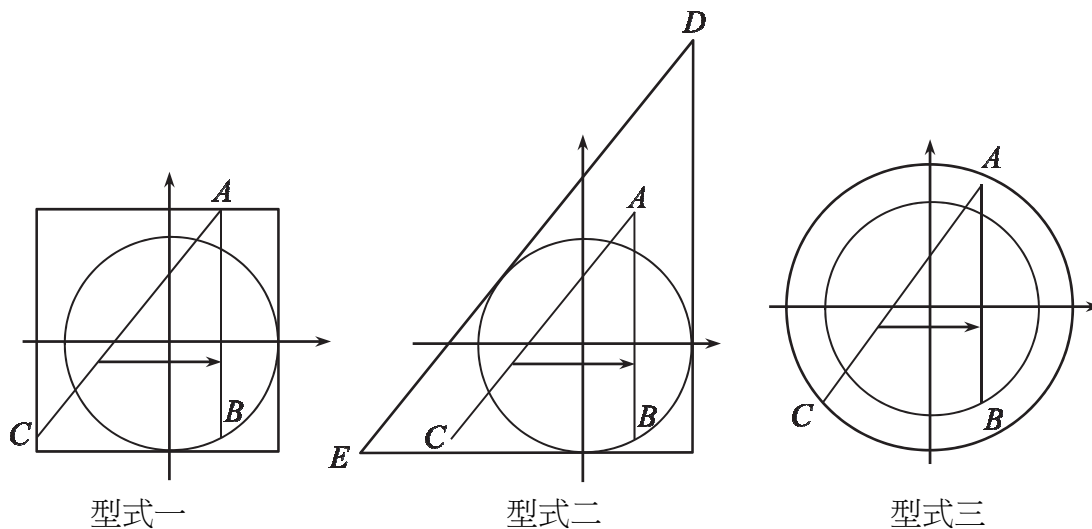
復仇者聯盟 4 上映後大受好評，票房不斷刷新記錄，小明是漫威系列的鐵粉，某天決定自行製作復仇者聯盟的徽章，於是將網路上找到的 logo 圖形放在坐標平面上，使圓心為原點， $\overline{AB}$ 垂直 x 軸，如下圖，已知 $A(5, 16)$ ，圓半徑為 13， $\triangle ABC$ 為直角 $\triangle$ 且 A 點到 x 軸與 C 點到 y 軸等距



(1) 直線 AC 的方程式為何？

(2) 圓心 O 到 $\overleftrightarrow{AC}$ 的距離 $d = ?$

(3) 現在小明要製作放徽章的最小鐵盒，他考慮的三種可能型式



型式一：矩形鐵盒，其中兩邊與圓相切，點 A, C 在另外兩邊上

型式二：直角三角形鐵盒，三邊均與圓相切，且 $\overline{DE} \parallel \overline{AC}$

型式三：圓形鐵盒，鐵盒圓心與徽章的圓心相同

則三種型式鐵盒的面積由小到大排列依序為？

附錄 1 二圓的關係



【觀念】兩圓的關係

設圓 C_1 之圓心為 O_1 ，半徑為 r_1 ；圓 C_2 之圓心為 O_2 ，半徑為 r_2 ；且 $\overline{O_1O_2} = d$

	圖 形	關 係
外 離		$d > r_1 + r_2$
外 切		$d = r_1 + r_2$
相 交 兩 點		$ r_1 - r_2 < d < r_1 + r_2$
內 切		$d = r_1 - r_2 $
內 離		$0 < d < r_1 - r_2 $

同心 內離 內切 相交 外切 外離

$\overline{O_1O_2} = 0$ $\overline{O_1O_2} = |r_1 - r_2|$ $\overline{O_1O_2} = r_1 + r_2$

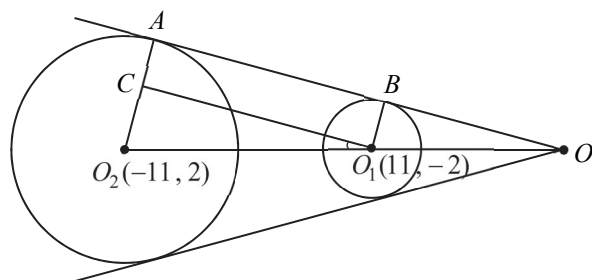
例 1. (能力指標：兩圓外公切線)

二圓 $C_1 : x^2 + y^2 - 22x + 4y + 100 = 0$,

$C_2 : x^2 + y^2 + 22x - 4y - 100 = 0$ ，求

- (1) 二圓的外公切線段長度？
- (2) 二圓的外公切線的交點坐標？
- (3) 二圓外公切線的方程式？

解：



例 2. (能力指標：二圓內公切線)

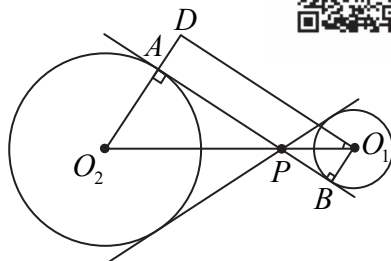
CNLD



二圓 $C_1: x^2 + y^2 - 22x + 4y + 100 = 0$,

$C_2: x^2 + y^2 + 22x - 4y - 100 = 0$, 求

- (1) 二圓的內公切線段長度？
- (2) 二圓的內公切線的交點坐標？
- (3) 二圓內公切線的方程式？



解：

$$C_1: x^2 + y^2 - 22x + 4y + 100 = 0 \Rightarrow \text{圓心 } O_1(11, -2), r_1 = 5$$

$$C_2: x^2 + y^2 + 22x - 4y - 100 = 0 \Rightarrow \text{圓心 } O_2(-11, 2), r_2 = 15$$

$$\overline{O_1O_2} = 10\sqrt{5} > r_1 + r_2 = 20 \Rightarrow \text{兩圓外離，如上圖所示}$$

$$\overline{DO_2} = r_1 + r_2 = 20, \frac{\overline{PO_1}}{\overline{PO_2}} = \frac{\overline{BO_1}}{\overline{AO_2}} = \frac{r_1}{r_2} = \frac{1}{3}$$

$$(1) \text{ 內公切線長 } \overline{AB} = \overline{DO_1} = \sqrt{(10\sqrt{5})^2 - 20^2} = 10$$

$$(2) \text{ 由內分點公式得點 } P \text{ 之坐標為 } \left(\frac{3 \cdot 11 + 1 \cdot (-11)}{3+1}, \frac{3 \cdot (-2) + 1 \cdot 2}{3+1} \right) \\ = \left(\frac{11}{2}, -1 \right)$$

$$(3) \text{ 設內公切線為 } y+1 = m\left(x - \frac{11}{2}\right) \Rightarrow 2mx - 2y - 2 - 11m = 0$$

$$\text{切圓 } C_1 \Rightarrow \frac{|11m+2|}{\sqrt{4m^2+4}} = 5 \Rightarrow 21m^2 + 44m - 96 = 0 \Rightarrow m = \frac{4}{3} \text{ 或 } -\frac{24}{7}$$

$$\text{故內公切線為 } y+1 = \frac{4}{3}\left(x - \frac{11}{2}\right) \text{ 或 } y+1 = -\frac{24}{7}\left(x - \frac{11}{2}\right)$$

公式 1 距離公式

$$(1) A(x_1), B(x_2) \Rightarrow d(A, B) = |x_1 - x_2|$$

$$(2) A(x_1, y_1), B(x_2, y_2) \Rightarrow d(A, B) = \sqrt{(x_1 - x_2)^2 + (y_1 - y_2)^2}$$

公式 2 分點公式

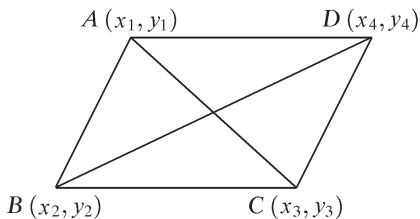
$$(1) \quad \begin{array}{c} \text{A} \quad \text{P} \quad \text{B} \\ \text{---} \text{---} \text{---} \\ x_1 \quad x \quad x_2 \end{array} \Rightarrow P = \frac{mB + nA}{m + n}$$

$$(2) \quad \begin{array}{c} A \qquad \qquad B \qquad \qquad P \\ \bullet \qquad \qquad \bullet \qquad \qquad \bullet \\ x_1 \qquad \qquad x_2 \qquad \qquad x \end{array} \Rightarrow \boxed{P = \frac{mB - nA}{m - n}}$$

$$(3) \quad \begin{array}{c} A \qquad \qquad M \qquad \qquad B \\ x_1 \qquad \qquad x \qquad \qquad x_2 \end{array} \Rightarrow \boxed{M = \frac{A+B}{2}}$$

公式 3 平行四邊形

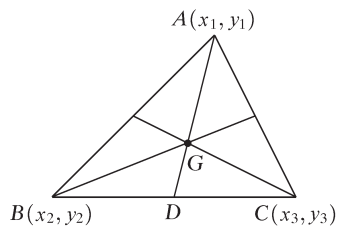
$$\begin{cases} x_1 + x_3 = x_2 + x_4 \\ y_1 + y_3 = y_2 + y_4 \end{cases}$$



公式 4 重心公式

$$(1) \frac{\overline{AG}}{\overline{GD}} = \frac{2}{1}$$

$$(2) G \begin{cases} x = \frac{x_1 + x_2 + x_3}{3} \\ y = \frac{y_1 + y_2 + y_3}{3} \end{cases}$$

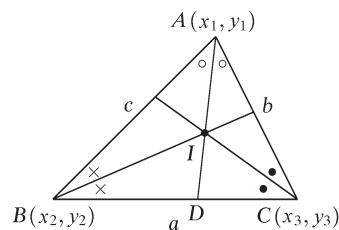


公式 5 內心公式

$$(1) \frac{\overline{AI}}{\overline{ID}} = \frac{b+c}{a}$$

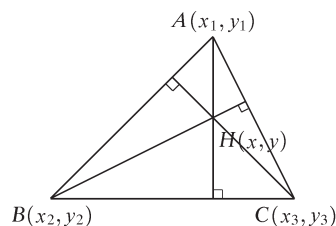
$$(2) \frac{\overline{BD}}{\overline{DC}} = \frac{c}{b}$$

$$(3) I \begin{cases} x = \frac{ax_1 + bx_2 + cx_3}{a+b+c} \\ y = \frac{ay_1 + by_2 + cy_3}{a+b+c} \end{cases}$$



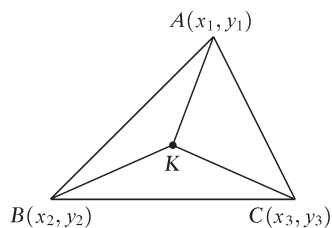
公式 6 垂心計算

$$\text{利用} \begin{cases} m_{\overline{AH}} \cdot m_{\overline{BC}} = -1 \\ m_{\overline{BH}} \cdot m_{\overline{AC}} = -1 \end{cases}$$



公式 7 外心計算

$$\text{利用} \begin{cases} \overline{KA}^2 = \overline{KB}^2 \\ \overline{KA}^2 = \overline{KC}^2 \end{cases}$$



公式 8 斜率

$$(1) \text{二點定斜率: } A(x_1, y_1), B(x_2, y_2) \Rightarrow m = \frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{y_1 - y_2}{x_1 - x_2} = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}$$

$$(2) \text{直線看斜率: } ax + by + c = 0 \Rightarrow m = -\frac{a}{b}$$

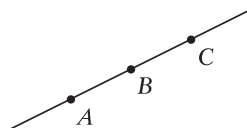
$$(3) L_1 \parallel L_2 \Rightarrow m_1 = m_2 \text{ (不含鉛直平行線)}$$

$$(4) L_1 \perp L_2 \Rightarrow m_1 m_2 = -1 \text{ (不含鉛直與水平線)}$$

公式 9 三點共線

$$(1) A(x_1, y_1), B(x_2, y_2), C(x_3, y_3) \text{ 三點共線}$$

$$(2) m_{AB} = m_{BC} = m_{CA}$$



公式 10 直線方程式

(1) 點斜式 $\Rightarrow y - y_0 = m(x - x_0)$

(2) 斜截式 (一次函數) $\Rightarrow y = mx + b$

(3) 截距式 $\Rightarrow \frac{x}{a} + \frac{y}{b} = 1$

(4) 二點式 (點斜式) $\Rightarrow y - y_1 = \left(\frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}\right)(x - x_1)$

(5) 一般式: $ax + by + c = 0$

(6) 平行式: 與 $ax + by + c = 0$ 平行 $\Rightarrow ax + by + k = 0$

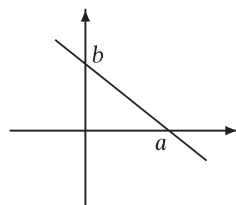
(7) 垂直式: 與 $ax + by + c = 0$ 垂直 $\Rightarrow bx - ay + k = 0$

公式 11 截距式的應用二軸所圍 Δ :

(1) 利用截距計算

(2) 周長 $= |a| + |b| + \sqrt{a^2 + b^2}$

(3) 面積 $= \frac{1}{2} |a| |b|$

**公式 12 二線關係**

$L_1: a_1x + b_1y + c_1 = 0, L_2: a_2x + b_2y + c_2 = 0$

(1) 若 $L_1 \perp L_2 \Rightarrow a_1a_2 + b_1b_2 = 0$

(2) 若 $L_1 // L_2$ 則 $\frac{a_1}{a_2} = \frac{b_1}{b_2} \neq \frac{c_1}{c_2}$

(3) 若 L_1 與 L_2 相交一點, 則 $\frac{a_1}{a_2} \neq \frac{b_1}{b_2}$

(4) 若 L_1 與 L_2 重合, 則 $\frac{a_1}{a_2} = \frac{b_1}{b_2} = \frac{c_1}{c_2}$

公式 13 直線平移與旋轉

$$(1) y = mx + 3 \Rightarrow \text{本直線} \begin{cases} m \text{ 可為任意數} \\ \text{恆過定點 } (0, 3) \end{cases} \Rightarrow \text{直線可旋轉}$$

$$(2) x + 3y + a = 0 \Rightarrow \text{本直線} \begin{cases} m = -\frac{1}{3} \\ a \text{ 為任意數} \end{cases} \Rightarrow \text{直線可平移}$$

公式 14 點到直線距離公式

$$(1) P(x_0, y_0), L: ax + by + c = 0 \Rightarrow d(P, L) = \frac{|ax_0 + by_0 + c|}{\sqrt{a^2 + b^2}}$$

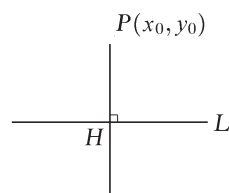
$$(2) L_1: ax + by + c_1 = 0, L_2: ax + by + c_2 = 0 \Rightarrow d(L_1, L_2) = \frac{|c_1 - c_2|}{\sqrt{a^2 + b^2}}$$

公式 15 垂足與對稱點

$$(1) P(x_0, y_0), L: ax + by + c = 0$$

$$(2) \text{垂足 } H: \begin{cases} x = x_0 - at \\ y = y_0 - bt \end{cases}, t = \frac{ax_0 + by_0 + c}{a^2 + b^2}$$

$$(3) \text{對稱點 } P': \begin{cases} x = x_0 - 2at \\ y = y_0 - 2bt \end{cases}, t = \frac{ax_0 + by_0 + c}{a^2 + b^2}$$

**公式 16 距離平方和最小值**

$$(1) \overline{PA}^2 + \overline{PB}^2 \text{ 最小時} \Rightarrow P = \frac{A+B}{2}$$

$$(2) \overline{PA}^2 + \overline{PB}^2 + \overline{PC}^2 \text{ 最小時} \Rightarrow P = \frac{A+B+C}{3}$$

$$(3) \overline{PA}^2 + \overline{PB}^2 + \overline{PC}^2 + \overline{PD}^2 \text{ 最小時} \Rightarrow P = \frac{A+B+C+D}{4}$$

公式 17 直線系

(1) 過 L_1 與 L_2 之交點所有直線可設為 $kL_1 + tL_2 = 0$

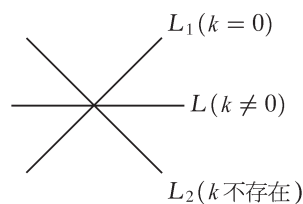
(2) 為了解題方便可設為 $L_1 + kL_2 = 0$

但這樣的假設有以下三種情形

① 若 $k = 0$ 表 $L_1 = 0$

② 若 $k \neq 0$ 表其他直線 (不含 L_1 與 L_2)

③ 若 k 不存在表 $L_2 = 0$



(3) 看到 $\forall m, k \in R, mL_1 + kL_2 = 0 \Rightarrow$ 此線恆過 L_1, L_2 交點

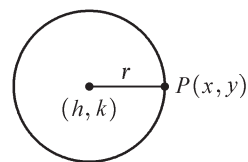
(4) 看到 $\forall k \in R, L_1 + kL_2 = 0 \Rightarrow$ 此線恆過 L_1, L_2 交點

公式 18 圓方程式

型 1 標準式

(1) 圓心 (h, k) , 半徑 r

(2) 方程式: $(x-h)^2 + (y-k)^2 = r^2$

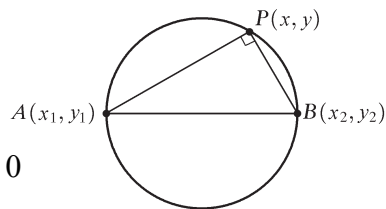


型 2 直徑式

(1) 直徑二端點 $A(x_1, y_1), B(x_2, y_2)$

(2) 方程式:

$$(x-x_1)(x-x_2) + (y-y_1)(y-y_2) = 0$$



型 3 一般式

(1) $x^2 + y^2 + dx + ey + f = 0$, 判別式 $\Delta = d^2 + e^2 - 4f$

(2) $\Delta > 0$ 表圓 (實圓), 圓心 $(-\frac{d}{2}, -\frac{e}{2})$, $r = \frac{\sqrt{\Delta}}{2}$

(3) $\Delta = 0$ 表點 (點圓), 點為 $(-\frac{d}{2}, -\frac{e}{2})$

(4) $\Delta < 0$ 表無圖形 (虛圓)

(6) $ax^2 + bxy + cy^2 + dx + ey + f = 0$

$$\text{表圓條件: } \begin{cases} a = c \neq 0 \\ b = 0 \\ d^2 + e^2 - 4af > 0 \end{cases}$$

公式 19 圓軌跡

型 1 $\overline{PA} = k\overline{PB}$

(1) $k=1, \overline{PA} = \overline{PB} \Rightarrow P$ 表 $\overline{AB}$ 的中垂線

(2) $k>0, k \neq 1, \overline{PA} = k\overline{PB} \Rightarrow$ 為阿波羅尼斯圓

型 2 $\overline{PA}^2 + \overline{PB}^2 + \overline{PC}^2 = \text{定值}, P$ 軌跡為圓

型 3 弦中點軌跡

(1) 圓心 $T(1,2)$

(2) 圓內一點 $A(-1,0)$

(3) 過 A 所有弦中點軌跡

為 $\overline{AT}$ 直徑圓

(4) 方程式 $(x+1)(x-1) + (y-0)(y-2) = 0$

型 4 軌跡求軌跡

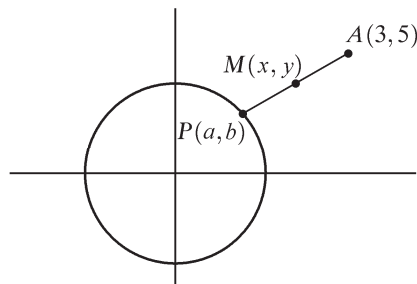
(1) P 在 $x^2 + y^2 = 1$ 上, 令 $P(a,b)$

(2) $\overline{AP}$ 中點為 M , 令 $M(x,y)$

$$(3) \begin{cases} x = \frac{a+3}{2} \\ y = \frac{b+5}{2} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a = 2x-3 \\ b = 2y-5 \end{cases}$$

(4) $\because a^2 + b^2 = 1$

$$\therefore (2x-3)^2 + (2y-5)^2 = 1 \Rightarrow (x-\frac{3}{2})^2 + (y-\frac{5}{2})^2 = \frac{1}{4}$$



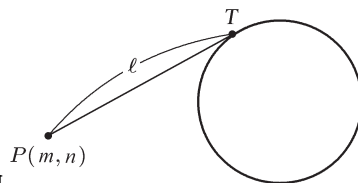
公式 20 點與圓的關係

(1) $f(x, y) = x^2 + y^2 + dx + ey + f$

$$\begin{cases} P(m, n) \text{ 在圓外} \Rightarrow f(m, n) > 0 \\ P(m, n) \text{ 在圓上} \Rightarrow f(m, n) = 0 \\ P(m, n) \text{ 在圓內} \Rightarrow f(m, n) < 0 \end{cases}$$

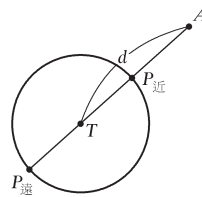
(2) 圓 $x^2 + y^2 + dx + ey + f = 0$, $P(m, n)$ 在圓外

$$P \text{ 對圓之切線段長 } \ell = \sqrt{m^2 + n^2 + dm + en + f}$$



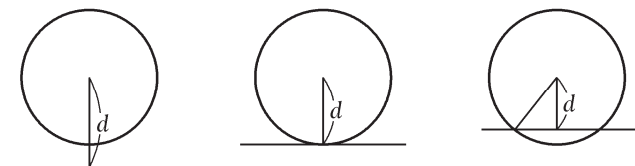
(3) A 在圓外

$$\begin{cases} \text{最近距離} = d - r \\ \text{最遠距離} = d + r \end{cases}$$



公式 21 圓與直線的關係

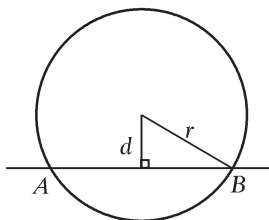
(1)



(2)

相離	相切	相割
$d > r$	$d = r$	$d < r$

(3) 弦長 $\overline{AB} = \boxed{2\sqrt{r^2 - d^2}}$



公式 22 切線

型 1 圓上一點求切線 $\Rightarrow$ 使用切線法則

(1) $C: x^2 + y^2 + dx + ey + f = 0$, 圓上一點 $P(x_0, y_0)$

(2) 過 P 的切線: $x_0x + y_0y + d(\frac{x_0 + x}{2}) + e(\frac{y_0 + y}{2}) + f = 0$

(3) 切線法則:

$$\begin{aligned} x^2 &\rightarrow x_0x, \quad x \rightarrow \frac{x_0 + x}{2}, \quad f \rightarrow f \\ y^2 &\rightarrow y_0y, \quad y \rightarrow \frac{y_0 + y}{2} \end{aligned}$$

型 2 已知 m 求切線 $\Rightarrow$ 使用公式

(1) $x^2 + y^2 = r^2 \Rightarrow y = mx \pm r\sqrt{1+m^2}$

(2) $(x-h)^2 + (y-k)^2 = r^2 \Rightarrow y-k = m(x-h) \pm r\sqrt{1+m^2}$

型 3 已知圓外一點求切線

(1) $C: (x-h)^2 + (y-k)^2 = r^2$, 令斜率為 m

(2) 切線為 $y-k = m(x-h) \pm r\sqrt{1+m^2}$

將 P 點代入求 m

(3) 由點斜式求切線

公式 23 直線與圓的距離

(1) 最近距離 = $d - r$

(2) 最遠距離 = $d + r$

